Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 1, С. 42–49

УДК **517.956.6**

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ж. О. Тахиров, Р. Н. Тураев

В данной работе изучается нелокальная краевая задача для нелинейного параболического уравнения. Получены Шаудеровские априорные оценки. Доказаны теоремы существования и единственности.

Ключевые слова: нелокальная задача, априорная оценка, принцип экстремума, условие Гёльдера, нелинейное параболическое уравнение, принцип Шаудера, существование и единственность решения.

Нелинейные параболические уравнения второго порядка лежат на основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в физике, механике и многих других областях знаний [1]. Для широких классов уравнений решены принципиальные проблемы разрешимости и единственности решений различных краевых задач, подробно изучены дифференциальные свойства решений. Здесь необходимо указать работы А. А. Самарского [2], О. А. Ладыженской [3], С. Н. Кружкова [4, 5], А. Фридмана [6], Н. В. Крылова [7] и др.

В работе [4] изучены первая и вторая краевые задачи, а также задача Коши для нелинейного параболического уравнения вида

$$u_t = a(t, x, u, u_x, u_{xx}). \tag{1}$$

В многомерном случае первая краевая задача для уравнения (1) исследована также в работах [7] и [8].

В настоящей работе в области $Q = \{(t, x) : 0 \leqslant t \leqslant T,\ |x| \leqslant l\}$ для уравнения (1) рассматривается краевая задача с условиями

$$u(x, 0) = 0, \tag{2}$$

$$u_x(t, -l) = 0, \tag{3}$$

$$u(t, -l) = u(t, l). \tag{4}$$

Поставленная задача представляет собой математическую модель спирального филлотаксиса [9] (филлотаксис — расположение листьев на стебле растения). Здесь $u(t, x)$ — концентрация морфогена в точке x в момент t.

Используем результаты и обозначения работы [4].

Введем прямоугольники

$$Q_-^\delta = \big\{(t, x) : 0 \leqslant t \leqslant T,\ -l \leqslant x \leqslant l - \delta\big\},$$

$$Q_0^\delta = \big\{(t, x) : 0 \leqslant t \leqslant T,\ |x| \leqslant l - \delta\big\}.$$

Для функции $u(t,x)$, определенной на некотором множестве D, определим нормы

$$|u|_0^D = \sup_D |u(t,x)|,$$

$$|u|_\gamma^D = |u|_0^D + \sup_{\substack{(t,x)\in D,\\ (\tau,y)\in D}} \frac{|u(t,x)-u(\tau,y)|}{(|t-\tau|+|x-y|^2)^{\gamma/2}},$$

$$|u|_{1+\gamma}^D = |u|_\gamma^D + |u_x|_\gamma^D,$$

$$|u|_{2+\gamma}^D = |u|_{1+\gamma}^D + |u_{xx}|_\gamma^D + |u_t|_\gamma^D.$$

Всюду в работе предполагаем, что для уравнения (1) выполнены следующие основные условия.

А. *Условия параболичности*: для $(t,x)\in Q$, $|u|\leqslant M$ и любых p и r

$$a_r(t,x,u,p,r) \geqslant a_0 > 0. \tag{5}$$

Б. *Условие подчинения младших членов*: для $(t,x)\in Q$, $|u|\leqslant M$ и произвольных ξ

$$\pm a\big(t,x,u,\xi+g(t),\mp K\xi^2\big) \leqslant H, \qquad K,H>0, \tag{6}$$

$g(t)$ ограниченная функция, $|g|\leqslant g_0$.

Исследование проводится по следующей схеме.

Сначала оценим максимум модуля решения задачи. В работе [4] сначала установлена оценка для $|u_x|$ вплоть до границы. В нашем случае это невозможно. Поэтому оценим $|u_x|$ в области $Q_-^\delta = \{(t,x):\ 0\leqslant t\leqslant T,\ -l\leqslant x\leqslant l-\delta\}$. Далее устанавливается оценка $|u|_{2+\gamma}^{{Q_0}^{2\delta}}\leqslant C$, а затем при помощи нелокального условия получим оценку $|u_t(t,l)|_\gamma\leqslant C$.

И наконец, доказывается существование (при помощи полученных априорных оценок) и единственности решения задачи.

Лемма 1. *Пусть функция $a(t,x,u,p,r)$ обладает производными по u, p, r и для $(t,x)\in Q$ и любых $u(t,x)$ выполнены неравенства*

$$\int_0^1 a_u(t,x,\tau u,0,0)\,d\tau \leqslant a_2, \quad |a(t,x,0,0,0)|\leqslant a_1. \tag{7}$$

Тогда для решения задачи (1)–(4) справедлива оценка

$$|u|\leqslant M = \frac{a_1 e^{mT}}{m-a_2}, \tag{8}$$

где m удовлетворяет условию $m-a_2>0$.

$\lhd$ Перепишем уравнение (1) в виде

$$u_t = b_1u_{xx}+b_2u_x+b_3u+f(t,x), \quad \Omega=\big\{(t,x):\ 0<t\leqslant T,\ |x|<l\big\}, \tag{9}$$

где

$$b_1(t,x,u,p,r) = \int_0^1 a_r(t,x,u,p,\tau r)\,d\tau,$$

$$b_2(t,x,u,p)=\int\limits_0^1 a_p(t,x,u,\tau p,0)\,d\tau,$$

$$b_3(t,x,u)=\int\limits_0^1 a_u(t,x,u\tau,0,0)\,d\tau,\quad f(t,x)=a(t,x,0,0,0).$$

Введем функцию $v(t,x)=e^{-mt}u(t,x)$, $m>0$, которая удовлетворяет уравнению

$$(m-b_3)\,v+v_t=b_1v_{xx}+b_2v_x+fe^{-mt}. \tag{10}$$

Умножив (10) на $v(t,x)$, получим

$$(m-b_3)v^2+v_t\cdot v=b_1v_{xx}\cdot v+b_2v_x\cdot v+fe^{-mt}\cdot v. \tag{11}$$

Пусть $|v|$ принимает максимальное значение, отличное от нуля в некоторой точке внутри области. В точке положительного максимума и отрицательного минимума $v\cdot v_{xx}\leqslant 0$, $v_x=0$, $v_t\cdot v\geqslant 0$. Следовательно, из (11) имеем

$$|v|\leqslant\frac{\max\limits_Q|f(t,x)|}{m-b_3},\quad m-b_3>m-a_2>0\quad \text{в }\ \Omega.$$

В силу принципа максимума и условий (3), (4) для $u(t,x)=e^{mt}v(t,x)$ имеем оценку

$$|u|\leqslant\frac{\max\limits_Q|f(t,x)|e^{mT}}{m-a_3}\leqslant\frac{a_1e^{mT}}{m-a_2}=M.\ \triangleright \tag{12}$$

Здесь приведем некоторые известные результаты С. Н. Кружкова [4], которые используются в дальнейшем.

Теорема 1 [4]. *Пусть функция $u(t,x)$ непрерывна в Q вместе с производной $u_x(t,x)$ и удовлетворяет уравнению (1) всюду в Q, кроме, может быть, точек оси $t:\ 0\leqslant x\leqslant T$, $x=0$. Пусть $\sup_Q|u_{xx}|<+\infty$, $|u|\leqslant M$. Тогда для $(t,x)\in Q_0^\delta$*

$$|u_x(t,x)|\leqslant C(M,a_0,K,H,\delta). \tag{13}$$

Теорема 2 [4]. *Пусть в условиях теоремы 1 $u(0,x)=0$ или $u(t,l)\equiv 0$. Тогда оценка (13) выполняется соответственно в Q_0^δ или Q_δ^+ (следовательно, если $u(t,-l)=u(t,l)\equiv 0$, то оценка (13) выполняется в Q_δ). Если же $u|_\gamma=0$, то для $(t,x)\in Q$*

$$|u_x(t,x)|\leqslant C(M,a_0,K,H). \tag{14}$$

В теореме 2 при выводе априорных оценок до боковой границы предполагалось нулевое условие первой краевой задачи, причем существенно применялась идея нечетного продолжения.

Совершенно аналогично идея четного продолжения при граничном условии (3) позволяет перенести все результаты об априорных оценках вплоть до боковой границы $x=-l$, т. е. устанавливается оценка

$$|u_x|\leqslant C\quad \text{для}\quad Q_-^\delta. \tag{15}$$

Чтобы оценить производную u_{xx}, нужно будет дифференцировать уравнение (1) внутри Q. Поэтому всюду дальше будем предполагать, что функция $a(t,x,u,p,r)$ имеет первые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера на любом компакте.

Далее предполагается, что функция $a(t,x,u,p,r)$ удовлетворяет одному из следующих условий B или B^*:

B. Для $(t,x)\in Q$, $|u|\leqslant M$, $|p|\leqslant p_0$ и произвольных r

$$|a_x(t,x,u,p,r)|+|a_u(\dots)|+|ra_p(\dots)|\leqslant K_0a_r(\dots)(r^2+1), \tag{16}$$

а если еще $|r|\leqslant r_0$, то $|a_t(\dots)|+|a_r(\dots)|\leqslant K_1$.

B^*. Для $(t,x)\in Q$, $|u|\leqslant M$, $|p|\leqslant p_0$ и произвольных r

$$\begin{cases}|a_x(\dots)|\leqslant K_0a_r(\dots)(r^2+1),\\ |a_t(\dots)|\leqslant K_0a_r(\dots)(|r|^{2+\varepsilon}+1),\\ |a_u(\dots)|\leqslant K_0a_r(\dots)(|r|^{2+\varepsilon}+1),\quad \varepsilon<1,\end{cases} \tag{17}$$

а если еще $|r|\leqslant r_0$, то $|a_p(\dots)|+a_r(\dots)\leqslant K_1$.

Теорема 3. *Пусть функция $u(t,x)$ является решением уравнения* (1), *удовлетворяющего условиям А, Б, В. Пусть $|u(t,x)|\leqslant M$ и $u(0,x)=0$, $u_x(t,-l)=0$. Тогда*

$$|u|_{2+\gamma}^{Q_-^{2\delta}}\leqslant C. \tag{18}$$

$\lhd$ Дифференцируя (1) по x для функции $p=u_x$, получим уравнение

$$p_t=a_2(t,x,u,p,p_x)p_{xx}+a_p(\dots)p_x+a_u(\dots)p+a_x(\dots), \tag{19}$$

с граничными условиями

$$p(0,x)=0,\quad p(t,-l)=0. \tag{20}$$

Так как $|p|\leqslant C$ в Q_-^{δ}, то, применяя результаты теоремы 4 работы [2] к задаче (19), (20), имеем

$$|u_x|_{1+\gamma}^{Q_-^{2\delta}}\leqslant C. \tag{21}$$

Следовательно, $|u_{xx}|_{\gamma}^{Q_-^{2\delta}}\leqslant C$, а из уравнения (1) находим $|u_t(t,l)|_{\gamma}^{Q_-^{2\delta}}\leqslant C$.

Теперь в задаче (1)–(4), произведя замену $v(t,x)=u(t,x)-u(t,l)$, получим задачу

$$v_t(t,x)=a(t,x,u,v,v_x,v_{xx})-u_t(t,l), \tag{22}$$

$$v_x(t,-l)=0, \tag{23}$$

$$v(t,l)=0, \tag{24}$$

$$v(0,x)=0. \tag{25}$$

Если уравнение (22) рассматривать как линейное параболическое уравнение с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гёльдера с показателем α, то из задачи (22)–(25) находим

$$|v(t,x)|_{2+\alpha}^{Q}\leqslant C \tag{26}$$

или

$$|u(t,x)|_{2+\alpha}^{Q}\leqslant C.\ \rhd \tag{27}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и $u_x(t,-l)=0$. Тогда $|u|_{2+\gamma}^{Q_-^{2\delta}}\leqslant C$.*

$\lhd$ Дифференцируя (1) по x, для $p=u_x$ получим уравнение

$$p_t=a_r(t,x,u,p,p_x)p_{xx}+a_p(\dots)p_x+a_u(\dots)p+a_x(\dots) \tag{28}$$

и граничные условия

$$p(0,x)=0, \quad p(t,-l)=0. \tag{29}$$

Тогда к задаче (28), (29), применяя результаты теоремы 4 работы [4], имеем

$$|u_x|_\gamma^{Q_-^{2\delta}} \leqslant C.$$

Следовательно, $|u_{xx}|_\gamma^{Q_-^{2\delta}} \leqslant C$, а из уравнения (1) находим $|u_t|_\gamma^{Q_-^{2\delta}} \leqslant C$. Тогда при помощи нелокального условия имеем $|u_t(t,l)|_\gamma \leqslant C$.

Теперь в задаче (1)–(4), произведя замену $v(t,x)=u(t,x)-u(t,l)$, получим задачу

$$v_t(t,x)=a(t,x,u,v,v_x,v_{xx})-u_t(t,l), \tag{30}$$

$$v_x(t,-l)=u_x(t,-l)=0, \tag{31}$$

$$v(t,l)=0, \tag{32}$$

$$v(0,x)=0. \tag{33}$$

Если уравнение (30) рассматривать как линейное параболическое уравнение с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гёльдера с показателем α, то из задачи (30), (33) находим

$$|v(t,x)|_{2+\alpha}^Q \leqslant C$$

или

$$|u(t,x)|_{2+\alpha}^Q \leqslant C. \ \triangleright$$

Проблема повышения гладкости решений в зависимости от функции $a(\ldots)$ может быть решена при помощи соответствующих результатов для линейных уравнений.

Теорема 5. *Пусть относительно линейного уравнения*

$$a(t,x)\,u_{xx}+b(t,x)\,u_x+c(t,x)u+f(t,x)=u_t \tag{34}$$

выполнены условия

$$a(t,x)\geqslant a_0>0, \quad |a|_\gamma^Q+|b|_\gamma^Q+|c|_\gamma^Q=K<\infty,$$

и пусть $u(t,x)$ есть решение уравнения (34), удовлетворяющее граничным условиям (2)–(4), $|u|_{2+\gamma}^Q<\infty$. Тогда существует такое $C=C(\gamma,a_0,K)$, что

$$|u|_{2+\gamma}^Q \leqslant C|f|_\gamma^Q. \tag{35}$$

$\triangleleft$ Доказывается при помощи теории параболических потенциалов [6]. $\triangleright$

Существование решения задачи (1)–(4) доказывается при предположении, что функция $a(t,x,u,p,r)$, ее первые производные по всем аргументам, а вторые производные по (x,u,p,r) ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера на любом компакте.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4, а также $a_u(t,x,u,p,r)\leqslant 0$ в замкнутом множестве своих аргументов. Тогда задача (1)–(4) имеет и притом единственное решение $u(t,x)\in C^{2+\gamma}(Q)$.*

$\triangleleft$ Сначала докажем единственность решения. Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — два решения задачи (1)–(4). Тогда для функции $v(t,x)=u_1(t,x)-u_2(t,x)$ имеем задачу

$$v_t=A_1(t,x)v_{xx}+A_2(t,x)v_x+A_3(t,x)v, \tag{36}$$

$$v(x,0)=0, \quad v_x(t,-l)=0, \quad v(t,-l)=v(t,l), \tag{37}$$

где

$$A_1(t,x)=\int\limits_0^1 a_r\Big(t,x,\tau u_1+(1-\tau)\,u_2,\tau u_{1x}+(1-\tau)\,u_{2x},\tau u_{1xx}+(1-\tau)\,u_{2xx}\Big)\,d\tau,$$

$$A_2(t,x)=\int\limits_0^1 a_p(\ldots)\,d\tau, \quad A_3(t,x)=\int\limits_0^1 a_u(\ldots)\,d\tau.$$

В силу установленных оценок уравнение (36) можно рассматривать как линейное уравнение относительно $v(t,x)$ с ограниченными коэффициентами.

Применяя принцип экстремума для параболических уравнений к задаче (36), (37), получаем, что $v(t,x)\equiv 0$.

Априорные оценки, установленные выше, позволяют доказать разрешимость задачи. Действительно, обозначим через $H^{2+\beta}$, $\beta\in(0,1)$, банахово пространство функций $u(t,x)$ на Q, удовлетворяющих граничным условиям (37) и непрерывных вместе со своими ограниченными производными с нормой $|u|^Q_{H^{2+\beta}}=|u|^Q_\beta+|u_x|^Q_\beta+|u_{xx}|^Q_\beta$.

Рассмотрим следующую задачу относительно функции $v(t,x)$

$$v_t=(1-\tau)v_{xx}+\tau q v_{xx}+\tau\big[a(t,x,u,u_x,u_{xx})-qu_{xx}\big], \tag{38}$$

$$v(0,x)=0, \tag{39}$$

$$v_x(t,-l)=0, \quad v(t,-l)=v(t,l), \tag{40}$$

где $q>1$ — постоянная, $u\in H^{2+\beta}$.

Эта задача определяет в $H^{2+\beta}$ оператор

$$v=F(u;\tau), \tag{41}$$

неподвижные точки которого при $\tau=1$ являются решениями задачи (1)–(4).

Неподвижные точки u^τ есть решения уравнения

$$u^\tau_t=\tau a(t,x,u^\tau,u^\tau_x,u^\tau_{xx})+(1-\tau)u^\tau_{xx} \tag{42}$$

с условиями (2)–(4).

Уравнение (42) удовлетворяет всем условиям доказанных выше теорем, в которых были установлены априорные оценки для решения задачи (1)–(4).

Действительно проверим, например, выполнение условий А, Б:

А. Здесь $\tilde a=\tau a+(1-\tau)u_{xx}$,

$$\tilde{a_r}=\tau a_r+(1-\tau)\geqslant \tilde{a_0}>0;$$

Б.

$$\begin{aligned}\pm\tilde a\big(t,x,u,\xi+g(t),\mp K\xi^2\big)&=\pm\tau a\big(t,x,u,\xi+g(t),\mp K\xi^2\big)\pm(1-\tau)(\mp K\xi^2)\\&=\pm\tau a\big(t,x,u,\xi+g(t),\mp K\xi^2\big)-(1-\tau)K\xi^2\leqslant H.\end{aligned}$$

Докажем выполнение всех условий принципа Лерэ — Шаудера. Равномерная ограниченность в норме $H^{2+\beta}$ всех возможных решений u^τ (42), (2)–(4) дается теоремой 5 для линейных уравнений. Действительно, если функция $a(t,x,u,p,r)$ удовлетворяет условию Гёльдера по t с показателем $\frac{\beta}{2}$, по x с показателем β, а по остальным аргументам непрерывно дифференцируема, то свободный член в (42) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем β. Тогда $|v|^Q_{2+\beta} \leqslant C$.

Теперь докажем непрерывность $F(u;\tau)$ по u в $H^{2+\beta}$ для любого фиксированного τ. Как и в случае уравнение (1), выбирая два близких элемента u_1, u_2 из $H^{2+\beta}$ и соответствующие им v_1, v_2, находим

$$|v|^Q_{H^{2+\beta}} \leqslant |v|^Q_{2+\beta} \leqslant N_1|u_1 - u_2|_{H^{2+\beta}}.$$

Аналогично доказывается непрерывность $F(u;\tau)$ по τ. Действительно, пусть τ_1 и τ_2 соответствуют v_1, v_2, а $u(t,x) \in H^{2+\beta}$. Для $v = v_1 - v_2$ получается задача с граничным условиями (37) для уравнения $v_t = A_0 v_{xx} + A_1(t,x)(\tau_1 - \tau_2)$. Таким образом для линейных уравнений получаем $|v|^Q_{2+\beta} \leqslant N_2|\tau_1 - \tau_2|$. Чтобы доказать, что $F(u;\tau)$ вполне непрерывное преобразование для любого фиксированного τ, мы сначала приведем без доказательства лемму 2 [3, 6].

Лемма 2. *Пусть $\tau \in [0,1]$, $u(t,x) \in C^{2+\beta}(Q)$ и удовлетворяет уравнению*

$$u_t = \tau a(t,x,u,u_x,u_{xx}) + (1-\tau)\, u_{xx} \quad \text{в } Q. \tag{43}$$

Тогда $u_t \in C^{2+\beta}(Q)$, $u_{xxx} \in C^{\beta}(Q)$.

Отсюда вытекает, что постоянные Гёльдера по $(t,x) \in Q$ первого порядка функций u_{xx} (v_{xx}) ограничены, т. е. $|u|^Q_{2+1} \leqslant C$. Используя этот результат, можем заключить, что $|v(t,x)|^Q_{2+1} \leqslant C$, а множество таких v компактно в $H^{2+\beta}$. При $\tau = 0$ задача (43), (2)–(4) имеет единственное решение.

Таким образом, все условия принципа Лерэ — Шаудера выполнены. Следовательно, задача (43), (2)–(4) имеет решение и при $\tau = 1$. $\triangleright$

Литература

1. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.—М.: Физматлит, 1997.—320 с.
2. *Самарский А. А. и др.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений параболических уравнений.—М.: Наука, 1987.—477 с.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.—М.: Наука, 1967.—736 с.
4. *Кружков С. Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Тр. Моск. матем. общ-ва.—1967.—Т. 16.—С. 329–346.
5. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1979.—С. 217–272.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.—М.: Мир, 1968.—428 с.
7. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.—М.: Наука, 1985.—374 с.
8. *Худяев С. И.* Первая краевая задача для нелинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР.—1963.—Т. 149, № 3.—С. 535–538.
9. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301с.

Статья поступила 24 апреля 2013 г.

Тахиров Жозил Останович
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
зав. отделом «Неклассические уравнения математической физики»

УЗБЕКИСТАН, 100125, Ташкент, Дурмон йули, 29
E-mail: prof.takhirov@yahoo.com

Тураев Расул Нортожиевич
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
старший научный сотрудник отдела
«Неклассические уравнения математической физики»
УЗБЕКИСТАН, 100125, Ташкент, Дурмон йули, 29
E-mail: rasul.turaev@mail.ru

ON A NONLOCAL PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATION

Takhirov J. O., Turaev R. N.

A boundary problem for nonlinear parabolic equation with nonlocal boundary conditions is considered. Some a priori estimates are derived to establish the global existence of the solution. Uniqueness and existence theorems are proved.

Key words: non-local problem, apriori estimations, extremum principle, Hölder's condition, nonlinear parabolic equation, Shauder's principle, existence and uniqueness of solution.