Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 1, С. 14–17

УДК **519.46**

ОБ ИЗВЛЕЧЕНИИ ТРАНСВЕКЦИЙ В НАДГРУППАХ НЕРАСЩЕПИМОГО МАКСИМАЛЬНОГО ТОРА

Н. А. Джусоева

Анатолию Георгиевичу Кусраеву
к его шестидесятилетию

Устанавливается, что $TE(\sigma_A)$, где $E(\sigma_A)$ — подгруппа, порожденная всеми трансвекциями из сетевой группы, является группой. Кроме того, доказывается, что эта группа порождается тором и корневыми подгруппами позиции первого столбца элементарной группы $E(\sigma_A)$.

Ключевые слова: надгруппы, промежуточные подгруппы, элементарная группа, нерасщепимый максимальный тор, трансвекция.

1. Введение

Данная работа примыкает к направлению, связанному с описанием подгрупп полной линейной группы над полем, содержащих тор. Наиболее значительные результаты в этом направлении были получены в работах З. И. Боревича, Н. А. Вавилова и их учеников. Настоящая статья продолжает работы З. И. Боревича и В. А. Койбаева и посвящена исследованию трансвекций в подгруппах полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,k)$ степени n над полем k, содержащих нерасщепимый максимальный тор, связанный с радикальным расширением $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k нечетной характеристики.

Мы предполагаем, что рассматриваемые подгруппы содержат одномерное преобразование, а потому в силу [4] все такие подгруппы содержат элементарные трансвекции на всех позициях (для радикального расширения поля k).

Сформулируем основной результат работы. Элементы матриц тора $T = T(d)$ порождают некоторое подкольцо $R(d)$ (см. [3]) поля k. Пусть R — промежуточное подкольцо, $R(d) \subseteq R \subseteq k, d \in R$, A — идеал кольца R. Через σ_A обозначим сеть, у которой на главной диагонали и выше стоит идеал dA, а ниже диагонали — A. Пусть, далее, $E(\sigma_A)$ — подгруппа, порожденная всеми (общими) трансвекциями из сетевой группы $G(\sigma_A)$.

Теорема. *Произведение $TE(\sigma_A)$ является группой, причем эта группа порождается тором T и корневыми подгруппами:*

$$TE(\sigma) = \langle T, t_{i1}(A) : 2 \leqslant i \leqslant n \rangle.$$

Более точно, всякая трансвекция из $E(\sigma)$ имеет вид

$$ct_{21}(\alpha_2)t_{31}(\alpha_3)\dots t_{n1}(\alpha_n)c^{-1}$$

для некоторых $c \in T$, $\alpha_i \in A$.

В работе приняты следующие обозначения: e — единичная матрица порядка n; e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i,j) стоит $1 \in k$, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ — элементарная трансвекция $\xi \in k^*$, $i \neq j$; трансвекция — это матрица вида $(\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = 0$ (δ_{ij} — символ Кронекера); $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ — коммутатор элементов x, y (соответственно $[X,Y]$ — коммутант); через $(S)_{ij}$ обозначается элемент s_{ij} матрицы $S = (s_{ij})$, стоящий на позиции (i,j); s'_{ij} — элементы обратной матрицы $S^{-1} = (s'_{ij})$; с каждым вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}$ связана невырожденная матрица $C(x)$, элементы которой вычисляются по формулам

$$\big(C(x)\big)_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

С каждой матрицей $C = C(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица $C^{-1} = C(y) = (c'_{ij})$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in k^n$, где $y_i = \frac{C_{1i}}{|C(x)|}$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $C = C(x)$.

В работе рассматривается унитальное подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k, порожденное элементами x_iy_j, dx_ry_s,

$$R_0 = R(d) = \big\langle x_iy_j,\, dx_ry_s:\ i+j \leqslant n+1,\ r+s > n+1,\ x \in k^n \setminus \bar{0}\big\rangle.$$

На протяжении всей статьи R — промежуточное подкольцо, $R_0 \subseteq R \subseteq k$, $d \in R$.

2. Элементарная сетевая группа

Пусть $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем k, $d \in k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, образует базис радикального расширения $K = k(\sqrt[n]{d})$, $\theta = \sqrt[n]{d}$, поля $K = k(\theta)$ над k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении в $G = GL(n,k)$. В выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа

$$T = T(d) = \{C(x) :\ x \in k^n \setminus \bar{0}\}.$$

Пусть R — унитальное подкольцо поля k, содержащее кольцо $R_0 = R(\mu)$, $d \in R$. Пусть, далее, A — идеал кольца R, причем через σ_A обозначим сеть, у которой на главной диагонали и выше стоит идеал dA, а ниже диагонали — A. Пусть, далее, $E(\sigma_A)$ — подгруппа, порожденная всеми (общими) трансвекциями из сетевой группы $G(\sigma_A)$ [1]. Подгруппу $E(\sigma_A)$ мы называем элементарной сетевой подгруппой, соответствующей сети σ_A.

Лемма 1 [2, предложение 2]**.** *Справедливы следующие два утверждения:*

(1) *для любых $\alpha, \beta \in k^n \setminus \bar{0}$ найдется $x \in k^n \setminus \bar{0}$ такой, что $C(x)\alpha = \beta$;*

(2) *если $\alpha \in k^n$ — произвольная строка (столбец), то для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, найдется $x \in k^n$ такой, что i-я строка (столбец) матрицы $C(x)$ совпадает с α.*

Лемма 2 [3, теорема 2.7.7]**.** *Тор T нормализует группы $G(\sigma)$ и $E(\sigma)$. Следовательно, $TG(\sigma)$ и $TE(\sigma)$ — промежуточные подгруппы, содержащие тор T.*

Лемма 3 [4, лемма 3]**.** *Пусть $b = (\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$ — трансвекция из $TG(\sigma)$. Тогда $\alpha_i\beta_j \in \sigma_{ij}$.*

$\lhd$ Доказательство теоремы. Пусть $b = (\delta_{ij} + \alpha_{ij}\beta_{ij})$ — трансвекция из $TE(\sigma)$. Согласно лемме 3 имеем $b \in E(\sigma)$. Далее, согласно лемме 1 для некоторой матрицы $c \in T$

матрица $c^{-1}bc$ отличается от единичной только первым столбцом, с другой стороны по лемме 2 $c^{-1}bc \in G(\sigma)$. Следовательно, матрица $c^{-1}bc \in G(\sigma)$ (а потому и матрица b) принадлежит правой части доказываемого равенства. $\rhd$

3. Сеть, ассоциированная с промежуточной подгруппой

С промежуточной подгруппой H, $T \leqslant H \leqslant G$, содержащей трансвекцию, связаны модули трансвекций ($i \neq j$)

$$A_{ij} = A_{ij}(H) = \{\alpha \in k : \, t_{ij}(\alpha) \in H, \ i \neq j\}$$

и их кольца множителей

$$R_{ij} = R_{ij}(H) = R_{ij}(A_{ij}) = \{\lambda \in k : \, \lambda A_{ij} \subseteq A_{ij}\}.$$

Очевидно, что A_{ij} являются подгруппами аддитивной группы k^+ поля k (R_{ij}-модули). Положим $A_i = A_{i1}$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Тогда [3, лемма 2.7.1] справедлива формула

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

Будем предполагать, далее, что все кольца R_{ij} совпадают между собой и равны кольцу R, A_i — целые идеалы кольца R, $d \in R$, $R \supseteq R_0$. Будем предполагать также, что

$$A = A_2 = A_3 = \ldots = A_n.$$

Положим $A_1 = dA$ и рассмотрим сеть $\sigma = (\sigma_A) = \sigma(A_1, \ A_2, \ldots, \ A_n)$, которую мы называем сетью ассоциированной с подгруппой H.

Из теоремы вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. *Группа $TE(\sigma_A)$ содержится в группе H.*

Рассмотрим матрицу

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \lambda_n & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Предложение 2 [4, лемма 4]**.** *Если матрица a содержится в группе H, то $\lambda_i A_2 \subseteq A_{i+1}$ для всех i, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, и $d\lambda_n A_n \subseteq A_{n-1}$.*

Лемма 4. *Если матрица a содержится в группе H, то $\lambda_i \in R$ для всех i, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, и $d\lambda_n \in R$. Далее, если $A = R$, то $\lambda_i \in R$ для всех i, $2 \leqslant i \leqslant n$.*

$\lhd$ Если $n = 2$, то $\lambda_2 \in A \in R$. Если же $n \geqslant 3$, то из предложения 2 следует, что $\lambda_i \in R$ для всех i, $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Далее, $d\lambda_n A \subseteq A$, откуда $d\lambda_n \in R$. Если при этом $A = R$, то по доказанному $t_{i1}(\lambda_i) \in H$ для $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Умножая матрицу a на $t_{i1}(-\lambda_i)$, мы получим матрицу $t_{n1}(\lambda_n) \in H$, откуда $\lambda_n \in R$. $\rhd$

Литература

1. *Боревич З. И.* Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН.—1976.—Т. 64.—С. 12–29.
2. *Койбаев В. А.* Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, № 5.—С. 70–86.
3. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $\mathrm{GL}(2, k)$, содержащие нерасщепимый тор.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—183 с.—(Итоги науки. ЮФО. Сер. мат. моногр.).
4. *Койбаев В. А., Шилов А. В.* О подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН.—2010.—Т. 375.—С. 130–139.

Статья поступила 9 апреля 2012 г.

Джусоева Нонна Анатольевна
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
ассистент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `djusoevanonna@rambler.ru`

ON EXTRACTION OF TRANSVECTIONS IN OVERGROUPS OF A NON-SPLIT MAXIMAL TORUS

Dzhusoeva N. A.

Let $E(\sigma_A)$ be a subgroup generated by all transvections of the net group $G(\sigma_A)$. Then $TE(\sigma_A)$ is also a group generated by the torus and the root subgroup items in the first column of the elementary group $E(\sigma_A)$.

Key words: overgroups, intermediate subgroups, elementary group, non-split maximal torus, transvection.