Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 58–64

УДК **519.633**

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ

М. Х. Шхануков-Лафишев, М. М. Лафишева, Ф. М. Нахушева, А. Б. Мамбетова

Работа посвящена исследованию локально-одномерных схем для уравнения теплопроводности с нестационарным краевым условием, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. В работе получена априорная оценка в равномерной метрике, откуда следует сходимость построенной схемы на кубической сетке.

Ключевые слова: краевая задача, сосредоточенная теплоемкость, локально-одномерная схема, сходимость, априорная оценка.

Локально-одномерные схемы (ЛОС) для решения многомерных задач математической физики впервые введены в рассмотрение А. А. Самарским [2]. Отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации существенно расширяет класс решаемых задач.

В работе рассмотрены ЛОС для уравнения теплопроводности, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. Тогда для уравнения теплопроводности в одномерном случае, например, при $x = 0$ ставится краевое условие вида

$$c_0\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial u}{\partial x}, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Подобные условия возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью [1, с. 186], при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоемкость [2].

Аналогичные задачи возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда расслоение верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка [3, с. 233]. Если на поверхности поля имеется слой воды постоянной толщины h, то на верхней границе следует задать условие

$$h\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial c}{\partial x},$$

где c — концентрация соли в почвенном растворе, D — коэффициент диффузивности [3].

В одномерном случае подобные задачи рассмотрены в [4, с. 426]. Здесь рассматривается случай многомерной задачи, когда на границах области по каждому направлению x_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, помещена сосредоточенная теплоемкость величины $\chi_{\pm\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Для рассматриваемой задачи построена схема повышенного порядка аппроксимации. С помощью принципа максимума для ЛОС получены априорные оценки в равномерной метрике, выражающие устойчивость ЛОС по начальным данным, по правой части и граничным данным.

1. Локально-одномерная схема. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0, T]$, где $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, \dots, p\}$ — p-мерный прямоугольный параллелепипед, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = G \times (0, T], \tag{1}$$

$$L = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha, \quad L_\alpha u = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \chi_{-\alpha}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + \beta_{-\alpha}(x,t)u - \mu_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \chi_{+\alpha}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

где $0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1$, $\beta_{\pm\alpha} \geqslant \beta_* > 0$, $\chi_{\pm\alpha} \geqslant 0$, $\alpha = 1, \dots, p$.

Следуя [4, с. 520], заменим многомерное уравнение цепочкой одномерных уравнений теплопроводности

$$\frac{1}{p}\,\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad t \in \Delta_\alpha \equiv \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right], \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f, \tag{4}$$

с условиями

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \chi_{-\alpha}(x,t)\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} + \beta_{-\alpha}(x,t)v_{(\alpha)} - \mu_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \chi_{+\alpha}(x,t)\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} + \beta_{+\alpha}(x,t)v_{(\alpha)} - \mu_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} v(\alpha)(x,0) = u_0(x), \\ v_{(\alpha)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = v_{(\alpha-1)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \\ v_{(1)}(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Аппроксимируя каждое уравнение теплопроводности номера α на полуинтервале $t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leqslant t_{j+\frac{\alpha}{p}}$ двухслойной схемой, получим цепочку p одномерных схем, которую и назовем, следуя [4], *локально-одномерной схемой* (ЛОС):

$$y_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, \dots, p, \ x \in \omega_{h_\alpha}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} y_{\bar{t}_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \frac{\alpha_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha + p\chi_{-\alpha}} + \tilde{\mu}_{-\alpha}, & \tilde{\mu}_{-\alpha} = \frac{\overline{\mu}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha + p\chi_{-\alpha}}, \\ y_{\bar{t}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = -\frac{\alpha_\alpha^{N_\alpha} y_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha + p\chi_{+\alpha}} + \tilde{\mu}_{+\alpha}, & \tilde{\mu}_{+\alpha} = \frac{\overline{\mu}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha + p\chi_{+\alpha}}, \end{cases} \tag{8}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{9}$$

где $\Lambda_\alpha y = (\alpha_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha}$, $y_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}$, $\overline{\mu}_{-\alpha} = \mu_{-\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0}$, $\overline{\mu}_{+\alpha} = \mu_{+\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,N_\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, p$.

2. Погрешность аппроксимации. Полагая $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ и подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в уравнение (7), получим

$$z_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - u_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}$ и, замечая, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0$, если $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$, представим $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$, где

$$\psi_\alpha^* = \left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(u_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}\right),$$

$$\psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \overset{\circ}{\psi}_\alpha = O(1), \quad \psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^* = O(|h|^2 + \tau),$$

т. е. ЛОС обладает суммарной аппроксимацией $O(|h|^2 + \tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2$.

Граничное условие при $x_\alpha = 0$ запишем в следующем виде:

$$(p\chi_{-\alpha} + 0.5\,h_\alpha)\, y_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \alpha_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha} + 0.5\,h_\alpha f_{\alpha,0}. \tag{10}$$

Пусть $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$. Подставим $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в (10)

$$(p\chi_{-\alpha} + 0.5\,h_\alpha)\, z_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = a_\alpha^{(1_\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \alpha_\alpha^{(1_\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}$$
$$-\beta_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha} + 0.5\,h_\alpha f_{\alpha,0} - (p\chi_{-\alpha} + 0.5h_\alpha)\, u_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}.$$

Тогда

$$\psi_{-\alpha} = \alpha_\alpha^{(1_\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} - (p\chi_{-\alpha} + 0.5h_\alpha) u_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}$$
$$-0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+\frac{1}{2}}$$
$$+0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+\frac{1}{2}} = k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \chi_{-\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$-\beta_{-\alpha} u + \mu_{-\alpha} + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + O(h_\alpha^2 + \tau) = 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + \psi_{-\alpha}^*,$$

где

$$\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} = \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+\frac{1}{2}}.$$

Аналогично запишется граничное условие при $x_\alpha = l_\alpha$. Итак,

$$(p\chi_{-\alpha} + 0.5h_\alpha)\, z_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = a_\alpha^{(1_\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + \psi_{-\alpha}^*, \quad x_\alpha = 0,$$

$$(p\chi_{+\alpha} + 0.5h_\alpha)\, z_{\bar{t}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = -\left(\alpha_\alpha^{(N_\alpha)} z_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{P}}\right) + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{+\alpha} + \psi_{+\alpha}^*, \quad x_\alpha = l_\alpha,$$

где $\psi_{\pm\alpha}^* = O(h_\alpha^2 + \tau)$, $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_{\pm\alpha} = 0$, $\overset{\circ}{\psi}_{\pm\alpha} = O(1)$.

Приведем разностное уравнение (7) и граничные условия (8) к каноническому виду (см. [5, с. 339]):

$$A(P)y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)+F(P),$$

где

$$A(P)>0,\quad B(P,Q)>0,\quad D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)\geqslant 0,$$

P, Q — узлы сетки, $Ш'(P)$ — окрестность узла P, не содержащая самого узла P. Имеем

$$\left(\frac{1}{\tau}+\frac{a_{i_\alpha+1}+a_{i_\alpha}}{h_\alpha^2}\right)y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\frac{1}{h_\alpha^2}a_{i_\alpha+1}y_{i_\alpha+1}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{h_\alpha^2}a_{i_\alpha}y_{i_\alpha-1}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{\tau}y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha-1}{p}}+\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\tag{11}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{\alpha_\alpha^{(1_\alpha)}}{(0.5h_\alpha+p\chi_{-\alpha})h_\alpha}+\frac{\beta_{-\alpha}}{0.5h_\alpha+p\chi_{-\alpha}}\right)y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\\=\frac{\alpha_\alpha^{(1_\alpha)}}{(0.5h_\alpha+p\chi_{-\alpha})h_\alpha}y_1^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{\tau}y_0^{j+\frac{\alpha-1}{p}}+\tilde\mu_{-\alpha},\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{\alpha_\alpha^{(N_\alpha)}}{(0.5h_\alpha+p\chi_{+\alpha})h_\alpha}+\frac{\beta_{+\alpha}}{0.5h_\alpha+p\chi_{+\alpha}}\right)y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\\=\frac{\alpha_\alpha^{(N_\alpha)}}{(0.5h_\alpha+p\chi_{+\alpha})h_\alpha}y_{N_\alpha-1}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{\tau}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha-1}{p}}+\tilde\mu_{+\alpha},\end{gathered}\tag{13}$$

где $\tilde\mu_{-\alpha}=\frac{\overline{\mu}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha+p\chi_{-\alpha}}$, $\tilde\mu_{+\alpha}=\frac{\overline{\mu}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha+p\chi_{+\alpha}}$, $\overline{\mu}_{-\alpha}=\mu_{-\alpha}+0.5h_\alpha f_{\alpha,0}$, $\overline{\mu}_{+\alpha}=\mu_{+\alpha}+0.5h_\alpha f_{\alpha,N_\alpha}$.

Из (11)–(13) находим, что

$$D(P(x_{i_\alpha},t_{j+1}))=0,$$

$$D(P(0,t_{j+1}))=\frac{\beta_{-\alpha}}{0.5h_\alpha+p\chi_{-\alpha}},\quad D(P(l_\alpha,t_{j+1}))=\frac{\beta_{+\alpha}}{0.5h_\alpha+p\chi_{+\alpha}},\quad \beta_{\pm\alpha}\geqslant\beta_*>0.$$

Представим решение задачи (7)–(9) в виде суммы $y=\overset{\circ}{y}+y^*$, где $\overset{\circ}{y}$ — решение задачи с $\overline{\mu_1}=\overline{\mu_2}=0$, а y^* — решение задачи с $u_0(x)=0$, $\varphi(x,t)=0$. Оценим сначала y^*. Для оценки y^* воспользуемся теоремой 3 (см. [4, с. 344]):

$$\|y^*(x,t_{j+1})\|_{C_h}\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant j+1}\frac{1}{\beta_*}(|\overline{\mu}_{-\alpha}(t_k)|+|\overline{\mu}_{+\alpha}(t_k)|).\tag{14}$$

Для оценки $\overset{\circ}{y}$ нам понадобится теорема 4 (см. [3, с. 347]). Перепишем (11) в виде

$$\left(\frac{1}{\tau}+\frac{a_{i_\alpha+1}+a_{i_\alpha}}{h_\alpha^2}\right)y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\frac{1}{h_\alpha^2}\,a_{i_\alpha+1}y_{i_\alpha+1}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{h_\alpha^2}\,a_{i_\alpha}y_{i_\alpha-1}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\Phi\big(P_{(j+1)}\big),$$

где $\Phi(P_{(j+1)})=\frac{1}{\tau}y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha-1}{p}}+\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}$. Тогда

$$D'\big(P_{(j+1)}\big)=\frac{1}{\tau},\quad \frac{1}{D'\big(P_{(j+1)}\big)}\sum_{Q\in Ш''_n}B(P,Q)=1.$$

Все условия теоремы 4 из [5] выполнены, поэтому имеем оценку

$$\|\overset{\circ}{y}{}^{j+1}\|_{C_h}\leqslant\|u_0(x)\|_{C_h}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\big\|_{C_h}.\tag{15}$$

Из оценок (14), (15) следует окончательная оценка для решения задачи (7)–(9):

$$\|y^{j+1}\|_{C_h} \leqslant \|u_0(x)\|_{C_h} + \max_{0\leqslant k\leqslant j+1}(|\overline{\mu}_{-\alpha}(t_k)| + |\overline{\mu}_{+\alpha}(t_k)|) + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|_{C_h}. \qquad (16)$$

3. Равномерная сходимость ЛОС. Перепишем задачу для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в виде

$$z_{\overline{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*,$$

$$z_{\overline{t}_\alpha,0} = \frac{\alpha_\alpha^{(1_\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{p\chi_{-\alpha} + 0.5h_\alpha} + \frac{\psi_{-\alpha}^*}{\chi_{-\alpha} + 0.5h_\alpha} + \frac{0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}}{p\chi_{-\alpha} + 0.5h_\alpha},$$

$$z_{\overline{t}_\alpha,N_\alpha} = -\frac{\alpha_\alpha^{(N_\alpha)} z_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{p\chi_{+\alpha} + 0.5h_\alpha} + \frac{\psi_{+\alpha}^*}{p\chi_{+\alpha} + 0.5h_\alpha} + \frac{0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{+\alpha}}{p\chi_{+\alpha} + 0.5h_\alpha},$$

$$z(x,0) = 0.$$

Представим по аналогии [4, с. 528] решение задачи для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = z_{(\alpha)}$ в виде суммы $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условием

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \overset{\circ}{\psi}_\alpha, \quad x_\alpha \in \omega_{h_\alpha},$$

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \frac{0.5h_\alpha}{p\chi_{-\alpha} + 0.5h_\alpha}\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0,$$

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \frac{0.5h_\alpha}{p\chi_{+\alpha} + 0.5h_\alpha}\overset{\circ}{\psi}_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha,$$

$$\eta(x,0) = 0.$$

Отсюда находим $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau(\overset{\circ}{\psi}_1 + \overset{\circ}{\psi}_2 + \ldots + \overset{\circ}{\psi}_p) = \eta^j = 0$.

На кубической сетке $h_1 = h_2 = \ldots = h_p = h$ при условии

$$\chi_{-1} = \chi_{-2} = \ldots = \chi_{-p} = \chi_1, \quad \chi_{+1} = \chi_{+2} = \ldots = \chi_{+p} = \chi_2$$

имеем

$$\eta^{j+1} = \eta^j + \frac{0.5h\tau}{p\chi_1 + 0.5h}\left(\overset{\circ}{\psi}_{-1} + \overset{\circ}{\psi}_{-2} + \ldots + \overset{\circ}{\psi}_{-p}\right) = \eta^j = 0,$$

$$\eta^{j+1} = \eta^j + \frac{0.5h\tau}{p\chi_2 + 0.5h}\left(\overset{\circ}{\psi}_{+1} + \overset{\circ}{\psi}_{+2} + \ldots + \overset{\circ}{\psi}_{+p}\right) = \eta^j = 0,$$

$$\eta_{(\alpha)} = \tau\left(\overset{\circ}{\psi}_1 + \overset{\circ}{\psi}_2 + \ldots + \overset{\circ}{\psi}_\alpha\right) = -\tau\left(\overset{\circ}{\psi}_{\alpha+1} + \overset{\circ}{\psi}_{\alpha+2} + \ldots + \overset{\circ}{\psi}_p\right) = O(\tau).$$

Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha v_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_\alpha, \quad \tilde{\psi}_\alpha = \Lambda_\alpha\eta_{(\alpha)} + \psi_\alpha^*, \quad v_{(\alpha)}(x,0) = 0,$$

где $\Lambda_\alpha \eta_\alpha = -\tau \Lambda_\alpha\big(\overset{\circ}{\psi}_{\alpha+1} + \overset{\circ}{\psi}_{\alpha+2} + \ldots + \overset{\circ}{\psi}_p\big) = O(\tau)$, если в замкнутой области $\overline{Q}_T$ существуют непрерывные производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}$, $\alpha \neq \beta$.

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} + \frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \frac{\alpha_\alpha^{(1_\alpha)} v_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} v_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{p\chi_1 + 0.5h} + \frac{\psi^*_{-\alpha}}{p\chi_1 + 0.5h} + \frac{0.5h\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}}{p\chi_1 + 0.5h},$$

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \frac{\alpha_\alpha^{(1_\alpha)} v_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} v_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{p\chi_1 + 0.5h} + \frac{\psi^*_{-\alpha}}{p\chi_1 + 0.5h}, \quad x_\alpha = 0,$$

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = -\frac{\alpha_\alpha^{(N_\alpha)} v_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \beta_{+\alpha} v_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{p\chi_2 + 0.5h} + \frac{\psi^*_{+\alpha}}{p\chi_2 + 0.5h}, \quad x_\alpha = l_\alpha.$$

Для оценки $v_{(\alpha)}$ воспользуемся оценкой (16):

$$\big\|v^{j+1}\big\|_{C_h} \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant j+1}(|\psi^*_{-\alpha}| + |\psi^*_{+\alpha}|) + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big\|\tilde{\psi}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\big\|_{C_h}.$$

Так как $\eta^j = 0$ для всех $j = 0, 1, \ldots, j_0$, то для погрешности имеем оценку

$$\big\|z^{j+1}\big\|_{C_h} \leqslant \big\|v^{j+1}\big\|_{C_h} \leqslant M(h^2 + \tau).$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ вместе с производными $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в Q_T производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_\alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p,$$

$\chi_{-\alpha} = \chi_1 = \mathrm{const}$, $\chi_{+\alpha} = \chi_2 = \mathrm{const}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. *Тогда схема (7)–(9) равномерно сходится на кубической сетке $h_1 = h_2 = \ldots = h_p = h$ со скоростью $O(h^2 + \tau)$.*

Литература

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1996.—724 с.
2. *Самарский А. А.* Об одной задаче распространения тепла // Избр. тр. А. А. Самарского.—М.: МАКС Пресс, 2003.—С. 1–22.
3. *Нерпин С. В., Чудновский А. Ф.* Энерго- и массообмен в системе растение–почва–воздух.—Л.: Гидрометеоиздат, 1975.—358 с.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1973.
5. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.

Статья поступила 12 декабря 2011 г.

Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович
Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова,
заведующий кафедрой вычислительной математики
РОССИЯ, 360000, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 165
E-mail: shkhanukov-lafishev@mail.ru

Лафишева Мадина Мухамедовна
Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова,
доцент кафедры информатики и МОАС
РОССИЯ, 360000, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 165
E-mail: `taisauti@yandex.ru`

Нахушева Фатима Мухамедовна
Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова,
доцент кафедры вычислительной математики
РОССИЯ, 360000, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 165

Мамбетова Альбина Борисовна
Сахалинский государственный университет,
старший преподаватель кафедры информатики
РОССИЯ, 693008, Южно-Сахалинск, ул. Пограничная, 70/106
Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова,
аспирант кафедры вычислительной математики
РОССИЯ, 360000, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 165

THE LOCALLY-ONE-DIMENSIONAL SCHEME FOR THE EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY WITH THE CONCENTRATED THERMAL CAPACITY

Shkhanukov M. Kh., Lafisheva M. M., Nakhusheva F. M., Mambetova A. B.

The work is devoted to locally-one-dimensional schemes for the equation of heat conductivity with a non-stationary boundary condition which imitate a concentrated thermal capacity placed on domain boundary. A priori estimate in the uniform metrics is obtained and the convergence of the constructed scheme on a cubic net is proved.

Key words: the regional problem, the concentrated thermal capacity, the locally-one-dimensional schemes, convergence, an aprioristic estamation.