*Владикавказский математический журнал*
*2014, Том 16, Выпуск 3, С. 47–54*

*УДК* **517.512**

# О СВЯЗИ МЕЖДУ СТЕПЕНЬЮ СУММИРУЕМОСТИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

**Ю. Х. Хасанов**

В работе получены результаты, которые обобщают теорему Пэли для почти-периодических в смысле Безиковича и Степанова функций по произвольной тригонометрической системе. Доказывается, что для произвольного тригонометрического ряда при некоторых условиях найдется почти-периодическая функция, для которой исходный ряд является ее рядом Фурье.

**Ключевые слова:** почти-периодические функции, ряд Фурье, коэффициенты Фурье, степень суммируемости, сходимость ряда.

Известно [1], что если $\{c_n\}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L_2$ по любой ортонормированной системе $\{\varphi(x)\}$, то имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx.$$

Если рассматриваемая система полна, то это неравенство превращается в равенство, т. е. если существует последовательность чисел $\{c_n\}$, для которых $\sum |c_n|^2 < \infty$, то найдется функция $f(x) \in L_2$, для которой эти числа будут коэффициентами Фурье и

$$\int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Если функция $f(x) \in L_p$ $(p > 1)$, то что можно сказать об ее коэффициентах Фурье? И наоборот, если $\sum |c_n|^p < \infty$, то существует ли функция, имеющая $\{c_n\}$ своими коэффициентами Фурье, и какова степень ее суммируемости?

Ответы на эти вопросы для случая тригонометрической системы даются теоремой Хаусдорфа — Юнга (см. [1, с. 211]), а для общей ортогональной системы — теоремой Рисса (см. [1, с. 211]).

Пэли [2] доказал, что если $f(x) \in L_p$, $1 < p \leqslant 2$, $\{c_n\}$ — ее коэффициенты Фурье по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$ на $[a, b]$, $|\varphi_n(x)| \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p\, n^{p-2}\right\}^{1/p} \leqslant A_p \left\{\int\limits_a^b |f|^p\, dx\right\}^{1/p},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ — числа $|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_n|, \ldots$, расположенные в порядке убывания и $A_p$ зависит только от $p$ и $M$. Если же $p \geqslant 2$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — последовательность чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p \, n^{p-2} < +\infty,$$

то существует функция $f(x) \in L_p(a,\, b)$, для которой числа $c_n$ являются коэффициентами Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ и имеет место

$$\left\{ \int\limits_a^b |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqslant B_p \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p \, n^{p-2} \right\}^{1/p},$$

где $B_p$ зависит только от $p$ и $M$.

В этой работе получены результаты, которые являются аналогами теоремы Пэли для почти-периодических в смысле Безиковича и Степанова функций при $p > 2$ по произвольной тригонометрической системе $\{\exp(i\lambda_k x)\}$.

Определения и свойства почти-периодических в смысле Безиковича и Степанова функций можно найти в [3].

Определение 1. Функцию $f(x)$ называют $B_p$-почти-периодической, $p \geqslant 1$, или почти-периодической в смысле Безиковича, если $|f(x)|^p$ интегрируем на любом конечном отрезке,

$$D_{B_p}\{f(x)\} = \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} < \infty,$$

и существует ряд вида

$$P_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(i\lambda_k x),$$

для последовательности прямоугольных сумм $\{P_n(x)\}$ которого выполняется

$$\lim_{n\to\infty} D_{B_p}\bigl\{f(x) - P_n(x)\bigr\} = 0.$$

Пространство функций, удовлетворяющих всем условиям определения 1, принято называть $B_p$-пространством, или пространством Безиковича, в котором за норму функции $f(x) \in B_p$ $(p \geqslant 1)$ принимается величина

$$\|f(x)\|_{B_p} = \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

Если $f(x) \in B_p$, то множество $\Lambda\{\lambda_k\}$, для которых

$$A_k = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda_k x) \, dx \neq 0,$$

счетно и принято их называть спектром (показателями Фурье) $B_p$-почти-периодической функции $f(x)$, а числа $\{A_k\}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in B_p$. Таким образом, каждой функции $f(x) \in B_p$ с помощью ее спектра $\Lambda\{\lambda_k\}$ и коэффициентов $\{A_k\}$

ставится в соответствие ряд

$$f(x) \sim \sum_k A_k \exp(i\lambda_k x),$$

который называется рядом Фурье функции $f(x) \in B_p$.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть задан тригонометрический ряд*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \exp(i\lambda_k x), \tag{1}$$

*где $\Lambda\{\lambda_k\}$ — произвольное счетное множество действительных чисел. Если при некотором $p > 2$*

$$\sigma_p = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^p \, n^{p-2} < \infty, \tag{2}$$

*то в пространстве $B_p$ найдется функция $f(x)$, для которой ряд (1) будет ее рядом Фурье и имеет место*

$$D_{B_p}\{f(x)\} \leqslant C_p \sigma_p^{1/p}. \tag{3}$$

Заметим, что так как из условия (2) вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{n} |A_k|^2$, то на основании аналога теоремы Рисса — Фишера (см. [3, с. 252]) в пространстве $B_p$ найдется функция $f(x)$, для которой ряд (1) будет ее рядом Фурье.

Сначала нам необходимо доказать справедливость следующего неравенства

$$D_{B_p}\{P_n(x)\} \leqslant n^{1/2-1/p} D_{B_2}\{P_n(x)\}, \quad p > 2. \tag{4}$$

Известно, что

$$P_n(x) = M_t \left\{ P_n(x+t) \sum_{k=1}^{n} \exp(-i\lambda_k t) \right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} P_n(x+t) \sum_{k=1}^{n} \exp(-i\lambda_k t)\, dt,$$

следовательно,

$$\max_x |P_n(x)| \leqslant n^{1/2} \left( M\left\{ |P_n(x)|^2 \right\} \right)^{1/2}. \tag{5}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |P_n(x)|^p \, dx &\leqslant \max_x |P_n(x)|^{p-2} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |P_n(x)|^2 \, dx \\ &\leqslant n^{\frac{p-2}{2}} \left( M\left\{ |P_n(x)|^2 \right\} \right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |P_n(x)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

После перехода к пределу по $T \to \infty$ получим неравенство (4).

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. При всяком натуральном $N$ рассмотрим сумму

$$S_{2^{N+1}}(x) = \sum_{k=1}^{2^{N+1}} A_k \exp(i\lambda_k x) = \sum_{n=1}^{N} \Delta_n,$$

где

$$\Delta_n = \Delta_n(x) = \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} A_\nu \exp(i\lambda_\nu x).$$

В силу почти-периодичности функции имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} S_{2^{N+1}}(x)\,dx = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=1}^{N}\Delta_n\,dx.$$

Отсюда при $r=[p]+1$, $R=\frac{r(r-1)}{2}$ и $\delta_\nu = |\Delta_\nu|^{p/r}$, получаем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|S_{2^{N+1}}(x)|^p\,dx = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big|\sum_{\nu=1}^{N}\Delta_\nu\Big|^p dx \leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big\{\sum_{\nu=1}^{N}|\Delta_\nu|^{p/r}\Big\}^r dx$$
$$\leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big\{\sum_{\nu=1}^{N}\delta_\nu\Big\}^r dx = \frac{1}{2T}\sum_{\nu_1=1}^{N}\dots\sum_{\nu_r=1}^{N}\int_{-T}^{T}\delta_{\nu_1}\dots\delta_{\nu_r}\,dx$$
$$= \sum_{\nu_1=1}^{N}\dots\sum_{\nu_r=1}^{N}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}\delta_{\nu_i}^{1/(r-1)}\delta_{\nu_j}^{1/(r-1)}\,dx.$$

После применения неравенства Гёльдера получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|S_{2^{N+1}}(x)|^p\,dx &\leqslant \sum_{\nu_1=1}^{N}\dots\sum_{\nu_r=1}^{N}\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}\Big\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta_{\nu_i}^{r/2}\delta_{\nu_j}^{r/2}\,dx\Big\}^{\frac{1}{R}}\\ &= \sum_{\nu_1=1}^{N}\dots\sum_{\nu_r=1}^{N}\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}\Big\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\Delta_{\nu_i}\Delta_{\nu_j}|^{\frac{p}{2}}\,dx\Big\}^{\frac{1}{R}},\end{aligned}\tag{6}$$

где $r=[p]+1$, $R=\frac{r(r-1)}{2}$.

В правой части (6), применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha=(p+2)/2$ и $\alpha'=(p+2)/p$, находим

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\Delta_\mu\Delta_\nu|^{\frac{p}{2}}\,dx \leqslant \Big\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\Delta_\mu|^{\frac{p\alpha}{2}}\,dx\Big\}^{\frac{2}{p\alpha}\cdot\frac{p}{2}}\Big\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\Delta_\nu|^{\frac{p+2}{2}}\,dx\Big\}^{\frac{2}{p+2}\cdot\frac{p}{2}}.$$

После перехода к пределу, при $T\to\infty$, будем иметь

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\Delta_\mu\Delta_\nu|^{\frac{p}{2}}\,dx$$
$$\leqslant \lim_{T\to\infty}\Big\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\Delta_\mu|^{\frac{p\alpha}{2}}\,dx\Big\}^{\frac{2}{p\alpha}\cdot\frac{p}{2}}\lim_{T\to\infty}\Big\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\Delta_\nu|^{\frac{p+2}{2}}\,dx\Big\}^{\frac{2}{p+2}\cdot\frac{p}{2}}$$

или

$$M\left\{|\Delta_\mu\Delta_\nu|^{\frac{p}{2}}\right\} \leqslant \left(M\left\{|\Delta_\mu|^{\frac{p\alpha}{2}}\right\}\right)^{\frac{2}{p\alpha}\cdot\frac{p}{2}} \cdot \left(M\left\{|\Delta_\nu|^{\frac{p+2}{2}}\right\}\right)^{\frac{2}{p+2}\cdot\frac{p}{2}}. \tag{7}$$

Применяя к правой части (7) неравенство (4), получим, что

$$\begin{gathered} M\left\{|\Delta_\mu\Delta_\nu|^{\frac{p}{2}}\right\} \leqslant 2^{(\mu+1)(1/2-1/\alpha)}\gamma_\mu^{1/2}2^{(\nu+1(1/2-1/\alpha')}\gamma_\nu^{1/2} \\ = 2^{(\mu+1)(p/4-1/\alpha)}\left(M\left\{|\Delta_\mu|^2\right\}\right)^{\frac{p}{4}} \cdot 2^{(\nu+1)(p/4-1/\alpha')}\left(M\left\{|\Delta_\nu|^2\right\}\right)^{\frac{p}{4}}, \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\gamma_\nu = 2^{(\nu+1)(p/2-1)}\left(M\left\{|\Delta_\nu|^2\right\}\right)^{\frac{p}{2}} = 2^{(\nu+1)(p/2-1)}\left(\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}|A_k|^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Так как $\frac{1}{\alpha'} = 1 - \frac{1}{\alpha}$, то из соотношения (8) вытекает, что

$$M\left\{|\Delta_\mu\Delta_\nu|^{p/2}\right\} \leqslant 2^{-|\mu-\nu|(1/2-1/\alpha)}\gamma_\mu^{1/2}\gamma_\nu^{1/2}. \tag{9}$$

Благодаря (6), (7) и (9) имеем

$$M\left\{|S_{2^{N+1}}(x)|^p\right\} \leqslant \sum_{\nu_1=1}^{N}\cdots\sum_{\nu_r=1}^{N}\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}\left\{\gamma_{\nu_i}^{1/2}\gamma_{\nu_j}^{1/2}2^{-|\nu_i-\nu_j|(1/2-1/\alpha)}\right\}^{\frac{1}{R}}.$$

Далее, поступая так же как и в работе [4], находим, что

$$M\left\{\left|S_{2^{N+1}(x)}\right|^p\right\} \leqslant C_p\sum_{n=1}^{N}\gamma_n = C_p\sum_{n=1}^{N}2^{n(p/2-1)}\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}|A_k|^2\right)^{p/2}. \tag{10}$$

Покажем теперь, что из условия (2) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(p/2-1)}\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}|A_k|^2\right)^{p/2}. \tag{11}$$

Сходимость ряда (11) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{N}n^{p/2-2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|A_k|^2\right)^{p/2}.$$

Используя неравенство (см. [5, с. 308]),

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-c}\left(\sum_{k=n}^{\infty}d_k\right)^{\delta} \leqslant A\sum_{n=1}^{\infty}n^{-c}\left(nd_n\right)^{\delta},$$

при $c = 2 - p/2 < 1$, $\delta = p/2 > 1$, $d_n = |A_n|^2$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(2-p/2)}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|A_k|^2\right)^{p/2} \leqslant A\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^p n^{p-2}.$$

Следовательно, в силу условия (2)

$$M\left\{|S_{2^{N+1}}(x)|^p\right\} \leqslant C'_p\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^p\, n^{p-2} < \infty.$$

Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(p/2-1)} \left( \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |A_k|^2 \right)^{p/2}$$

вытекает, что для любых $m$, $n$ $(m > n)$

$$\sum_{k=n}^{m} 2^{k(p/2-1)} \left( \sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1} |A_\nu|^2 \right)^{p/2} \to 0$$

при $m \to \infty$, $n \to \infty$, и так как неравенство (10) верно для любого полинома и, в частности, для $S_{2^{m+1}}(x) - S_{2^{n+1}}(x)$, то при $m \to \infty$, $n \to \infty$

$$D_{B_p} \left\{ S_{2^{m+1}}(x) - S_{2^{n+1}}(x) \right\} \to 0.$$

В силу полноты пространства найдется функция $f(x) \in B_p$, для которой при $n \to \infty$

$$D_{B_p} \left\{ f(x) - S_{2^{n+1}}(x) \right\} \to 0$$

и, следовательно, для нее будет верно неравенство (3). $\rhd$

Замечание. В теореме 1 условие (2) можно заменить более слабым условием

$$\sum_{n=}^{\infty} 2^{n(p/2-1)} \left( \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |A_k|^2 \right)^{p/2} < \infty.$$

Определение 2. Под *$S_p$-пространством*, или *пространством почти-периодических функций Степанова*, понимается совокупность функций, для которых

$$D_{S_p} \left\{ f(x) \right\} = \sup_x \left( \int_x^{x+1} |f(t)|p \, dt \right)^{1/p} < \infty,$$

и можно указать последовательность тригонометрических сумм $\{P_n(x)\}$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(i\lambda_k x) \tag{12}$$

таких, что

$$\lim_{n\to\infty} D_{S_p} \left\{ f(x) - P_n(x) \right\} = 0.$$

**Теорема 2.** *Пусть задан ряд (1), где $\Lambda \{\lambda_k\}$ — последовательность чисел, удовлетворяющая при некотором $\alpha > 0$ для всех $n$*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \alpha. \tag{13}$$

*Если выполнено условие*

$$\sigma_p = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^p n^{p-2} < \infty,$$

*то в пространстве $S_p$ $(p > 2)$ найдется функция $f(x)$, для которой $\{A_k\}$ будут ее коэффициентами Фурье и имеет место оценка*

$$D_{S_p}\{f(x)\} \leqslant C_p \sigma_p^{1/p}.$$

◁ Доказательство теоремы 2. Покажем вначале, что для любого полинома вида (12) при выполнении условия (13) и $p > 2$ справедливо неравенство

$$D_{S_p}\{P_n(x)\} \leqslant A n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Действительно, так как

$$\frac{1}{2}\int\limits_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} |P_n(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} (1-|x-u|)\,|P_n(x)|^p\,dx$$

$$\leqslant \max_x |P_n(x)|^{p-2} \int\limits_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} (1-|x-u|)\,|P_n(x)|^2\,dx,$$

то на основании неравенства (5) получим, что

$$D_{S_p}\{P_n(x)\} \leqslant n^{\frac{p-2}{2}} \left(M\left\{|P_n(x)|^2\right\}\right)^{\frac{p-2}{2}} \int\limits_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} (1-|x-u|)\,|P_n(x)|^2\,dx.$$

В работе [3] установлено, что

$$\int\limits_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} (1-|x-u|)\,|P_n(x)|^2\,dx \leqslant A\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = AM\left\{|P_n(x)|^2\right\}.$$

Следовательно,

$$D_{S_p}\{P_n(x)\} \leqslant A n^{\frac{p-2}{2}} \left(M\left\{|P_n(x)|^2\right\}\right)^{p/2},$$

что дает неравенство (14).

Используя тот же метод, что и при доказательстве теоремы 1, найдем $D_{S_p}\{P_n(x)\} \leqslant C_p\sigma_p^{1/p}$.

В силу полноты пространства $S_p$ получим утверждение теоремы 2. ▷

## Литература


1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.—М.: Физматгиз, 1961.—936 с.
2. *Paley R.* Some theorems on orthogonal functions // Studia Math.—1932.—№ 3.—P. 205–208.
3. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции.—М.: Гостехиздат, 1947.—396 с.
4. *Timan M. F.* Orthonormal systems satisfying an inequality of S. M. Nikolskii // Analysis Math.—1978.—Vol. 4.—P. 75–82.
5. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948.—456 с.

*Статья поступила 20 сентября 2013 г.*

Хасанов Юсуфали Хасанович
Российско-Таджикский (славянский) университет,
*доцент кафедры информатики и информационных систем*
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, ул. М. Турсунзода, 30
E-mail: yukhas60@mail.ru

# ABOUT RELATIONSHIP BETWEEN SUMMABILITY OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS AND FOURIERS COEFFICIENTS

Khasanov Yu. Kh.

We generalize Paley's theorem for Bezicovich and Stepanov almost periodic functions on arbitrary trigonometric system. It is proved that for any trigonometric series under some conditions there exists an almost-periodic function which the given series is its Fourier series.

**Key words:** almost periodic functions, Fourier series, Fourier coefficients, relationship summability, series convergence.