Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 1, С. 24–29

УДК **532.543**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ БУРНОГО ПОТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ ВЫПУКЛОГО УГЛА

В. Н. Коханенко, В. Г. Фетисов, М. Ф. Мицик

В статье приведен метод расчета параметров двухмерного бурного планового потока, возникающего при обтекании выпуклого тупого угла. Основными допущениями являются условия равномерного течения потока в верхнем и нижним бьефах.

Ключевые слова: бурный равномерный поток, простая центрированная волна, метод характеристик, число Фруда.

Настоящая работа является продолжением исследования решения плановых задач гидравлики по определению основных параметров двухмерных бурных потоков. В отличие от физической плоскости течения, в которой базовая система уравнений движения существенно нелинейная и для которой в настоящее время аналитические решения плановых задач не известны, в плоскости годографа скорости получена линейная система уравнений, на основе которой строится широкий класс решений двухмерных плановых задач.

Задача обтекания бурным равномерным потоком выпуклого тупого угла рассматривалась в [1] непосредственно в физической плоскости течения потока. Двухмерная плановая задача об обтекании выпуклого угла решалась в [1] аналитически в предположении, что после обтекания потоком тупого угла вдоль границы течения поток также является равномерным.

Для развития метода расчета параметров бурного потока с применением плоскости годографа скорости в работе [2] этим методом была решена задача о радиальном растекании бурного потока с последующим переходом в физическую плоскость. Также была предложена методика решения ряда задач по плановому растеканию бурных потоков и была обоснована правомерность использования плоскости годографа скорости.

Целью настоящей работы также является применение плоскости годографа скорости для определения параметров бурного потока при обтекании выпуклого угла и сопоставление полученных результатов расчета с результатами в [1].

Пусть бурный равномерный поток движется вдоль прямой стенки BA в точке A граница плана течения терпит излом, в этой точке стенка развернута на угол $-\varepsilon_0$ (рис. 1). Пусть поток, огибая угловую точку A, движется вдоль стенки AC, которая также является прямой.

© 2014 Коханенко В. Н., Фетисов В. Г., Мицик М. Ф.

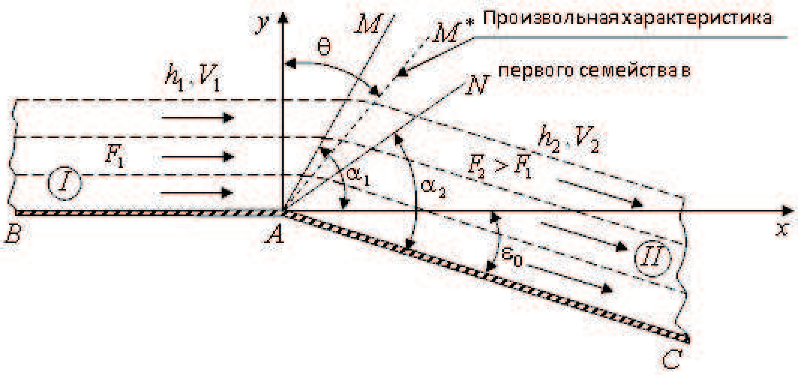

Рис. 1. Образование простой центрированной волны в окрестности выпуклого угла.

Считаем достоверным условием, что стенка AC является линией тока и поток вдоль стенки AC является равномерным.

Как показано в [1], границей между равномерным и неравномерным потоком всегда служит прямолинейная характеристика, тогда к области равномерного течения, которой в плоскости годографа соответствует одна точка, примыкает простая волна, т. е. простые волны служат переходной формой от равномерного потока к неравномерному. Таким образом, два равномерных потока разделены простой волной. Определим границы этих потоков. Обозначим числа Фруда для каждого из равномерных потоков I и II соответственно F_1 и F_2, пусть при этом $F_2 > F_1$. Согласно [1], границами этих потоков являются прямые AM и AN, которые являются характеристиками первого семейства с соответствующими волновыми углами (рис. 1):

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{F_1}}, \quad \alpha_2 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{F_2}}. \tag{1}$$

Вдоль характеристики второго семейства, пересекающей характеристики, выходящие из точки A, будет выполнено условие [1]

$$\varepsilon - \left(\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F-1}{3}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}} \right) = -2\eta, \tag{2}$$

или в виде, предложенном в [3]

$$\varepsilon - \left(\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3\tau - 1}{3(1-\tau)}} + \arcsin \sqrt{\frac{1-\tau}{2\tau}} \right) = -2\eta, \tag{3}$$

где $\tau = \frac{F}{F+2}$, $\tau = \frac{V^2}{2gH_1}$ — квадрат скоростного коэффициента потока; ε — угол, определяющий направление вектора скоростей частиц потока; H_1 — постоянная, определяемая из формулы Бернулли $H_1 = \frac{V_1^2}{2g} + h_1$ по параметрам V_1, h_1 для потока I; η — постоянная величина вдоль характеристики.

Так как в потоке I выполняется $\varepsilon = 0$, $F = F_1$, то

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F-1}{3}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}} \right). \tag{4}$$

Поскольку угол ε в задаче обтекания выпуклого угла изменяется от нуля до $\varepsilon = -\varepsilon_0$, т. е. всегда отрицателен, то уравнение (2) с учетом (4) примет вид:

$$\varepsilon^* = \left(\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{F-1}{3}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{F}}\right) - \left(\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{F_1-1}{3}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{F_1}}\right), \tag{5}$$

где $\varepsilon^* = |\varepsilon|$.

Максимальный угол поворота при безотрывном обтекании стенки с изломом при заданной кинетичности F_1 первого потока определяется из условия $F_2 = \infty$, $h_2 = 0$,

$$\varepsilon^*_{\max} = \sqrt{3}\frac{\pi}{2} - \left(\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{F_1-1}{3}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{F_1}}\right). \tag{6}$$

Предельный угол поворота бурного потока достигается в (9), если положить поток I критическим, т. е. $F_1 = 1$. В таком случае

$$\varepsilon^*_{\max} = \left(\sqrt{3} - 1\right)\frac{\pi}{2} \approx 1{,}15\,\mathrm{rad} \approx 65{,}88^\circ. \tag{7}$$

Эти расчеты согласуются с результатами в [1].

Из (5) также следует, что для безотрывного обтекания потоком выпуклого тупого угла должно выполняться условие:

$$\varepsilon_0 = f(F_2) - f(F_1), \tag{8}$$

где $f(F) = \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{F-1}{3}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{F}}$.

Зная, что в центрированной волне параметры потока связаны условием (2) с использованием (4), можно задавать $F \in [F_1; F_2]$, определяя соответствующий угол ε вдоль характеристики первого семейства, т. е. на произвольной прямой AM^* (рис. 1).

Угол θ для характеристики первого семейства, отсчитываемый от оси OY (рис. 1) определяется по формуле

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha + \varepsilon^*. \tag{9}$$

Определив θ и F, можно определить и параметры потока вдоль прямой $\theta = \mathrm{const}$:

$$h = H_1(1-\tau), \quad V = \tau^{1/2}\sqrt{2gH_1}, \tag{10}$$

где h_1, V_1 — глубина и скорость равномерного потока I.

Таким образом, параметры потока в центрированной волне полностью определены. Для построения линий тока в центрированной волне выявим основные свойства потока в этой области течения. Поскольку два равномерных потока соединены простой центрированной волной, то в данной волне характеристики первого семейства — прямые, они проходят через начало координат и имеют уравнения $\theta = \mathrm{const}$, при этом вдоль прямолинейной характеристики параметры потока постоянны, следовательно, в каждой точке характеристики выполняется

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial r} = 0. \tag{11}$$

Согласно [1] система уравнений движения планового потока в полярных координатах совместно с уравнением неразрывности имеет вид:

$$\begin{cases} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -g\sin\mu\cos\theta - g\cos\mu\frac{\partial(z_0+h)}{\partial r} - T_r; \\ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -g\sin\mu\sin\theta - g\cos\mu\frac{\partial(z_0+h)}{\partial(\theta)} - T_\theta; \\ \frac{\partial}{\partial r}(r u_r h) + \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta h) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где r, θ — полярные радиус и угол жидкой частицы потока; u_r, u_θ — радиальная и трансверсальная проекции вектора скорости; z_0 — отметка дна русла; μ — продольный уклон русла; g — ускорение силы тяжести.

В рассматриваемой задаче имеем

$$T_r = T_\theta = 0, \quad z_0 = \text{const}, \quad \mu = 0. \tag{13}$$

В силу условий (11) и (13) система (12) упрощается:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = u_\theta; \\ u_\theta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) = -g\frac{\partial h}{\partial \theta}; \\ u_r h + u_\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} + h\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Третье уравнение системы (14) выражает в полярных координатах условие неразрывности движения потока $\Omega = 0$, при этом справедлив интеграл Бернулли

$$H_1 = \frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2g} + h. \tag{15}$$

Из второго и третьего уравнений системы (14), как показано в [1], следует:

$$u_\theta = \sqrt{gh}. \tag{16}$$

Уравнение линии тока в полярных координатах имеет вид [4]:

$$\frac{dr}{u_r} = \frac{r d\theta}{u_\theta}. \tag{17}$$

Радиальную и трансверсальную координаты вектора скорости выразим через τ:

$$h = H_1(1-\tau), \quad u_\theta = \sqrt{gH_1(1-\tau)},$$
$$u_r = \sqrt{gH_1(3\tau - 1)}, \quad V = \tau^{1/2}\sqrt{2gH_1}. \tag{18}$$

Перепишем уравнение (17) в виде

$$\frac{dr}{r} = \frac{u_r d\theta}{u_\theta} = \sqrt{\frac{3\tau-1}{1-\tau}}\, d\theta. \tag{19}$$

Из уравнения (3) выразим $\sqrt{\frac{3\tau-1}{1-\tau}}$. Для этого (3) перепишем в виде:

$$\varepsilon^* - \alpha = \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3\tau-1}{3(1-\tau)}} - 2\eta, \tag{20}$$

где $\varepsilon^* = |\varepsilon|$, или

$$\frac{\varepsilon^* - \alpha + 2\eta}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3\tau - 1}{3(1-\tau)}}. \tag{21}$$

Из (21) следует

$$\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varepsilon^* - \alpha + 2\eta}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\tau - 1}{1-\tau}}. \tag{22}$$

Из равенства (9) найдем $d\theta$:

$$d\theta = d\varepsilon^* - d\alpha. \tag{23}$$

Обозначим выражение

$$\gamma = \frac{\varepsilon^* - \alpha + 2\eta}{\sqrt{3}}. \tag{24}$$

Тогда из (22) и (23) следует

$$d\gamma = \frac{d\varepsilon^* - d\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{d\theta}{\sqrt{3}}$$

или

$$d\theta = \sqrt{3}d\gamma. \tag{25}$$

Учитывая формулы (22), (24) и (25), уравнение (19) представим в форме

$$\frac{dr}{r} = 3\operatorname{tg}\gamma\, d\gamma. \tag{26}$$

Интегрируя уравнение (26), получим:

$$\ln\frac{r}{r_0} = \ln\left|\frac{\cos^3\gamma_0}{\cos^3\gamma}\right|. \tag{27}$$

При этом, если начальную точку траектории выбрать на луче AM, то $\gamma_0 = \frac{-\alpha_1+2\eta}{\sqrt{3}}$, а если — на луче AN, то $\gamma_0 = \frac{\varepsilon_0-\alpha_2+2\eta}{\sqrt{3}}$.

Потенцирование (27) приводит к уравнению

$$r = r_0\frac{\cos^3\gamma_0}{\cos^3\gamma}. \tag{28}$$

Из (28) следует, что линии тока в простой центрированной волне являются подобными кривыми, расстояния между которыми при $F_2 > F_1 > 1$ увеличиваются вниз по течению потока.

Таким образом, поставленная в работе задача по определению параметров потока при обтекании выпуклого тупого угла решена методом использования плоскости годографа скорости. При этом результаты, полученные в работе, совпадают с результатами в [1], где был предложен аналитический метод расчета параметров потока непосредственно в физической плоскости — в плане течения потока.

Литература

1. *Емцев Б. Т.* Двухмерные бурные потоки.—М.: Энергия, 1967.—212 с.
2. *Коханенко В. Н.* Двухмерные в плане бурные стационарные потоки за водопропускными сооружениями в условиях свободного растекания: Дис. ... докт. техн. наук.—М., 1997.—238 с.

3. *Коханенко В. Н., Волосухин Я. В., Ширяев В. В., Коханенко Н. В.* Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков.—Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007.—168 с.
4. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки.—М.: Наука, 1965.—468 с.

Статья поступила 31 мая 2013 г.

Коханенко Виктор Николаевич
Донской государственный аграрный университет,
профессор кафедры механики
и оборудования процессов пищевых производств
РОССИЯ, 346493, Ростовская обл., Октябрьский район, пос. Персиановский;
E-mail: m_mits@mail.ru

Фетисов Валерий Георгиевич
Институт сферы обслуживания и предпринимательства,
филиал Донского государственного технического университета
профессор кафедры математики
РОССИЯ, 346500, Ростовская обл., Шахты, ул. Шевченко, 147;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
Заведующий лабораторией прикладного нелинейного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru

Мицик Михаил Федорович
Институт сферы обслуживания и предпринимательства,
филиал Донского государственного технического университета
доцент кафедры математики
РОССИЯ, 346500, Ростовская обл., г. Шахты, ул. Шевченко, 147;
E-mail: m_mits@mail.ru

SIMULATION THE PARAMETERS OF TURBULENT FLOW WHEN DIFFRACTION OF A BLUNT ANGLE

Kochanenko V. N., Fetisov V. G., Mitsik M. F.

This article provides a method of calculation of parameters of a two-dimensional turbulent flow when occurs diffraction of the blunt angle. The main assumptions are conditions of uniform flow in the upper and lower canal ponds.

Key words: turbulent even flow, simple centered wave, method of characteristics, the Froude number.