Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 1, С. 68–79

УДК **517.982.23, 517.982.276**

КОНСТРУКЦИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ФУНКТОРА В КАТЕГОРИИ ПАР ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ С ОБЩИМ БАЗИСОМ

М. А. Шубарин

В статье строится семейство интерполяционных функторов в категории интерполяционных пар пространств Фреше с общим абсолютным базисом и изучаются его свойства. Доказывается, что для этого семейства выполняется аналог теоремы о реитерации. В терминах этого интерполяционного функтора описаны некоторые типы пространств Кёте.

Ключевые слова: интерполяция линейных операторов, интерполяционный функтор, диагональный оператор, пространство Кёте.

1. Постановка задачи

1.1. Классическая теория интерполяции линейных операторов, разработанная в работах Н. Ароншайна, Э. Гальярдо, Ж.-Л. Лионса, А. П. Кальдерона, С. Г. Крейна, в первую очередь ориентируется на изучение линейных операторов, действующих в банаховых пространствах (обзоры интерполяционной теории в банаховых пространствах см. в [4–6, 11]). Ограниченность применимости этой теории, в первую очередь, связана с тем, что множество пространств, интерполяционных между парой пространств Фреше, в общем случае сводится к следующим пространствам: пространствам, образующим пару, их сумме и пересечению. Таким свойством, например, обладает пара A_1 (= пространство функций, аналитических в единичном круге) и A_∞ (= пространство целых функций). Условия существования нетривиальных промежуточных и интерполяционных пространств для данной интерполяционной пары пространств Фреше были доказаны Н. Дойч [13].

Построение нетривиальной интерполяционной теории возможно, если сузить множество ограничений, налагаемых на промежуточное пространство в определении интерполяционного свойства [4, определение 4.2]. Для этого вместо рассмотрения всего пространства линейных непрерывных операторов, действующих в крайних пространствах, следует рассматривать его собственные подпространства. В качестве универсальной конструкции подобных подпространств можно взять пространство морфизмов в подходящей категории. Подобный подход к определению интерполяционного свойства рассматривался, например, в [9, 10].

В статье изучаются свойства интерполяционного функтора, определенного на категории интерполяционных пар пространств Кёте.

Приведем определения основных объектов, рассматриваемых в работе.

1.2. В статье будут рассматриваться только пространства Фреше, в которых существует непрерывная норма и монотонные наборы норм $(\|\cdot\|_p)$, задающие топологию в них. Последнее означает, что

$$(\forall\, p)\ (\exists\, q)\ (\exists\, C)\quad \|x\|_p \leqslant C\|x\|_q\quad (\forall\, x\in X).$$

Пусть X, Y — пространства Фреше. Будем писать $X\subset Y$, если X — векторное подпространство в Y и оператор вложения X в Y непрерывен.

Бесконечную матрицу $A=(a_{p,n})_{p,n\in\mathbb{N}}$ называют матрицей Кёте, если для произвольного p найдется число $C>0$ такое, что $0<a_{p,n}\leqslant Ca_{p+1,n}$ для всех n. Пространство Кёте $K(A)$, определяемое матрицей Кёте $A=(a_{p,n})_{p,n\in\mathbb{N}}$, определяется как векторное пространство

$$K(A):=\left\{x=(x_n):\ \forall\, p\ \ \|x\|_p:=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|a_{p,n}<+\infty\right\}.$$

Набор норм $(\|\cdot\|_p)$ определяет в $K(A)$ топологию пространства Фреше.

Матрицы Кёте $A=(a_{p,n})$ и $B=(b_{p,n})$ называют *эквивалентными*, если они определяют одно и то же пространство Кёте. Непосредственно проверяется, что эквивалентность матриц Кёте $A=(a_{p,n})$ и $B=(b_{p,n})$ равносильна следующему условию:

$$(\forall\, p)\ (\exists\, q=q(p))\ (\exists\, C>0)\quad a_{p,n}\leqslant Cb_{q,n},\ b_{p,n}\leqslant Ca_{q,n}\ (\forall\, n).$$

Пусть X — пространство Фреше, топология в котором определяется набором норм $(|\cdot|_p)$. Говорят, что последовательность $f=(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ элементов этого пространства является абсолютным базисом, если для произвольного $x\in X$ найдется единственная числовая последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$ такая, что

1) ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n f_n$ сходится к x в топологии пространства X;

2) $\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n|\ |f_n|_p<+\infty$ для произвольного p.

Последовательность $e=(e_n)_{n=1}^{+\infty}$, $e_n=(\delta_{k,n})_{k=1}^{+\infty}$ называют *последовательностью ортов.* Известно, что она является абсолютным базисом в произвольном пространстве Кёте. Всякое пространство Фреше, в котором есть абсолютный базис, изоморфно подходящему пространству Кёте.

1.3. В статье изучаются объекты теории интерполяции линейных операторов. Ниже приводятся необходимые определения из этой теории (которые цитируются по [4–6]).

Говорят, что пространства Фреше X_0 и X_1 образуют интерполяционную пару (которую обозначают через $\overline{X}$ или $[X_0,X_1]$), если существует отделимое локально выпуклое пространство, в которое пространства X_0 и X_1 вкладываются непрерывно.

На множестве всех интерполяционных пар определены две операции — сумма и пересечение интерполяционных семейств.

Определение 1. Пусть дана $\overline{X}=[X_0,X_1]$ — интерполяцинная пара пространств Фреше. Множество

$$X_0+X_1:=\left\{x_0+x_1:\ x_j\in X_j,\ j=0,1\right\}$$

называют *суммой семейства* $\overline{X}$.

Рассмотрим в $X_0\times X_1$ подпространство

$$L:=\{(x_0,x_1)\in X_0\times X_1:\ x_0+x_1=0\}.$$

Известно, что сумму $X_0 + X_1$ данного семейства можно отождествить с фактор-пространством $(X_0 \times X_1)/L$. Тогда каноническая сюръекция

$$k : X_0 \times X_1 \to (X_0 \times X_1)/L$$

индуцирует в $X_0 + X_1$ топологию пространства Фреше.

Определение 2. Пусть $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — интерполяцинная пара пространств Фреше. Пространство $X_0 \cap X_1$ называют *пересечением семейства* $\overline{X}$.

Пусть $[X_0, X_1]$ — интерполяционная пара пространств Фреше. Пространство Фреше X называют *промежуточным* между X_0 и X_1, если $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ с непрерывными операторами вложения.

Последовательность $f = (f_n)_{n=1}^{+\infty}$ будем называть *общим абсолютным базисом* в интерполяционной паре пространств Фреше $\overline{X} = [X_0, X_1]$, если эта последовательность является абсолютным базисом в пространствах $X_0 \cap X_1$, X_j, $j = 0, 1$, и $X_0 + X_1$.

Пусть даны интерполяционные пары пространств Фреше $\overline{X} = [X_0, X_1]$, $\overline{Y} = [Y_0, Y_1]$.

Определение 3. Пусть $T : X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ — линейный непрерывный оператор. Говорят, что оператор T действует из $\overline{X}$ в $\overline{Y}$, если для произвольного $j = 0, 1$ сужение $T\big|_{X_j}$ оператора T на пространство X_j непрерывно действует из X_j в Y_j, $j = 0, 1$. Множество всех линейных операторов, действующих из $\overline{X}$ в $\overline{Y}$, обозначим через $L(\overline{X}, \overline{Y})$.

2. Категории интерполяционных пар с общим абсолютным базисом

2.1. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторая категория, объектами в которой являются локально выпуклые пространства, а морфизмами — линейные непрерывные операторы, действующие в этих пространствах. Объекты категории $\mathfrak{K}$ будем называть $\mathfrak{K}$-*пространствами*.

Пример. Объектами категории $\mathfrak{Fr}$ являются всевозможные интерполяционные пары пространств Фреше, а множество морфизмов $L(X, Y) =: \mathfrak{Fr}(X, Y)$ совпадает с множеством линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах Фреше X, Y.

Определение 4. Категорией интерполяционных пар пространств Фреше с общим базисом будем называть произвольную категорию $\overline{\mathfrak{k}}$, если ее объектами являются пары вида $\tilde{X} = \langle \overline{X}, f \rangle$ (которые будем называть $\overline{\mathfrak{k}}$-парами с общим базисом) такие, что

1. $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — интерполяционная пара пространств Фреше с общим абсолютным базисом;
2. $f = (f_n)$ — общий абсолютный базис в паре $\overline{X} = [X_0, X_1]$.

Морфизмами в категории $\overline{\mathfrak{k}}$ являются диагональные операторы. Точнее, если $\tilde{X} = \langle \overline{X}, f \rangle$, $\tilde{Y} = \langle \overline{Y}, g \rangle$ — объекты категории $\overline{\mathfrak{k}}$, то морфизмами этой категории являются линейные непрерывные операторы $T : \overline{X} \to \overline{Y}$ такие, что $Tf_n = t_n g_n$ для произвольного n и подходящей числовой последовательности (t_n). Множество морфизмов категории $\overline{\mathfrak{k}}$ (действующих из $\tilde{X}$ в $\tilde{Y}$) обозначим через $\Delta_{f,g}(\overline{X}, \overline{Y})$.

Пример. Объектами категории $\overline{\mathfrak{fr}}$ являются пары вида $\tilde{X} = \langle \overline{X}, f \rangle$, в которых $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — произвольная пара пространств Фреше, имеющая общий абсолютный базис $f = (f_n)$.

Пример. Пусть $\overline{\mathfrak{kete}}$ — собственная подкатегория в $\overline{\mathfrak{fr}}$, образуемая произвольными парами вида $\tilde{X} = \langle \overline{X}, e \rangle$, в которой

1. $\overline{X} = [K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ — интерполяционная пара пространств Кёте;
2. $e = (e_n)$ — базис ортов.

Через $\overline{\mathfrak{kete}}_0$ обозначим собственную подкатегорию в $\overline{\mathfrak{kete}}$, объектами которой являются пары $[K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ такие, что $K(A^{(0)}) \supset K(A^{(1)})$.

В дальнейшем объекты $\langle [K(A^{(0)}), K(A^{(1)})], e\rangle$ и $[K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ будут отождествляться.

2.2. Предположим, что $\overline{\mathfrak{k}}$ — некоторая категория интерполяционных пар пространств Фреше с общим базисом.

Определение 5. Пусть $\tilde{X} = \langle [X_0, X_1], f\rangle$, $\tilde{Y} = \langle [Y_0, Y_1], g\rangle$ — объекты категории $\overline{\mathfrak{k}}$; пространства Фреше X, Y промежуточные, соответственно, между X_0 и X_1, Y_0 и Y_1. Будем говорить, что тройка $[X_0, X, X_1]$ является $\overline{\mathfrak{k}}$-интерполяционной относительно тройки $[Y_0, Y, Y_1]$, если для любого оператора $T \in \overline{\mathfrak{k}}(\overline{X}, \overline{Y})$ его сужение $T\big|_X$ на пространство X непрерывно действует из X в Y. Будем говорить, что пространство X является $\overline{\mathfrak{k}}$-интерполяционным между X_0 и X_1, если тройка $[X_0, X, X_1]$ $\overline{\mathfrak{k}}$-интерполяционна относительно самой себя.

Условие, при котором пространство Фреше (в частности, пространство Кёте) интерполяционно между пространствами, образующими объект категории $\overline{\mathfrak{fr}}$, найдено в [7, 8].

Теорема 1 [7, 8]**.** *Пусть $\langle [X_0, X_1], f\rangle$ — объект категории $\overline{\mathfrak{fr}}$ и пространство Фреше X такие, что*

1. *X — промежуточное между X_0 и X_1;*
2. *$X_0 \cap X_1$ — всюду плотное векторное подпространство в X.*

Кроме того, пусть $(\|\cdot\|_{j,p})$, $(\|\cdot\|_p)$ — наборы норм, задающие топологии соответственно в X_j, $j = 0, 1$, и X. Пространство X тогда и только тогда $\overline{\mathfrak{fr}}$-интерполяционно между X_0 и X_1, когда

$$(\forall\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N})\ (\exists\, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N})\ (\forall\, p)\ (\exists\, C_p > 0)$$
$$\|f_n\|_p\ \|f_n'\|_{\psi(p)}' \leqslant C \max_{\substack{r \leqslant \psi(p),\\ j=0,1}} \frac{\|f_n\|_{j,r}}{\|f_n\|_{j,\varphi(r)}} \quad (\forall\, n).$$

Здесь $(\|\cdot\|_p')$ — набор сопряженных норм в X:

$$\|x'\|_p' := \sup\big\{|x'(x)| :\ x \in X,\ \|x\|_p \leqslant 1\big\}, \quad x' \in X'.$$

Следствие 1 [7, 8]**.** *Предположим, что выполняются условия теоремы 1 и $X_1 \subset X \subset X_0$. Тогда f — безусловный базис в X. Если, кроме того, X_0 и X_1 — ядерные пространства Фреше, то X также ядерно и f — абсолютный базис в X.*

Следствие 2 [7, 8]**.** *Пусть выполняются условия теоремы 1. Пространство Кёте $K(A)$ тогда и только тогда $\overline{\mathfrak{kete}}$-интерполяционно между $K(A^{(0)})$ и $K(A^{(1)})$, когда*

$$(\forall\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N})\ (\exists\, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N})\ (\forall\, p)\ (\exists\, C_p > 0)$$
$$\frac{a_{r,n}}{a_{\psi(r),n}} \leqslant C \max_{\substack{r \leqslant \psi(p),\\ j=0,1}} \frac{a_{r,n}^{(j)}}{a_{\varphi(r),n}^{(j)}} \quad (\forall\, n).$$

3. Конструкция интерполяционных функторов

3.1. Пусть $\overline{\mathfrak{k}}$ — категория пространств Фреше с общим базисом. Ковариантный функтор F, действующий из $\overline{\mathfrak{k}}$ в $\mathfrak{Fr}$ будем называть $\overline{\mathfrak{k}}$-*интерполяционным функтором* (ср., например, [2, п. 13]; [3, определение 1.2.2]; [10, определение 2.4.3]), если

1) каждой интерполяционной $\mathfrak{k}$-паре $\langle [X_0, X_1], f\rangle$ он ставит в соответствие пространство Фреше, промежуточное между X_0 и X_1,

2) а каждому морфизму $T \in \overline{\mathfrak{k}}(\tilde X, \tilde Y)$ (где $\tilde X$, $\tilde Y$ — объекты данной категории) — морфизм $T\big|_X \in L(X, Y)$.

Из определения $\overline{\mathfrak{k}}$-интерполяционного функтора следует, что пространство $F(\langle [X_0, X_1], f\rangle)$ $\tilde{\mathfrak{k}}$-интерполяционно между X_0 и X_1.

Интерполяционные функторы в различных категориях пространств Фреше строились Ш. Н. Кадампаттой [2, 3], М. А. Шубариным [9, 10].

Через $\mathfrak{N}$ обозначим множество всех бесконечных семейств $\overline{\nu} = (\nu_k)$ таких, что ν_k — бесконечны для всех k, попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^{\infty} \nu_k = \mathbb{N}$.

Лемма 1. *Пусть $\overline{\nu} = (\nu_k) \in \mathfrak{N}$. Для произвольной бесконечной последовательности μ натуральных чисел выполняется только одно из следующих условий:*

1) $\mu \subset \nu_1 \cup \ldots \cup \nu_{k_0}$ для подходящего k_0;

2) в μ существует бесконечное подмножество $\{n_j\}$ такое, что $n_j \in \nu_{s(j)}$ и $s(j) \to +\infty$, $j \to +\infty$.

Построим интерполяционный функтор, конструкция которого носит комбинаторный характер.

Пусть $\overline{\nu} \in \mathfrak{N}$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{kete}_{\overline{\nu}}}$ собственную подкатегорию в $\overline{\mathfrak{kete}}$, объектами которой являются $\overline{\mathfrak{kete}}$-пары $[K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ такие, что

$$(\forall\, p)\ (\exists\, q = \psi_0(p) > p)\ (\exists\, C_p)\ (\forall\, k)\ (p < k \leqslant \psi_0(p))\ (\forall\, n \in \nu_k)$$
$$a^{(0)}_{p,n} \leqslant C_p a^{(1)}_{q,n}. \tag{1}$$

Непосредственно проверяется, что $\overline{\mathfrak{kete}}_0$ является собственной подкатегорией в $\overline{\mathfrak{kete}_{\overline{\nu}}}$.

Определение 6. Пусть $\overline{\nu} \in \mathfrak{N}$, $\overline{\mathfrak{kete}_{\overline{\nu}}}$-пара $\overline{X} = [K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$. Рассмотрим матрицу $a = (a_{p,n})$, определяемую следующим равенством:

$$a_{p,n} := \begin{cases} a^{(1)}_{p,n}, & n \in \nu_1 \cup \ldots \cup \nu_p, \\ a^{(0)}_{p,n}, & n \notin \nu_1 \cup \ldots \cup \nu_p. \end{cases} \tag{2}$$

Положим $\mathscr{F}(\overline{X}; \overline{\nu}) = \mathscr{F}(K(A^{(0)}), K(A^{(1)}); \overline{\nu}) := K(A)$.

Лемма 2. *Пусть*

1) $[K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ — объект категории $\overline{\mathfrak{kete}_{\overline{\nu}}}$;

2) $\tilde A^{(j)} = (\tilde a^{(j)}_{p,n})$, $A^{(j)} = (a^{(j)}_{p,n})$ — эквивалентные матрицы Кёте, $j = 0, 1$.

Если $(\tilde a_{p,n})$, $(a_{p,n})$ — матрицы, построенные с помощью формулы (2) соответственно по матрицам Кёте $\tilde A^{(0)}$, $\tilde A^{(1)}$ и $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, то матрицы $(\tilde a_{p,n})$ и $(a_{p,n})$ эквивалентны.

$\lhd$ Покажем, что при сделанных предположениях выполняются следующие условия:

$$(\exists\, \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})\ (\forall\, p)\ (\exists\, q = q(p) > p)\ (\exists\, C_p > 0)$$
$$a_{p,n} \leqslant C_p\, \tilde a_{\psi(p),n}, \tag{3}$$
$$\tilde a_{p,n} \leqslant C_p\, a_{\psi(p),n} \quad (\forall\, n). \tag{4}$$

Из условий леммы 2 и неравенства (1) следует существование возрастающей функции $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такой, что

$$(\forall\, k)\ (p < k \leqslant \varphi(p))\ (\forall\, n \in \nu_k) \quad a^{(0)}_{p,n} \leqslant R_p \tilde a^{(1)}_{\varphi(p),n}, \tag{5}$$
$$(\forall\, n) \quad a^{(0)}_{p,n} \leqslant R_p \tilde a^{(0)}_{\varphi(p),n}, \tag{6}$$
$$(\forall\, n) \quad a^{(1)}_{p,n} \leqslant R_p \tilde a^{(1)}_{\varphi(p),n}. \tag{7}$$

Покажем, что условия (3) выполняются, если $\psi(\cdot) = \varphi(\cdot)$.

Предположим, что существует p_0 такое, что множество $\nu := \{n : a_{p_0,n} > R_{p_0}\, a^{(*)}_{\varphi(p_0),n}\}$ бесконечно. Если существует k_0 такое, что множество $\nu \cap \nu_{k_0}$ бесконечно, то из определения матриц $(a_{p,n})$, $(\tilde{a}_{p,n})$ следует, что

$$
\begin{gathered}
a^{(1)}_{p_0,n} > R_{p_0}\, \tilde{a}^{(1)}_{\varphi(p_0),n}, \text{ если } \ k_0 \leqslant p_0,\\
a^{(0)}_{p_0,n} > R_{p_0}\, \tilde{a}^{(1)}_{\varphi(p_0),n}, \text{ если } \ p_0 < k_0 \leqslant \varphi(p_0),\\
a^{(0)}_{p_0,n} > R_{p_0}\, \tilde{a}^{(0)}_{\varphi(p_0),n}, \text{ если } \ \varphi(p_0) < k_0
\end{gathered}
$$

для произвольного $n \in \nu \cap \nu_{k_0}$. Полученные неравенства противоречат условиям (5), (6), (7). Но тогда из ν можно выбрать подпоследовательность $\nu' = (n_j)$ такую, что $n_j \in \nu_{k(j)}$ и $k(j) \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Снова получается противоречие: $a^{(0)}_{p_0,n_j} > R_{p_0}\, \tilde{a}^{(0)}_{\varphi(p_0),n_j}$ для всех достаточно больших j.

Таким образом, неравенство (3) доказано, условие (4) доказывается аналогично. $\rhd$

Теорема 2. *Отображение $\overline{X} \mapsto \mathscr{F}(\overline{X}; \overline{\nu})$ определяет $\overline{\mathfrak{kete}}_{\overline{\nu}}$-интерполяционный функтор.*

$\lhd$ Фиксируем $\overline{\mathfrak{kete}}_{\overline{\nu}}$-пары $[K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ и $[K(B^{(0)}), K(B^{(1)})]$. В силу леммы 2 всегда можно считать, что матрицы Кёте, определяющие эти пространства, удовлетворяют следующим условиям $a^{(j)}_{p,n} \leqslant a^{(j)}_{p+1,n}$, $b^{(j)}_{p,n} \leqslant b^{(j)}_{p+1,n}$ для всех $j = 0, 1$, p и n. Будем считать, что матрицы $(a_{p,n})$, $(b_{p,n})$ построены соответственно по парам матриц $A^{(0)}$, $A^{(1)}$ и $B^{(0)}$, $B^{(1)}$ по формуле (2).

Если $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — произвольная возрастающая последовательность такая, что $\varphi(p) > p$ для произвольного p. Предположим, что последовательность ψ_0 определяется условием (1). Рассмотрим последовательность ψ, определяемую равенством $\psi(p) := \varphi(\psi_0(p))$. Из определения 6 следует, что

$$
\frac{b_{p,n}}{a_{\psi(p),n}} = \begin{cases} \dfrac{b^{(1)}_{p,n}}{a^{(1)}_{\psi(p),n}}, & k \leqslant p;\\[2mm] \dfrac{b^{(0)}_{p,n}}{a^{(1)}_{\psi(p),n}}, & p < k \leqslant \psi(p);\\[2mm] \dfrac{b^{(0)}_{p,n}}{a^{(0)}_{\psi(p),n}}, & \psi(p) < k. \end{cases}
$$

Поэтому из (1) следует (постоянная C_p определяется условием (1)), что

$$
\frac{b^{(0)}_{p,n}}{a^{(1)}_{\psi(p),n}} \leqslant C_p \frac{b^{(1)}_{\psi_0(p),n}}{a^{(1)}_{\varphi(\psi_0((p)),n}} \leqslant C_p \max_{r \leqslant \psi_0(p)} \frac{b^{(1)}_{r,n}}{a^{(1)}_{\varphi(r),n}} \leqslant C_p \max_{r \leqslant \psi(p)} \frac{b^{(1)}_{r,n}}{a^{(1)}_{\varphi(r),n}}
$$

для произвольных p, k и $n \in \nu_k$ таких, что $p < k \leqslant \varphi(p)$. Но тогда

$$
\frac{b_{p,n}}{a_{\psi(p),n}} \leqslant \max_{j=0,1} \frac{b^{(j)}_{p,n}}{a^{(j)}_{\psi(p),n}} \leqslant \max_{j=0,1, r \leqslant \psi(p)} \frac{b^{(j)}_{r,n}}{a^{(j)}_{\varphi(r),n}}.
$$

Из полученного неравенства и следствия 2 получается $\overline{\mathfrak{kete}}_{\overline{\nu}}$-интерполяционность $[K(A^{(0)}), K(A^{(0)})]$ относительно $[K(B^{(0)}), K(B^{(0)})]$. $\rhd$

Лемма 3. *Если* $[K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ — *объект категории* $\overline{\mathfrak{kete}}_{\overline{\nu}}$, *то*

i) *матрица* $(a_{p,n})$, *определяемая формулой* (2) *по матрицам Кёте* $(a^{(j)}_{p,n})$, *также является матрицей Кёте;*

ii) $\mathscr{F}(\overline{X};\overline{\nu})$ — *пространство Фреше, промежуточное между* X_0 *и* X_1;

iii) $f = (f_n)$ — *абсолютный базис в* $\mathscr{F}(\overline{X};\overline{\nu})$.

Пусть $\nu \subset \mathbb{N}$. Базисным подпространством в $K(A)$, построенном по множеству ν (которое обозначают через $K(A;\nu)$), называют *замыкание* в $K(A)$ линейной оболочки, натянутой на семейство $(e_n)_{n\in\nu}$.

Лемма 4. *Предположим, что* $\overline{\mathfrak{kete}}_{\overline{\nu}}$*-пара* $\overline{X} = [K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ *такая, что в пространствах* $K(A^{(0)})$ *и* $K(A^{(1)})$ *нет нормируемых бесконечномерных базисных подпространств. Тогда и в пространстве* $\mathscr{F}(\overline{X};\overline{\nu})$ *нет нормируемых бесконечномерных базисных подпространств. В частности, это пространство ненормируемо.*

$\lhd$ Предположим, что при сделанных предположениях в пространстве $K(B) := \mathscr{F}(K(A^{(0)}), K(A^{(1)});\overline{\nu})$ существует нормируемое подпространство $K(B;\nu)$. В этом случае найдется p_0 такое, что множество $\nu_q := \{n \in \nu : b_{q,n} < b_{p_0,n}\}$ бесконечно для произвольного q. По построению $\nu_{q+1} \subset \nu_q$. Применяя диагональный метод, построим последовательность $\eta = (n_j)$ такую, что $b_{q,n_j} < C_q b_{p_0,n_j}$ для произвольного q подходящего числа $C_q > 0$ и произвольного j.

Предположим, что $\eta \cap \nu_{k_0}$ бесконечно для некоторого k_0. Всегда можно считать, что $p_0 > k_0$ и $\eta \subset \nu_{k_0}$. Искомое противоречие получается из следующего неравенства: $a^{(1)}_{q,n_j} \leqslant C_q a^{(1)}_{p_0,n_j}$ для произвольного $q > k_0$, из которого в свою очередь следует, что пространство $K(A^{(1)};\eta)$ нормируемо.

Поэтому $\eta \cap \nu_q$ конечно для любого q. Всегда можно считать, что $n_j \in \nu_{k(j)}$ и $k(j) \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Тогда $a^{(0)}_{q,n_j} \leqslant C_q a^{(0)}_{p_0,n_j}$ для произвольного q и всех j, начиная с некоторого места. В этом случае нормируемо пространство $K(A^{(1)};\eta)$, а это противоречит предположению.

Таким образом доказана ненормируемость пространства $K(B;\nu)$ для произвольного бесконечного множества $\nu \subset \mathbb{N}$. $\rhd$

3.2. Введем в $\mathfrak{N}$ бинарные отношения $\prec$ (отношение частичного порядка) и $\approx$ (отношение эквивалентности). Пусть $\overline{\nu_j} = (n_{j,k}) \in \mathfrak{N}$, $j = 0, 1$. Будем писать $\overline{\nu_0} \prec \overline{\nu_1}$, если

$$(\forall\, k)\,(\exists\, m = m(k)) \quad \nu_{0,k} \subset \nu_{1,1} \cup \ldots \cup \nu_{1,m},$$

и $\overline{\nu_0} \approx \overline{\nu_1}$, если $\overline{\nu_1} \prec \overline{\nu_0}$ и $\overline{\nu_0} \prec \overline{\nu_1}$.

Лемма 5. *Если* $\overline{\nu_0} \prec \overline{\nu_1}$, *то*

$$\mathscr{F}(\overline{X};\overline{\nu_1}) \subset \mathscr{F}(\overline{X};\overline{\nu_0}) \tag{8}$$

для произвольной $\overline{\mathfrak{kete}}_0$*-пары* $\overline{X}$. *Обратно, если непрерывное вложение* (8) *имеет место для произвольной* $\overline{\mathfrak{kete}}_0$*-пары* $\overline{X}$, *то* $\overline{\nu_0} \prec \overline{\nu_1}$.

$\lhd$ Фиксируем $\overline{\mathfrak{kete}}_0$-пару $[K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$. Обозначим через $K(A)$ и $K(B)$ соответственно правую и левую часть вложения (8). Условие (8) эквивалентно следующему условию:

$$(\forall\, p)\,(\exists\, q)\,(\exists\, C)\,(\forall\, n) \quad b_{p,n} \leqslant C a_{q,n}. \tag{9}$$

Пусть $\overline{\nu_0} \prec \overline{\nu_1}$. Предположим, что условие (9) не выполняется. Из леммы 3 следует, что найдутся последовательность индексов $\nu = (n_j)$ и p_0 такие, что для произвольного q неравенство $a_{q,n_j} \leqslant 2^{-1} b_{p_0,n_j}$ выполняется для всех j, возможно начиная с некоторого.

Предположим, что $\nu \subset \nu_{1,1} \cup \ldots \cup \nu_{1,m_0}$ для подходящего m_0. Всегда можно считать, что $m_0 < p_0$. Получается противоречие: $a^{(1)}_{p_0,n_j} \leqslant 2^{-1} a^{(1)}_{p_0,n_j}$.

Поэтому $\nu \not\subset \nu_{1,1} \cup \ldots \cup \nu_{1,m}$ для произвольного m. Тогда в ν существует подпоследовательность $\nu' = (m_j)$ такая, что $m_j \in \nu_{1,k(j)}$ и $k(j) \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Но тогда опять получается противоречие: $a^{(0)}_{p_0,n_j} \leqslant 2^{-1} a^{(0)}_{p_0,n_j}$.

Пусть $\nu_0 \not\prec \nu_1$. При сделанном предположении найдется последовательность индексов $\nu = (n_j)$ такая, что $\nu \subset \nu_{0,k_0}$ для некоторого k_0 и $n_j \in \nu_{1,s(j)}$, $s(j) \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Тогда из (9) следует, что

$$(\forall\, p)\, (\exists\, q)\, (\exists\, C)\, (\forall\, j) \quad a^{(1)}_{p,n_j} \leqslant C a^{(0)}_{q,n_j}.$$

При надлежащем выборе пространств $K(A^{(j)})$ полученное неравенство не выполняется. $\rhd$

Следствие 3. *Следующие условия равносильны:*

1) $\overline{\nu_0} \approx \overline{\nu_1}$;

2) $\mathscr{F}(\overline{X}; \nu_0) = \mathscr{F}(\overline{X}; \nu_1)$ *для произвольной* $\overline{\mathfrak{kete}}_0$ *-пары* $\overline{X}$.

Таким образом пространство $\mathscr{F}(\overline{X}; \overline{\nu})$ однозначно (с точностью до отношения эквивалентности $\approx$) определяется парой пространств $\overline{X}$.

3.3. Вычислим пространство $\mathscr{F}(\overline{X}, \overline{\nu})$ для конкретных пар пространств Кёте $\overline{X}$. Предполагается, что $a = (a_n)$ — бесконечная большая последовательность положительных чисел, $\lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_n \in (0, 1]$, $\mu = (\mu_n)$, $\mu_n \geqslant 1$.

1) $E_\delta(\lambda, a) := K(A)$, $\delta \in (-\infty, +\infty]$, $\delta_p \uparrow \delta$, $a_{p,n} = \exp(\delta_p + \lambda_n) a_n$;

2) $E_\delta(a) := E_\delta(\nu, a)$, $\nu_n \equiv 0$;

3) $E(\lambda, a) := K(A)$, где $a_{p,n} = \exp(-\frac{1}{p} + \lambda_n p) a_n$;

4) $F(\mu, a) := K(A)$, где $a_{p,n} = \exp(-\frac{1}{p} + \min(\mu_n, p)) a_n$;

5) $\tilde{E}(\mu, a) := K(A)$, где $a_{p,n} = \exp(-\frac{1}{p} + \max(\mu_n, p)) a_n$.

Пространства $E(\lambda, a)$ и $F(\mu, a)$ (называемые степенными пространствами первого и второго рода) были введены и изучались в работах В. П. Захарюты (обзор известных результатов и нерешенных проблем, связанных с пространствами этих типов см. в [12, 14]).

Лемма 6. *Пространства* $E(\lambda, a)$ *и* $\tilde{E}(\lambda^{-1}, a)$ *(где* $\lambda^{-1} := (\lambda_n^{-1})$*) изоморфны.*

$\lhd$ Утверждение следует из того, что отображение $T : E(\lambda, a) \to \tilde{E}(\lambda^{-1}, a)$, $Te_n := \exp(-\lambda_n^{-1}) e_n$ продолжается до изоморфизма рассматриваемых пространств. $\rhd$

Степенные пространства первого и второго рода допускают несколько интерпретаций в рамках интерполяционной теории.

Лемма 7. *При сделанных предположениях*

$$\tilde{E}(\mu, a) = E_0(\mu, a) \cap E_\infty(a), \quad F(\mu, a) = E_0(\mu, a) + E_\infty(a).$$

Искомые равенства следуют из соотношений

$$K(A^{(0)}) \cap K(A^{(1)}) = K(A), \quad A = \Big(\max_{j=0,1} a^{(j)}_{p,n} \Big),$$
$$K(A^{(0)}) + K(A^{(1)}) = K(A), \quad A = \Big(\min_{j=0,1} a^{(j)}_{p,n} \Big),$$

выполняющихся для любой пары пространства Кёте $[K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$.

Лемма 8. *Пусть дана возрастающая последовательность* (Δ_k) *такая, что множества* $\nu_k := \{n : \Delta_k \leqslant \mu_n < \Delta_{k+1}\}$ *бесконечны,* $\Delta_k > k$ *для любого* k, $\Delta_1 = 1$. *Тогда* $\overline{\nu} = (\nu_k) \in \mathfrak{N}$ *и*

$$\mathscr{F}(E_\infty(a), E_0(\mu, a); \overline{\nu}) = F(\mu, a); \quad \mathscr{F}(E_0(\mu, a), E_\infty(a); \overline{\nu}) = \tilde{E}(\mu, a).$$

$\lhd$ Покажем, что $[E_\infty(a), E_0(\mu, a)]$ есть объект категории $\overline{\mathfrak{kete}}_{\overline{\nu}}$. Для произвольных p, k, $p < k$ и $n \in \nu_k$ верно неравенство

$$p - 1/p < \Delta_p - 1/q < \Delta_k - 1/q \leqslant \mu_n - 1/q,$$

где $q > p$ выбрано так, что $\Delta_p - p > 1/q - 1/p$. Заметим, что это пара не будет объектом категории $\overline{\mathfrak{kete}}_0$.

Докажем первое равенство. Обозначим через $K(A)$ левую часть доказываемого равенства. Из определения следует, что $K(A) = \Phi_h(a)$, где

$$h_p(n) = \begin{cases} \mu_n - 1/p, & n \in \nu_1 \cup \ldots \cup \nu_p; \\ p, & n \notin \nu_1 \cup \ldots \cup \nu_p. \end{cases}$$

Покажем, что $F(\mu, a) \subset K(A)$. Предположим, что это не так. Тогда существует p_0 такое, что множество $N_q := \{n : \min(\mu_n, q) - 1/q \leqslant h_{p_0}(n)\}$. По построению $N_{q+1} \subset N_q$. Применяя диагональный метод, построим бесконечную последовательность $\nu = (n_j)$ такую, что $\min(\mu_{n_j}, q) - 1/q \leqslant h_{p_0}(n_j)$ для произвольного q и всех j, начиная с некоторого $j_0(q)$.

Предположим, что $\nu \subset \nu_1 \cup \ldots \cup \nu_{k_0}$. Всегда можно считать, что $k_0 = p_0$. Тогда $\mu_{n_j} - 1/q \leqslant \mu_{n_j} - 1/p_0$ для произвольных $q > k_0$ и $j > j_0(q)$. Получается противоречие.

Но тогда из леммы 1 следует существование в ν подпоследовательности (m_j) такой, что $m_j \in \nu_{s(j)}$ и $s(j) \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Опять получается противоречие: $q - 1/q \leqslant p_0 - 1/p_0$ для любого $q > k_0$. Таким образом доказывается непрерывность вложения $F(\mu, a) \subset K(A)$. Непрерывность обратного вложения $K(A) \subset F(\mu, a)$ доказывается аналогично. $\rhd$

4. Теорема о реитерации

4.1. Для классических интерполяционных методов (вещественного и комплексного метода) доказывается ряд фундаментальных фактов (в первую очередь, теоремы плотности, двойственности и реитерации, обзоры известных фактов содержатся в [5]), делающие эти методы достаточно гибкими и удобными для дальнейшего применения. Для построенного в предыдущем пункте интерполяционного функтора теорема о плотности тривиализуется, так как этот метод применяется к пространствам с общим абсолютным базисом. Теорема двойственности в принципе не может быть сформулирована для этого метода, так как пространство, сопряженное к ненормируемому пространству Фреше, не метризуемо.

Пусть $\overline{X} = [K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ — пара пространств Кёте такая, что $K(A^{(0)}) \supset K(A^{(1)})$. Для произвольного семейства $\overline{\nu} = (\nu_k) \in \mathfrak{N}$, $\overline{\nu_j} = (\nu_{j,k}) \in \mathfrak{N}$ рассмотрим пространства $K(B^{(j)}) := \mathscr{F}(\overline{X}, \overline{\nu_j})$ и $K(B) := \mathscr{F}([K(B^{(0)}), K(B^{(1)})], \overline{\nu})$. Из определения 6 следует, что

$$b_{p,n} := \begin{cases} a^{(1)}_{p,n}, & n \in N^{(1)}; \\ a^{(0)}_{p,n}, & n \in N^{(0)} \end{cases} \tag{10}$$

для произвольных p, n и

$$\begin{aligned} N_p^{(1)} &:= \bigcup_{k\leqslant p, s\leqslant p} (\nu_k \cap \nu_{1,s}) \bigcup \bigcup_{k>p, s\leqslant p} (\nu_k \cap \nu_{0,s}), \\ N_p^{(0)} &:= \bigcup_{k\leqslant p, s>p} (\nu_k \cap \nu_{1,s}) \bigcup \bigcup_{k>p, s>p} (\nu_k \cap \nu_{0,s}). \end{aligned} \tag{11}$$

Из леммы 5 следует, что $K(B^{(1)}) \subset K(B^{(0)})$. К паре $[K(B^{(0)}), K(B^{(1)})]$ применим функтор $\mathscr{F}(\cdot;\nu)$ и пространство $K(B)$ определено корректно.

Пусть $\overline{\mathfrak{k}}$ — категория пар пространств Фреше с общим базисом. Будем говорить, что в категории $\overline{\mathfrak{k}}$ для функтора $\mathscr{F}(\cdot,\cdot)$ выполняется теорема о реитерации, если для любой $\overline{\mathfrak{k}}$-пары $[K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$ и произвольных семейств $\overline{\nu_j} \in \mathfrak{N}$ (таких, что $\overline{\nu_0} \prec \overline{\nu_1}$) и $\overline{\nu} \in \mathfrak{N}$ найдется семейство $\overline{\eta} \in \mathfrak{N}$ (определяемое только семействами $\overline{\nu}$, $\overline{\nu_0}$ и $\overline{\nu_1}$) такое, что $K(B) = \mathscr{F}(\overline{X};\eta)$.

Лемма 9. *Из определения семейств $N_p^{(j)}$ следует, что для произвольного p*

1) $N_p^{(0)} \cap N_p^{(1)} = \varnothing$, $N_p^{(0)} \cup N_p^{(1)} = \mathbb{N}$;

2) $\bigcap\limits_p N_p^{(0)} = \varnothing$, $\bigcup\limits_p N_p^{(1)} = \mathbb{N}$.

Лемма 10. *Пусть $\overline{\nu_0} \prec \overline{\nu_1}$. Для произвольного p найдется $q = q(p) > p$ такое, что все элементы множества $N_p^{(1)}$, возможно, за исключением конечного числа, содержатся в $N_q^{(1)}$.*

$\lhd$ Пусть $\overline{\nu_0} \prec \overline{\nu_1}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\nu_{0,1} \subset \nu_{1,1} \cup \dots \cup \nu_{0,k+1}$. Из (11) следует, что

$$\begin{aligned} N_p^{(1)} &= \bigcup_{k\leqslant p,\, s\leqslant p} (\nu_k \cap \nu_{1,s}) \bigcup \bigcup_{k>p,\, s\leqslant p} (\nu_k \cap \nu_{0,s}) \\ &= \bigcup_{k\leqslant p,\, s\leqslant p} (\nu_k \cap \nu_{1,s}) \bigcup \bigcup_{k>p+1,\, s\leqslant p} (\nu_k \cap \nu_{0,s}) \bigcup \bigcup_{s\leqslant p} (\nu_{p+1} \cap \nu_{0,s}) \\ &\subset \bigcup_{k\leqslant p,\, s\leqslant p} (\nu_k \cap \nu_{1,s}) \bigcup \bigcup_{k>p+1,\, s\leqslant p} (\nu_k \cap \nu_{0,s}) \\ &\quad \bigcup \bigcup_{s\leqslant p} (\nu_{p+1} \cap (\nu_{1,1} \cup \dots \nu_{1,s+1})) \subset N_{p+1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Поэтому $N_p^{(1)} \subset N_{p+1}^{(1)}$.

Предположим, что найдется p_0 такое, что множество $N_p^{(1)} \setminus N_{p_0}^{(1)}$ конечно для произвольного p. Отсюда и из (10) следует нормируемость пространства $K(B)$ вне зависимости от выбора пространств $K(A^{(0)})$ и $K(A^{(1)})$.

Применим функторы $\mathscr{F}(\cdot, \overline{\nu_0})$ и $\mathscr{F}(\cdot, \overline{\nu_1})$ к паре $[E_0(a), E_\infty(a)]$ (в которой $a_n \to +\infty$, $n \to +\infty$). В силу леммы 4 пространства $K(B^{(j)}) = \mathscr{F}(E_0(a), E_\infty(a), \overline{\nu_j})$ ненормируемы. Но тогда из леммы 4 следует ненормируемость пространства $K(B) = \mathscr{F}(K(B^{(0)}), K(B^{(1)}), \overline{\nu_j})$, что противоречит сделанному выше заключению.

Теперь можно сформулировать и доказать искомое утверждение:

Теорема 3. *В категории $\overline{\mathfrak{kete}}_0$ для функтора $\mathscr{F}(\cdot,\cdot)$ выполняется теорема о реитерации.*

$\lhd$ Возьмем произвольную $\overline{\mathfrak{kete}}_0$-пару $[K(A^{(0)}, K(A^{(0)}]$.

Из леммы 9 следует существование последовательности $(q(p))$ такой, что множество $\eta_1 := N^{(1)}_{q(1)}$, $\eta_k := N^{(1)}_{q(k+1)} \setminus N^{(1)}_{q(k)}$, $k > 1$, бесконечно. По построению $\overline{\eta} = (\eta_k) \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим матрицы Кёте $B = (b_{p,n})$, $\tilde{B} = (\tilde{b}_{p,n})$, первая из которых определяется равенством (10) по семействам $\overline{\nu} = (\nu_k) \in \mathfrak{N}$, $\overline{\nu_j} = (\nu_{j,k}) \in \mathfrak{N}$, а вторая — следующим равенством

$$\tilde{b}_{p,n} := \begin{cases} a^{(1)}_n, & n \in \eta_1 \cup \cdots \cup \eta_p, \\ a^{(0)}_n, & n \notin \eta_1 \cup \cdots \cup \eta_p. \end{cases}$$

Из определения семейства $\eta = (\eta_k) \in \mathbb{N}$ следует, что $K(B) = K(\tilde{B})$.

Учитывая произвольность пары $[K(A^{(0)}, K(A^{(1)}]$, этими рассуждениями доказывается утверждение теоремы.

Литература

1. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов.—М.: Мир, 1972.—259 с.
2. *Кадампатта С. Н.* Шкалы локально выпуклых пространств и продолжаемые базисы в пространствах аналитических функций: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов н/Д, 1984.—250 с.
3. *Кадампатта С. Н.* Шкалы пространств аналитических функций // Изв. СКНЦ ВШ.—1975.—№ 4.—С. 64–68.
4. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—400 с.
5. *Крейн С. Г., Семенов Е. М., Брудный Ю. А.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ.—М.: ВИНИТИ, 1986.—Т. 24.—С. 3–164.
6. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.—М.: Мир, 1980.—664 с.
7. *Шубарин М. А.* Условия интерполяционности для семейств пространств Фреше // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 2.—С. 57–65.
8. *Шубарин М. А.* Классы пространств, порождаемые интерполяцией диагональных операторов // Изв. вузов Сев. Кавк. региона. Сер. естеств. науки.—2006.—№ 1.—С. 24–26.
9. *Шубарин М. А.* Обобщенная теоремаАроншайна — Гальярдо.—М., 2007. Деп. в ВИНИТИ, № 446-В2007.
10. *Шубарин М. А.* Продолжение интерполяционных функторов в различных категориях пространств Фреше // Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008.—С. 229–238.—(Мат. форум. ЮФО. Т. 1).
11. *Arouszajn N., Gagliardo E.* Interpolation spaces and interpolation methods // Ann. Mat. Pur. Appl.—1965.—Vol. 68, ser. 4.—P. 51–117.
12. *Aytuna A., Djakov P. B., Goncharov A. P., Terzioğlu T., Zahariuta V. P.* Some open problem in the theory of locally convex spaces // Linear Topological Spaces and Complex Analysis I.—Ankara: Metu-Tübitak, 1994.—P. 147–165.
13. *Deutsch N.* Interpolation dans les espaces vectorieles topologiques localement convexes // Mémoires de la Société Mathématique de France.—1968.—Vol. 13.—P. 3–187.
14. *Zahariuta V.* Linear topologic invariants and their applications to isomorphic classification of generalized power spaces // Turkish J. Math.—1996.—Vol. 20.—P. 237–289.

Статья поступила 22 мая 2013 г.

Шубарин Михаил Александрович
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: mas102@mail.ru

CONSTRUCTION OF THE INTERPOLATION FUNCTOR IN THE CATEGORY OF FRESCHET SPACES WITH COMMON BASIS

Shubarin M. A.

A family of interpolating functors in the category of pairs of Frechet spaces with common absolute basis is constructed and its properties are studied. A reiteration type theorem is proved for this family. In terms of this interpolation functor some types of Köthe spaces are described.

Key words: interpolations linear operators, interpolation functors, diagonal operators, Köthe spaces.