Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 2, С. 79–89

УДК **517.9**

ОБ ОБРАЩЕНИИ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Чшиев

В настоящей работе исследуются полугруппы линейных отношений в банаховом пространстве, полученные путем обращения полугрупп линейных ограниченных операторов различного класса. В качестве основного инструмента исследования полугруппы линейных отношений используется понятие траектории точки. Используется общее определение генератора полугруппы линейных отношений.

Ключевые слова: полугруппа линейных отношений, полугруппа линейных операторов, генератор полугруппы, линейное отношение.

Введение. Как известно, при обращении полугруппы линейных ограниченных операторов в общем случае возникает семейство линейных отношений, обладающее полугрупповым свойством, т. е. *полугруппа линейных отношений*. Как математический объект полугруппа линейных отношений является малоизученным. С другой стороны, появились работы (например, [1]), которые непостредственно «связаны» с полугруппами линейных отношений. Таким образом, возникает необходимость в формулировке соответствующих определений и поиске приложений и эффективных инструментов исследования полугрупп линейных отношений. В этой связи, обоснованным является исследование полугруппы линейных отношений, полученной при обращении вырожденной полугруппы линейных ограниченных операторов. Стоит отметить, что определение и некоторые результаты для полугрупп линейных отношений содержатся в работе [1]. Стоит также отметить работу [2], где вводится определение и получен ряд результатов относительно полугрупп неограниченных операторов, которые являются частным случаем полугрупп линейных отношений.

Условие, когда оператор $-A$ порождает полугруппу операторов выполняется для сильно некорректных задач типа задачи Коши для уравнения теплопроводности в обратном направлении времени. В работах [3–5] некорректные задачи с оператором A решаются методами квазиобращения, вспомогательных граничных условий. В работе [6] указываются условия разрешимости и единственности решения в пространстве обобщенных функций для случая, когда $-A = A^*$. В настоящей работе для генератора полугруппы операторов $\mathscr{A}$ показано при каких условиях отношение $-\mathscr{A}$ является генератором обращенной полугруппы.

Как инструмент исследования полугрупп линейных отношений в работе используется понятие *траектории точки*. Показано, что каждая точка из *области определения полугруппы* линейных отношений может иметь две и более траектории. Траектория, непрерывная в нуле называется *основной*. Доказана единственность основной траектории для точек из области определения полугруппы. Свойства гладкости полугруппы линейных отношений определяются посредством основной траектории точки.

Используемые ниже понятия из теории линейных отношений, а также приложения спектральной теории линейных отношений к исследованию полугрупп операторов можно найти в монографиях [7, 8], а также в статьях [9–16]. Следует отметить, что определение спектра и первые результаты по теории линейных отношений были получены в статье Аренса [17].

1. Полугруппа линейных отношений. Пусть X — комплексное банахово пространство. Через $\operatorname{End} X$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в X. Множество всех линейных отношений на X обозначим через $LR(X)$, а множество замкнутых линейных отношений на X обозначим через $LCR(X)$. Множество линейных операторов, действующих в пространстве X, обозначим через $LO(X)$. Таким образом, при отождествлении оператора с его графиком, имеют место следующие включения: $\operatorname{End} X \subset LO(X) \subset LCR(X) \subset LR(X)$.

Определение 1.*Полугруппой линейных отношений на подпространстве* $X_0 \subset X$ называется функция $S : (0, \infty) \to LR(X)$ со свойством $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, $t, s > 0$, для любого $x \in X_0$. Функция S называется *полугруппой линейных отношений*, если $X_0 = X$.

Для полугруппы S введем следующие подпространства:

$\operatorname{Im} S = \bigcup\limits_{t>0} \operatorname{Im} S(t)$ — *образ* полугруппы;

$\operatorname{Ker} S = \bigcap\limits_{t>0} \operatorname{Ker} S(t)$ — *ядро* полугруппы;

$S0 = \bigcap\limits_{t>0} S(t)0$ — *образ нуля* полугруппы,

где через $\operatorname{Im} S(t), \operatorname{Ker} S(t)$ и $S(t)0$ обозначены соответственно образ, ядро и образ нуля отношения $S(t)$, $t > 0$.

2. Мотивация к изучению. 1. Для абстрактной задачи Коши $x(t_0) = x_0$ для дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$ рассмотрим три постановки:

1) Пусть $t_0 = 0$. Требуется продолжить решение $x : [0, \infty) \to X$ задачи на всю числовую прямую $\mathbb{R}$ (см., например, [18]).

2) Пусть $t_0 > 0$ и фиксированно. Требуется найти решение $x : [0, \infty) \to X$. В данном случае значение искомой функции задано в промежуточной точке.

3) Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и фиксированно. Требуется найти решение $x : [0, \infty) \to X$ данной неавтономной задачи Коши.

2. Пусть $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : s \leqslant t\}$. Отображение $\mathscr{U} : \Delta \to \operatorname{End} X$ называется сильно непрерывным *семейством эволюционных операторов «вперед»*, если выполнены следующие условия:

1) $\mathscr{U}(t, t) = I$ — тождественный оператор для любого $t \in \mathbb{R}$;

2) $\mathscr{U}(t, s)\mathscr{U}(s, h) = \mathscr{U}(t, h)$, $h \leqslant s \leqslant t$;

3) отображение $(t, s) \mapsto \mathscr{U}(t, s)\, x : \Delta \to X$ непрерывно для любого $x \in X$;

4) существуют постоянные $M \geqslant 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $\|\mathscr{U}(t, s)\| \leqslant Me^{\alpha(t-s)}$, $s \leqslant t$.

Эволюционные семейства операторов естественным образом возникают в связи с представлением решений абстрактной задачи Коши

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), \quad t \geqslant s, \tag{1}$$

для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

в предположении, что область определения $D(A(s))$ оператора $A(s)$ плотна в X.

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ решает абстрактную задачу Коши (1), (2), если для любого $s \in \mathbb{R}$ существует плотное в X подпространство X_s из $D(A(s))$ такое, что для каждого $x_0 \in X_s$ функция $x(t) = \mathscr{U}(t,s)x_0$, $t \in \mathbb{R}$, дифференцируема при всех $t \geqslant s$, $x(t) \in D(A(t))$ и выполнены равенства (1), (2).

Пусть E — замкнутое линейное подпространство из X. Рассмотрим линейный оператор

$$\mathscr{L}_E : D(\mathscr{L}_E) \subset L^p(\mathbb{R}_+, X) \to L^p(\mathbb{R}_+, X), \quad p \geqslant 1,$$

который определяется следующим образом. Непрерывная функция $x \in L^p(\mathbb{R}_+, X)$, для которой вектор $x(0)$ принадлежит E, относится к области определения $D(\mathscr{L}_E)$ оператора $\mathscr{L}_E$, если существует функция $f \in L^p(\mathbb{R}_+, X)$, такая что верны равенства

$$x(t) = \mathscr{U}(t,0)x(0) - \int\limits_0^t \mathscr{U}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant 0.$$

Далее полагаем $\mathscr{L}_E x = f$. Если $E = \{0\}$, то оператор $\mathscr{L}_E$ является [1] генератором полугруппы операторов (в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+, X)$)

$$(T_0(t)x)(s) = \begin{cases} \mathscr{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geqslant t, \\ 0, & 0 \leqslant s \leqslant t. \end{cases}$$

В случае, если $E \neq \{0\}$ оператор $\mathscr{L}_E$ не является генератором полугруппы операторов. В работе [1] с оператором $\mathscr{L}_E$ связывается *эволюционная полугруппа линейных отношений* на $\mathscr{F} = L^p(\mathbb{R}_+, X)$

$$T_E(t) = \left\{ (x,y) \in L^p(\mathbb{R}_+, X) \times L^p(\mathbb{R}_+, X) : y(s) = \begin{cases} \mathscr{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geqslant t, \\ \mathscr{U}(s,0)x_0(s), & 0 \leqslant s \leqslant t, \end{cases} \right\},$$

где $x_0 : [0,t] \to E$ — некоторая функция из подпространства

$$L^p([0,t], E) = \left\{ \chi_{[0,t]}x,\ x \in L^p(\mathbb{R}_+, E) \right\}.$$

Для полугруппы T_E в работе [1] получена теорема об отображении спектра. Кроме того, для случая гиперболической полугруппы в [1] дано определение генератора полугруппы линейных отношений и доказано, что оператор $\mathscr{L}_E$ является генератором полугруппы T_E. Например [1], для случая $E = X$ семейство $\mathscr{U}$ обладает свойством экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}_+$, откуда следует гиперболичность полугруппы T_E. В этом случае имеет место разложение $\mathscr{F} = \mathscr{F}_- \oplus \mathscr{F}_+$ подпространства $\mathscr{F}$, относительно которого $T_E(t) = T_-(t) \oplus T_+(t)$, $t > 0$, где T_- — полугруппа операторов класса (C_0)

$$(T_-(t)x)(s) = \begin{cases} \mathscr{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geqslant t, \\ 0, & s < t,\ x \in \mathscr{F}_-, \end{cases}$$

T_+ — полугруппа непрерывно-обратимых линейных отношений

$$T_+(t) = \left\{ (x,y) \in \mathscr{F}_+ \times \mathscr{F}_+ :\ y(s) = \begin{cases} \mathscr{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geqslant t, \\ \mathscr{U}(s,0)x_0(s), & 0 \leqslant s < t, \end{cases} \right\},$$

причем $S_+(t)y(s) = T_+(t)^{-1}y(s) = \mathscr{U}(s, s+t)y(s+t)$, $s \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathscr{F}_+$. Полугруппы операторов T_-, S_+ принадлежат классу (C_0). Генератором полугруппы T_- является сужение

$\mathscr{L}_E\big|_{\mathscr{F}_-}$ оператора $\mathscr{L}_E$ на подпространство $\mathscr{F}_-$, генератором полугруппы S_+ является сужение $-\mathscr{L}_E\big|_{\mathscr{F}_+}$ оператора $-\mathscr{L}_E$ на подпространство $\mathscr{F}_+$. Генератор полугруппы линейны отношений T_E для данного случая определяется как прямая сумма операторов $\mathscr{L}_E\big|_{\mathscr{F}_-}$ и $\mathscr{L}_E\big|_{\mathscr{F}_+}$, т. е. оператор $\mathscr{L}_E$ является генератором полугруппы линейных отношений T_E.

3. Основные определения и некоторые результаты для полугрупп линейных отношений. Всюду далее через S обозначена полугруппа линейных отношений на подпространстве X_0. Для полугруппы линейных отношений существенными являются подпространства из X вида

$$D_1(S) = \bigcap_{t>0} D(S(t)), \quad D_2(S) = \bigcap_{t,s>0} D(S(t)S(s)),$$

где $D(S(t))$ — есть область определения отношения $S(t)$. Только на подпространстве $D_2(S)$ выполняется полугрупповое свойство. Ясно, что $X_0 \subset D_2(S) \subset D_1(S)$. Подпространство $D_2(T)$ естественно называть *областью определения полугруппы* S.

Теорема 1. *Пусть S — полугруппа замкнутых отношений. Тогда $D_2(S)$ есть подпространство из $D_1(S)$, инвариантное относительно всех отношений полугруппы S.*

Доказательство следует из определения произведения линейных отношений и определения инвариантного относительно линейного отношения подпространства [1].

Теорема 2. *Для полугруппы линейных отношений S верны включения:*

$$\operatorname{Ker} S(\tau) \subset \operatorname{Ker} S(t), \quad S(\tau)0 \subset S(t)0, \quad \tau < t.$$

$\triangleleft$ Пусть $\tau < t$ и $(x,0) \in S(\tau)$. Так как $(0,0) \in S(t-\tau)$, то из равенства $S(t) = S(t-\tau)S(\tau)$ и определения произведения линейных отношений, следует $(x,0) \in S(t)$. Значит, $\operatorname{Ker} S(\tau) \subset \operatorname{Ker} S(t)$. Аналогично получаем $S(\tau)0 \subset S(t)0$. $\triangleright$

В данной работе в качестве инструмента изучения полугруппы линейных отношений используется понятие *траектории точки*.

Определение 2. *Траекторией точки* $x \in D_1(S)$ относительно полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется векторная функция ξ_x со свойством: $\xi_x(t) \in S(t)x$, $t > 0$.

Существование траектории для точек из $D_1(S)$ следует из определения полугруппы линейных отношений. Траектория точки в общем случае не единственна.

Теорема 3. *Пусть ξ_x — траектория точки $x \in D_1(S)$, и пусть $u \in S0$. Тогда:*
1) *функция η_x вида $\eta_x(t) = \xi_x(t) + u$, $t > 0$, является траекторией точки x;*
2) *траектории точек x и $x + u$ совпадают;*
3) *для каждого $t > 0$ имеет место представление $S(t)x = \xi_x(t) + u$.*

$\triangleleft$ Доказательство утверждения 1) следует из условия $\xi_x(t) + u \in S(t)$, $t > 0$. Утверждение 2) следует из равенства $S(t)(x+u) = S(t)x + S(t)u = S(t)x$, $t > 0$. Утверждение 3) следует из равенства $\mathscr{A}x = y + \mathscr{A}0$, $y \in \mathscr{A}x$, верного [10] для любого $\mathscr{A} \in LR(X)$. $\triangleright$

Введем в рассмотрения следующие подпространства:

$$X_c(S) = \big\{x \in X_0 : \lim_{t\to 0+} \xi_x(t) = x\big\},$$

$$X_m(S) = \left\{x \in X_0 : \lim_{\eta\to 0+} \frac{1}{\eta}\int_0^\eta \xi_x(t)\,dt = x\right\}.$$

Ясно, что $X_c(S) \subset X_m(S)$. Кроме того, имеет место

Теорема 4. *Верны следующие свойства:*

$$X_c(S) \cap S0 = \{0\}, \quad X_c(S) \cap \operatorname{Ker} S = \{0\},$$
$$X_m(S) \cap S0 = \{0\}, \quad X_m(S) \cap \operatorname{Ker} S = \{0\}.$$

$\lhd$ Доказательство проводится непосредственной проверкой. $\rhd$

Следовательно, для векторов $x \in X_m(S)$ траектория ξ точки x единственна.

Замечание 1. 1) Если S — полугруппа операторов, то все траектории точки x совпадают с функцией $x \mapsto S(t)x$. 2) Полугрупповое свойство для траектории ξ_x точки x выглядит следующим образом $\xi_x(t+s) \in S(t)S(s)x$, $t, s > 0$.

Выделим один вид траектории.

Определение 3. Непрерывная на $(0, \infty)$ траектория ξ_x точки $x \in D_2(S)$ называется *основной*, если $\lim_{t\to 0+} \xi_x(t) = x$.

Замечание 2. 1) Пусть ξ_x — основная траектория точки $x \in D_2(S)$. Тогда функция $\eta_x : [0, \infty) \to X$, $\eta_x(t) = \xi_x(t) + u$, где $0 \neq u \in S0$, не является основной траекторией точки x. 2) Для $x \in \operatorname{Ker} S \cup S0$ нулевая функция является основной траекторией. 3) Из определения основной траектории получаем $\xi_x(t) \cap S0 = \{0\}$, $t > 0$.

Для основной траектории верны следующие утверждения.

Теорема 5. *Для $x \in D_2(S)$ существует единственная основная траектория.*

$\lhd$ Пусть η_x и ξ_x — две основные траектории точки x. Из свойств линейных отношений [10] следует, что $S(t)x = y + S(t)0$ для каждого $t > 0$ и любого $y \in S(t)$. Следовательно, $\eta_x(t) = \xi_x(t) + u$, где $u \in S(t)0$. Остается заметить, что для каждой основной траектории $\xi_x(t) \cap S0 = \{0\}$, $t > 0$. $\rhd$

Через основную траекторию определим свойства сильной непрерывности.

Определение 4. Полугруппа линейных отношений S на подпространстве X_0 называется *сильно непрерывной*, если для каждого $x \in X_0$ существует непрерывная на интервале $(0, \infty)$ траектория ξ_x.

4. Генераторы полугруппы линейных отношений. Дадим определение генератора полугруппы линейных отношений на подпространстве.

Определение 5. *Строгим инфинитезимальным линейным отношением* полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется линейное отношение $\mathbb{G}_0 \in LR(X)$, состоящее из пар векторов $(x, y) \in X_0 \times X$ таких, что основная траектория ξ_x точки x непрерывно дифференцируема и связана с основной траекторией η_y точки y следующим образом: $\xi'_x(t) = \eta_y(t)$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 6. *Инфинитезимальным линейным отношением* полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется линейное отношение $G_0 \in LR(X)$, состоящее из пар векторов $(x, y) \in X_0 \times X$ таких, что основная траектория ξ_x точки x дифференцируема и связана с основной траекторией η_y точки y следующим образом: $\xi'_x(t) = \eta_y(t)$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 7. *Старшим генератором* полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется линейное отношение $\mathbb{G}$ из $LR(X)$, состоящее из пар (x, y) со свойствами: $x \in X_0 \cap \overline{\operatorname{Im} S}$, основная траектория ξ_x точки x дифференцируема на $(0, \infty)$ и связана с основной траекторией η_y точки y соотношением $\xi'_x(t) = \eta_y(t)$, $t > 0$.

Определение 8. *Генератором* полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется отношение $\mathscr{G}$ из $LR(X)$, удовлетворяющее условиям:

1) $\mathbb{G}_0 \subset \mathscr{G} \subset \mathbb{G}$; 2) для каждых $(x, y) \in \mathscr{G}$ и $t > 0$ следует $(\xi_x(t), \eta_y(t)) \in \mathscr{G}$, где ξ_x, η_y — основные траектории точек x, y относительно полугруппы S.

Генератор $\mathscr{G}$ называется *базовым*, если резольвентное множество $\rho(\mathscr{G})$ генератора $\mathscr{G}$ содержит полуплоскость $\mathbb{C}_w = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > w\}$ для некоторого $w \in \mathbb{R}$.

Отметим, что определение генератора полугруппы линейных отношений согласуется с определением генератора полугруппы операторов [10].

Теорема 6. *Имеет место равенство* $\operatorname{Ker} S \cup S0 = \mathbb{G}0$.

$\lhd$ Так как нулевая функция ξ_0 является основной траекторией точки $u \in \operatorname{Ker} S \cup S0$, то $\xi_0'(t)0 = \xi_0(t)u$. Значит, $(0, u) \in \mathbb{G}$, т. е. $\operatorname{Ker} S \cup S0 \subset \mathbb{G}0$. Покажем обратное включение. Пусть $x \in \mathbb{G}0$, η_x — основная траектория точки x и $\xi_0'(t)0 = \eta_x(t)$, $t > 0$. Тогда η_x — нулевая функция. Поэтому $x \in \operatorname{Ker} S$ или $x \in S0$. $\rhd$

Следствие 1. *Пусть* $\mathscr{G} \in \operatorname{Gen}(S)$. *Тогда* $\operatorname{Ker} S \cup S0 = \mathscr{G}0$.

Следствие 2. *Генератор* $\mathscr{G}$ *полугруппы линейных отношений* S *является линейным оператором тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} S \cup S0 = \{0\}$.

5. Обращение полугруппы операторов. Всюду далее через S обозначена полугруппа линейных отношений $S : (0, \infty) \to LR(X)$, $S(t) = T(t)^{-1}$, получающаяся путем обращения (возможно вырожденной) полугруппы операторов $T : (0, \infty) \to \operatorname{End} X$.

Лемма 1. *Для каждого* $t > 0$ *сужение* $\mathscr{T}(t)$ *оператора* $T(t)$ *на подпространство* $D_2(S)$ *является сюрьективным и инъективным оператором.*

$\lhd$ *Инъективность.* Пусть $x \in Ker\mathscr{T}(t) \subset \operatorname{Ker} T(t)$, $t > 0$. Существует $y \in X$ такой, что $x = T(t)y$. Имеем: $x = T(t)y = \lim_{h\to 0} T(h)T(t)y = 0$. *Сюрьективность* следует из теоремы 1 и определения подпространства $D_2(S)$. Действительно, пусть $x \in D_2(S)$. Тогда существует вектор из $D_2(S)$ такой, что $x = T(s)y$, где $y \in D_1(S)$. Пользуясь теоремой 1, вектор y можно выбрать из подпространства $D_2(S)$. Остается заметить, что в этом случае $T(t)y = \mathscr{T}(t)y$ для всех $t > 0$. $\rhd$

Всюду далее через ξ_x для $x \in D_2(S)$ обозначена функция $[0, \infty) \ni x \mapsto \mathscr{T}(t)^{-1}x \in D_2(S)$, где $\mathscr{T}(0)x = x$.

Лемма 2. *Имеют место равенства:*

$$\xi_x(t) = \mathscr{T}(t+s)^{-1}T(s)x = T(h-t)\mathscr{T}(h)^{-1}x, \quad t, s > 0,\ h > t.$$

Доказательство следует непосредственно из определения траектории ξ_x. $\rhd$

Лемма 3. *Функция* ξ_x *есть основная траектория точки* x *относительно полугруппы* S.

$\lhd$ Непосредственно из определения следует, что $\xi_x(t) \in S(t)x$ для каждого $t > 0$. Используя лемму, для $h \geqslant t \geqslant s \geqslant 0$ имеем

$$\lim_{t\to s}(\xi_x(t) - \xi_x(s)) = \lim_{t\to s}(T(h-t)\mathscr{T}(h)^{-1}x - T(h-s)\mathscr{T}(h)^{-1}x) = T(h-s)\mathscr{T}(h)^{-1}x = \xi_x(s).$$

Следовательно, функция ξ_x является основной траекторией точки x. $\rhd$

Теорема 7. *Функция* S *есть сильно непрерывная в нуле справа полугруппа линейных отношений на подпространстве*

$$Y_S := D_2(S) = \bigcap_{t,s>0} \{T(s)y :\, y \in \operatorname{Im} T(t)\} = \bigcap_{t,s>0} \{T(s)T(t)x :\, x \in X\}. \tag{3}$$

Кроме того, $\operatorname{Im} S = X$ *и* $D_1(S) = \bigcap_{t>0} \operatorname{Im}(T(t))$.

$\lhd$ Ясно, что $S(t) \in LR(X)$, $t > 0$. Кроме того,

$$D_1(S) = \bigcap_{t>0} D(S(t)) = \bigcap_{t>0} \mathrm{Im}(T(t)),$$
$$\mathrm{Im}\, S = \bigcup_{t>0} \mathrm{Im}(S(t)) = \bigcup_{t>0} D(T(t)) = X.$$

Полугрупповое свойство выполняется на $D_2(S)$, которое в терминах полугруппы T имеет вид (3). Для $x \in Y_S$ функция ξ_x является основной траекторией. $\rhd$

Следствие 3. *Пусть $T : (0, \infty) \to \mathrm{End}\, X$ — полугруппа сюрьективных операторов в X. Тогда функция S есть сильно непрерывная в нуле справа полугруппа отношений.*

Исследуем свойство сильной дифференцируемости в нуле справа полугруппы S. Для $u \in Y_S$, используя лемму для любых $h \geqslant t \geqslant s \geqslant 0$, имеем:

$$\lim_{t\to s} \frac{\xi_u(t) - \xi_u(s)}{t - s} = \lim_{t\to s} \frac{T(h-t)\mathscr{T}(h)^{-1}u - T(h-s)\mathscr{T}(h)^{-1}u}{t-s}$$
$$= -T'(h-s)\mathscr{T}(h)^{-1}u = -\mathscr{T}(h)^{-1}T'(h-s)u.$$

Пусть $u \in D(A_0)$ и $v = -A_0 u$. Тогда

$$\xi_u'(s) = -\mathscr{T}(h)^{-1}T'(h-s)u = -\mathscr{T}(s)^{-1}A_0 u = \mathscr{T}(s)^{-1}v = \xi_v(s), \quad h > s \geqslant 0.$$

Следовательно, $(u, v) \in G_0$. Обратно, пусть $(u, v) \in G_0$. Тогда $\xi'(s)u = \xi(s)\,v$ для любого $h > s \geqslant 0$. Имеем: $T'(0)u = T'(h)\mathscr{T}(h)^{-1}u = -\xi'(0)u = -\xi(0)v = -v$. Следовательно, $u \in D(A_0)$ и $-v = A_0 u$. Таким образом, имеет место

Теорема 8. *Инфинитезимальный оператор G_0 полугруппы S имеет вид*

$$D(G_0) = Y_S \cap D(A_0), \quad G_0 u = -A_0 u.$$

Определим вид старшего генератора полугруппы S. Пусть $(u, w) \in \mathbb{A}$, $u \in Y_S$. Тогда для любых $h > s > 0$ имеем

$$\xi_u'(s) = -\mathscr{T}(h)^{-1}T'(h-s)\,u = -\mathscr{T}(h)^{-1}T(h-s)\,w = -\mathscr{T}(s)^{-1}w = \xi_{-w}(s).$$

Следовательно, $(u, -w) \in \mathbb{G}$. Пусть теперь $(u, w) \in \mathbb{G}$. Тогда $u \in Y_S$ и $\xi_u'(s) = \xi_w(s)$ для каждого $s > 0$. Имеем для $t > s > 0$:

$$T'(s)u = \lim_{t\to s} \frac{T(t)u - T(s)u}{t-s} = \lim_{t\to s} \frac{T(t+s)(\mathscr{T}(s)^{-1}u - \mathscr{T}(t)^{-1}u)}{t-s}$$
$$= \lim_{t\to s} \frac{T(t+s)(\xi_u(s) - \xi_u(t))}{t-s} = -T(2s)\xi_u'(s) = -T(2s)\xi_w(s) = -T(s)w.$$

Следовательно, $(u, -w) \in \mathbb{A}$. Таким образом, имеет место

Теорема 9. *Старший генератор $\mathbb{G}$ полугруппы S имеет вид:*

$$\mathbb{G} = \big\{(x, -y) : x \in Y_S,\ (x, y) \in \mathbb{A}\big\},$$

где $\mathbb{A}$ — старший генератор полугруппы T.

Так как подпространство Y_S инвариантно относительно операторов полугруппы T, то $\mathbb{G}$ есть сужение отношения $-\mathbb{A}$ на подпространство Y_S.

Теорема 10. *Пусть $\mathscr{A} \in \operatorname{Gen}(T)$. Тогда линейное отношение*

$$\mathscr{G} = \{(x, -y) : x \in Y_S, \text{ где } (x, y) \in \mathscr{A}\}$$

является генератором полугруппы S.

$\lhd$ Включение $\mathbb{G}_0 \subset \mathscr{G} \subset \mathbb{G}$ следует непосредственно из определения генераторов $\mathbb{G}_0$, $\mathscr{G}$, $\mathbb{G}$ и включений $\mathbb{A}_0 \subset \mathscr{A} \subset \mathbb{A}$. Пусть $(u, w) \in \mathscr{G}$ и ξ_u, ξ_w — основные траектории точек u, w. Подпространство Y_S инвариантно отношений $S(t)$, $t > 0$. Поэтому $\xi_u(t) \in Y_S$, $\xi_w(t) \in Y_S$, $t > 0$. Покажем, что для каждого $t > 0$ следует $(\xi_u(t), \xi_{-w}(t)) \in \mathscr{G}$. Для этого покажем, что $(\xi_u(t), \xi_w(t)) \in \mathscr{A}$. Так как $Y_S \subset \overline{\operatorname{Im} T}$, то достаточно показать, что $T'(s)\xi_u(t) = T(s)\xi_w(t)$ для всех $s, t > 0$. Для $t < s$ имеем:

$$T'(s)\,\xi_u(t) = T'(s-t)\,u = T(s-t)\,w = T(s)\,\xi_w(t).$$

Для $t > s$ имеем

$$T'(s)\,\xi_u(t) = T'(s)\mathscr{T}(t)^{-1}\,u = \xi'(t-s)\,u = \xi_w(t-s) = T(s)\mathscr{T}(t)^{-1}w = T(s)\,\xi_w(t).$$

Для $s = t$ и $0 < h < s$ имеем

$$\begin{aligned} T'(s)\,\xi_u(t) &= T(h)\,T'(s-h)\mathscr{T}(t)^{-1}u = T(h)\,\xi'_u(t-s+h) \\ &= T(h)\,\xi_w(t-s+h) = T(h)\,T(s-h)\,\xi_w(t) = T(s)\,\xi_w(t). \rhd \end{aligned}$$

Следствие 4. *Пусть $Y_S = \overline{\operatorname{Im} T}$ и $\mathscr{A} \in \operatorname{Gen}(T)$. Тогда линейное отношение $-\mathscr{A}$ является генератором полугруппы S.*

Замечание 3. 1) Условие $Y_S = \overline{\Im T}$ выполняется, например, если операторы полугруппы T сюрьективны, или имеют место равенства $\operatorname{Im} T(t) = \operatorname{Im} T(s)$, $t \neq s$. 2) Из определения образа нуля полугруппы S и [10] получаем $S0 = \operatorname{Ker} T = \mathscr{A}0$ для любого $\mathscr{A} \in \operatorname{Gen}(T)$. Кроме того, используя теорему 10, получаем $\mathscr{A}0 = \mathscr{G}0$.

6. Примеры. 1. На $X_0 \subset X$ определим полугруппу линейных отношений

$$S_0 : (0, \infty) \to LR(X_0), \quad S_0(t)\,x = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ X_0, & x = 0. \end{cases}$$

Основной траекторией любой точки $x \in X_0$ относительно полугруппы S_0 является функция

$$\xi_x : (0, \infty) \to X_0, \quad \xi_x(t) = 0.$$

Поэтому отношение $\mathbb{G} = \{(0, u) : u \in X_0\}$ является старшим генератором полугруппы S_0. Обращая полугруппу, мы снова получим полугруппу S_0. Ясно, что генератором полугруппы S_0 является любое отношение вида $\mathscr{G} = \{(0, u) : u \in Y\}$, где $Y \subset X_0$.

2. Пусть $X = L^p(\Omega, \mu)$. Рассмотрим оператор $Af = q \cdot f$, $D(A) = \{f \in X : q \cdot f \in X\}$, умножения на функцию $q : \Omega \to \mathbb{C}$. Если $\sup_{s \in \Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$, то формула $T_q(t)f = e^{tq} \cdot f$ определяет полугруппу операторов класса (C_0), инфинитезимальным оператором которой является A. Обратная полугруппа $S_q = T_q^{-1}$ определена на подпространстве $Y_S = \overline{\operatorname{Im} T} = \{f \in X : e^{-q} \cdot f \in X\}$ и имеет вид $S_q(t)f = e^{-tq} \cdot f$, $t > 0$. Инфинитезимальным оператором полугруппы S_q является оператор $-A$. Если потребовать выполнения условия $\sup_{s \in \Omega} |\operatorname{Re} q(s)| < \infty$, то $Y_S = X$.

3. Рассмотрим полугруппу линейных отношений T_E из пункта 2. Из определения полугруппы T_E следует, что $D_1(T_E) = D_2(T_E) = L^p(\mathbb{R}_+, X)$. Кроме того, из сильной

непрерывности семейства $\mathscr{U}$ следует $\operatorname{Ker} T_E = \{0\}$. Подпространства $T_E(t)\,0$, $t > 0$, состоят из функций $x_0 : [0,t] \to E$ со свойствами:

$$x_0(t) = 0, \quad \left(\int\limits_0^t \|x(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{1/p} < \infty.$$

Отсюда получаем $T_E 0 = \{0\}$. Таким образом, все генераторы полугруппы T_E являются операторами. Основной траекторией точки $x \in L^p(\mathbb{R}_+, X)$ является функция $t \mapsto T_0(t)x$. Следовательно, полугруппа T_E является сильно непрерывной (в том числе и в нуле справа). Оператор $\mathscr{L}_0$, определяемый с помощью равенств

$$x(t) = -\int\limits_0^t \mathscr{U}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \geqslant 0,$$

является инфинитезимальным оператором полугруппы T_E. Оператор $\mathscr{L}_E$ является старшим генератором полугруппы отношений T_E. Обратная к T_E полугруппа $S = T_E^{-1}$ имеет вид

$$S(t)y(s) = \mathscr{U}(s, s+t)y(s+t), \quad s \in \mathbb{R}_+, \ y \in L^p(\mathbb{R}_+, X),$$

причем $D_1(S) = D_2(S) = L^p(\mathbb{R}_+, X)$.

4. Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k, k = 0, 1, 2, \ldots\}$, и пусть последовательность отрицательных чисел $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ такая, что сходятся ряды: $\sum_{k \geqslant 1} e^{\lambda_k s}$, $s > 0$, и $\sum_{k \geqslant 1} 1/|\lambda_k|^2$. Рассмотрим полугруппу операторов

$$T : (0, \infty) \to \operatorname{End} X, \quad T(t)x = \sum_{k \geqslant 1} e^{\lambda_k t}(x, e_k)(e_k + e_0).$$

Тогда $\operatorname{Ker} T$ — одномерное подпространство, содержащее вектор e_0, и $\overline{\Im T} = X$. Обратная к полугруппе операторов T полугруппа отношений $S = T^{-1}$ имеет вид:

$$S(t)y = \sum_{k \geqslant 1} e^{-\lambda_k t}(y, e_k)(e_k + e_0) + y_0,$$

где $y_0 \in \operatorname{Ker} T$. Подпространство $D_2(S)$ состоит из векторов вида

$$y = \sum_{k \geqslant 1} (y, e_k + e_0)(e_k + e_0), \ \text{для которых сходится ряд} \ \sum_{k \geqslant 1} e^{-\lambda_k t}(x, e_k + e_0)(e_k + e_0).$$

Заметим, что данный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k \geqslant 1} e^{-\lambda_k t} |(x, e_k + e_0)|^2.$$

Заметим, что $S0 = \operatorname{Ker} T$. Траектория точки $z \in D_2(S)$ имеет вид

$$\xi_z(t) = \sum_{k \geqslant 1} e^{-\lambda_k t}(y, e_k)(e_k + e_0) + y(z),$$

где $y(z)$ — произвольный фиксированный вектор из $S0$. При $y(z) = 0$ имеем основную траекторию точки z

$$\xi_z(t) = \sum_{k \geqslant 1} e^{-\lambda_k t}(y, e_k)(e_k + e_0).$$

Инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы T имеет вид:

$$A_0x = \sum_{k\geqslant 1} \lambda_k(x, e_k)(e_k + e_0),$$

с областью определения $D(A_0)$ состоящей из векторов

$$x = \sum_{k\geqslant 1}(x, e_k)(e_k + e_0), \text{ для которых сходится ряд } \sum_{k\geqslant 1} |\lambda_k(x, e_k)|^2.$$

Базовый генератор $\mathbb{A}_c$ состоит из пар $(y, \sum_{k\geqslant 1} \lambda_k(y, e_k)(e_k + e_0) + y_0)$, где y_0 — произвольный вектор из $\operatorname{Ker} T$. Область определения $D(\mathbb{A}_c)$ состоит из векторов

$$x = \sum_{k\geqslant 1}(x, e_k)(e_k + e_0), \text{ для которых сходится ряд } \sum_{k\geqslant 1} |\lambda_k(x, e_k)|^2.$$

При дифференцировании основной траектории ξ_z точки $z \in D_2(S)$, получаем, что инфинитезимальный оператор G_0 полугруппы S имеет вид:

$$G_0z = -\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k(z, e_k)(e_k + e_0),$$

с областью определения $D(G_0)$, состоящей из векторов

$$z = \sum_{k\geqslant 1}(z, e_k)(e_k + e_0) \in D_2(S), \text{ для которых сходится ряд } \sum_{k\geqslant 1} |\lambda_k(z, e_k)|^2.$$

Иначе говоря, оператор G_0 есть сужение оператора $-A_0$ на подпространство $D_2(S)$. Кроме того, сужение отношения $-\mathbb{A}_c$ на подпространство $D_2(S)$ является одним из генераторов полугруппы S.

Литература

1. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. мат.—2009.—Т. 73, № 2.—С. 3–68.
2. *Hughes Rhonda Jo.* Semigroups of Unbounded Linear Operators in Banach Space // Trans. Amer. Math. Soc.—1977.—Vol. 230.—P. 113–145.
3. *Melnikova I. V.* General theory of ill-posed Cauchy problem.—1995.
4. *Латтес Р., Лионс Ж. Л.* Метод квазиобращения и его приложения.—М.: Мир, 1970.—336 с.
5. *Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи.—М.: Наука, 1995.—176 с.
6. *Ануфриева У. А., Мельникова И. В.* Особенности и регуляризация некорректных задач Коши с дифференциальными операторами // Дифференц. ур-я и теория полугрупп. СМФН.—М.: РУДН, 2005.—Vol. 14.—P. 3–156.
7. *Cross R.* Multivalued linear operators.—N. Y.: M. Dekker, 1998.—352 p.—(Monogr. and Textbooks in Pure and Appl. Math. Vol. 213).
8. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces.—N. Y.: M. Dekker, 1998.
9. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.—829 с.
10. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Мат. заметки.—2008.—Т. 84, № 2.—С. 175–192.
11. *Баскаков А. Г., Чернышов К. И.* Линейные отношения, дифференциальные включения и вырожденные полугруппы // Функцион. анализ и его приложения.—2002.—Т. 36, № 4.—С. 65–70.
12. *Баскаков А. Г., Чернышов К. И.* Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 11.—С. 3–42.

13. *Чшиев А. Г.* Теорема Герхарда — Прюсса для некоторого класса вырожденных полугрупп оператора // Мат. заметки.—(Принята в печать).
14. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи мат. наук.—2013.—Т. 68, № 1 (409).—С. 77–128.
15. *Чшиев А. Г.* Об условиях замкнутости и условиях замыкаемости инфинитезимальных операторов некоторых классов полугрупп операторов // Изв. вузов. Матем.—2011.—№ 8.—P. 77–85.
16. *Чшиев А. Г.* О полугруппе Сильченко // Владикавказ. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 4.—С. 82–90.
17. *Arens R.* Operational calcules of linear relations // Pacific J. Math.—1961.—Vol. 11.—P. 9–23.
18. *Загорский А. С.* О полугруппах линейных отношений // Вестн. ВГУ. Сер. физ.-мат.—2004.—№ 2.—С. 158–161.
19. *Engel K. J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.—New York: Springer Verlag, 2000.—586 p.

Статья поступила 13 марта 2013 г.

Чшиев Аслан Григорьевич
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник отдела функцион. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `zchaslan@mail.ru`

ON INVERSION OF SEMIGROUPS OF OPERATORS

Chshiev A. G.

We study semigroups of linear relations in Banach space obtained by inversion of semigroups of bounded linear operators of different classes. As a basic research tool we use the orbit of a point. Also we use the common definition of the generator of a semigroup of linear relations.

Key words: semigroup of linear relation, semigroup of operators, generator of the semigroup, linear relation.