Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 63–70

УДК **517.977**

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

Р. О. Масталиев

В задаче оптимального управления с переменной линейной структурой, описываемой линейным разностным и интегро-дифференциальным уравнениями типа Вольтерра, получено необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В случае выпуклости функционала критерия качества получено достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: задача оптимального управления, линейная система с переменной структурой, разностное уравнение типа Вольтерра, интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра.

1. Введение

Процессы с переменной структурой встречаются в задачах управления химико-технологическими процессами [1, 2], динамике шагающего аппарата [3–5] и др.

В работах [6–11] изучены задачи оптимального управления, описываемые соответственно нелинейными интегральными и разностными уравнениями, доказаны необходимые условия оптимальности, найдены условия управляемости и др.

Предлагаемая работа посвящена исследованию задач оптимального управления линейными системами с переменной структурой, описываемыми разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. В одном случае доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [12–14], а в другом случае получено достаточное условие оптимальности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о нахождении минимума функционала

$$I(u,v) = c_1' x(t_1) + c_2' \, y(T) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum\limits_{\tau=t_0}^{t} A(t,\tau)\, x(\tau) + B(t)\, u(t), \ t \in T_1 = \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1\}, \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = \int\limits_{t_1}^{t} C(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau + D(t)\, v(t), \ t \in T_2 = [t_1, T], \\ y(t_1) = c_3' x(t_1). \end{cases} \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при президенте Азербайджанской республики, грант № EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1.

Здесь t_0, t_1, T, x_0 заданы, причем разность $t_1 - t_0$ — натуральное число, c_1, c_2, c_3 — заданные постоянные векторы, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ — векторы состояния системы, $A(t,\tau) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C(t,\tau) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{m\times q}$ — соответственно дискретные и непрерывные известные матрицы-функции, $u(t)$ — r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U, $v(t)$ — q-мерный кусочно-непрерывный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества V, т. е.

$$\begin{cases} u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, & t \in T_1, \\ v(t) \in V \subset \mathbb{R}^q, & t \in T_2. \end{cases} \tag{3}$$

Штрих означает знак транспонирования.

Пару $(u(t), v(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем *допустимым управлением*, а соответствующий процесс $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ — *допустимым процессом.*

3. Формула приращения критерия качества и необходимое и достаточное условие оптимальности

Пусть $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ — оптимальный процесс. Обозначим произвольный допустимый процесс $(\bar{u}(t), \bar{v}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t))$, где $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $\bar{v}(t) = v(t) + \Delta v(t)$, $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $\bar{y}(t) = y(t) + \Delta y(t)$, и запишем формулу для приращения функционала

$$\Delta I(u,v) = c_1' \Delta x(t_1) + c_2' \Delta y(T). \tag{4}$$

С другой стороны ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x(t), y(t))$ будет удовлетворять уравнениям (5) и (6)

$$\begin{cases} \Delta x(t+1) = \sum\limits_{\tau=t_0}^{t} A(t,\tau)\, \Delta x(\tau) + B(t)\, \Delta u(t), & t \in T_1, \\ \Delta x(t_0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{y}(t) = \int\limits_{t_1}^{t} C(t,\tau)\, \Delta y(\tau)\, d\tau + D(t)\, \Delta v(t), & t \in T_2, \\ \Delta y(t_1) = c_3'\, \Delta x(t_1). \end{cases} \tag{6}$$

Поскольку (5) и (6) являются соответственно линейным неоднородным разностным и интегро-дифференциальным уравнениями типа Вольтерра относительно $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, то их решения можно представить [15–18] в виде

$$\Delta x(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1} R(t-1,s)\, B(s)\, \Delta u(s), \tag{7}$$

$$\Delta y(t) = \int_{t_1}^{t} Q(t,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi + c_3'\, Q(t,t_1)\, \Delta x(t_1), \tag{8}$$

где $R(t,\tau)$ и $Q(t,\xi)$ — матричные функции соответствующих размерностей, являющиеся решениями задач

$$\begin{cases} R(t,s-1) = \sum\limits_{\tau=s}^{t} R(t,\tau)\, A(\tau,s), \\ R(t,t) = E_1, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_\xi(t,\xi) = \int\limits_\xi^t Q(t,\alpha)\, C(\alpha,\xi)\, d\alpha, \\ Q(t,t) = E_2, \end{cases} \tag{10}$$

где E_1 и E_2 — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Далее, представление (8) с учетом представления (7) записывается в виде

$$\Delta y(t) = \int\limits_{t_1}^{t} Q(t,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi + \sum_{s=t_0}^{t_1-1} F(t,s)\, B(s)\, \Delta u(s), \tag{11}$$

где $F(t,s) = R(t_1-1,s)\, c_3' Q(t,t_1)$.

Из (7) и (11) ясно, что

$$\Delta x(t_1) = \sum_{s=t_0}^{t_1-1} R(t_1-1,s)\, B(s)\, \Delta u(s), \tag{12}$$

$$\Delta y(T) = \int\limits_{t_1}^{T} Q(T,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi + \sum_{s=t_0}^{t_1-1} F(T,s)\, B(s)\, \Delta u(s). \tag{13}$$

Поэтому из (4) получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta I(u,v) = c_1'\, \Delta x(t_1) + c_2'\, \Delta y(T) = \sum_{s=t_0}^{t_1-1} c_1' R(t_1-1,s)\, B(s)\, \Delta u(s) \\ + \int\limits_{t_1}^{T} c_2'\, Q(T,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi + \sum_{s=t_0}^{t_1-1} c_2'\, F(T,s)\, B(s)\, \Delta u(s) \\ = \sum_{s=t_0}^{T} \left[c_1' R(t_1-1,s) + c_2' F(T,s)\right] B(s)\, \Delta u(s) + \int\limits_{t_1}^{T} c_2'\, Q(T,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{14}$$

Полагая

$$\psi(s) = -\left[c_1' R(t_1-1,s) + c_2' F(T,s)\right], \tag{15}$$

$$p(\xi) = -c_2'\, Q(T,\xi), \tag{16}$$

введем обозначения:

$$H(s,u(s),\psi(s)) = \psi'(s)\, B(s)\, u(s),$$

$$M(\xi,v(\xi),p(\xi)) = p'(\xi)\, D(\xi)\, v(\xi),$$

где функции $H(\cdot)$ и $M(\cdot)$ — аналоги функции Гамильтона — Понтрягина.

Тогда формула приращения (14) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta I(u,v) = -\sum_{s=t_0}^{t_1-1} \left[H(s,\bar{u}(s),\psi(s)) - H(s,u(s),\psi(s))\right] \\ - \int\limits_{t_1}^{T} \left[M(\xi,\bar{v}(\xi),p(\xi)) - M(\xi,v(\xi),p(\xi))\right] d\xi. \end{aligned} \tag{17}$$

Используя выражения $\psi(t)$ и $p(t)$, найдем уравнение, которому удовлетворяют эти функции. По определению функции $\psi(t)$

$$\psi(t-1) = -\left[c_1' R(t_1-1, t-1) + c_2' F(T, t-1)\right].$$

Отсюда с учетом уравнения (9) будем иметь

$$\begin{aligned}\psi(t-1) &= -\left[c_1' R(t_1-1, t-1) + c_2'\, Q(T, t_1)\, c_3'\, R(t_1-1, t-1)\right] \\ &= -\left[R(t_1-1, t-1)\left[c_1 + c_2'\, c_3'\, Q(T, t_1)\right]\right]\end{aligned}$$

$$= -\left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1} A(\tau, t)\left[c_1' R(t_1-1, \tau) + c_2' R(t_1-1, \tau)\, c_3'\, Q(T, t_1)\right]\right] = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} A'(\tau, t)\, \psi(\tau).$$

Найдем начальное условие для этой функции. По определению

$$\begin{aligned}\psi(t_1-1) &= -\left[c_1' R(t_1-1, t_1-1) + c_2' F(T, t_1-1)\right] \\ &= \left[c_1 + c_2' Q(T, t_1)\, c_3'\, R(t_1-1, t_1-1)\right] = -\left[c_1 - c_3'\, p(t_1)\right].\end{aligned}$$

Согласно определению функции $p(t)$ имеем

$$\dot{p}(t) = -c_2' \dot{Q}_t(T, t).$$

Отсюда с учетом уравнения (10) будем иметь

$$\dot{p}(t) = -\int_t^T c_2'\, Q(T, \xi)\, C(\xi, t)\, d\xi = \int_t^T C'(\xi, t)\, p(\xi)\, d\xi,$$

$$p(T) = -c_2'\, Q(T, T) = -c_2.$$

Следовательно, вектор-функция $(\psi(t), p(t))$ является решением задачи

$$\psi(t-1) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} A'(\tau, t)\, \psi(\tau), \quad \psi(t_1-1) = -\left[c_1 - c_3'\, p(t_1)\right],$$

$$\dot{p}(t) = \int_t^T C'(\xi, t)\, p(\xi)\, d\xi, \quad p(T) = -c_2.$$

Используя формулу приращения (17), докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для оптимальности допустимого управления $(u(t), v(t))$ в задаче (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы для всех $\lambda(t) \in U$, $t \in T_1$, $\mu(t) \in V$, $t \in T_2$ выполнялись соответственно соотношения*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H(t, \lambda(t), \psi(t)) - H(t, u(t), \psi(t))\right] \leqslant 0, \tag{18}$$

$$\int_{t_1}^T \left[M(t, \mu(t), p(t)) - M(t, v(t), p(t))\right] dt \leqslant 0. \tag{19}$$

$\lhd$ *Необходимость.* Допустим, что уравнение $(u(t), v(t))$ оптимально. Докажем, что выполняются соотношения (18) и (19). В силу оптимальности управления $(u(t), v(t))$ из формулы приращения (17) следует, что для любых $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ выполняется следующее соотношение:

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H(t,\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))] - \int_{t_1}^{T}[M(t,\bar{v}(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))]\,dt \geqslant 0. \quad (20)$$

Используя произвольность $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$, определим его следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{u}(t) = \lambda(t), \\ \bar{v}(t) = v(t). \end{cases} \quad (21)$$

С учетом (21) из формулы (20) следует, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H(t,\lambda(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))] \leqslant 0.$$

Если же положить

$$\begin{cases} \bar{u}(t) = u(t), \\ \bar{v}(t) = \mu(t), \end{cases}$$

из формулы (20) следует, что

$$\int_{t_1}^{T}[M(t,\mu(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))]\,dt \leqslant 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (18) и (19), и докажем, что в этом случае управление $(u(t), v(t))$ является оптимальным для рассматриваемой задачи.

Ясно, что

$$\Delta I(u,v) = I(\bar{u},\bar{v}) - I(u,v) = -\left[\sum_{s=t_0}^{t_1-1}[H(s,\bar{u}(s),\psi(s)) - H(s,u(s),\psi(s))] + \int_{t_1}^{T}[M(\xi,\bar{v}(\xi),p(\xi)) - M(\xi,v(\xi),p(\xi))]d\xi\right] \geqslant 0,$$

т. е. $I(\bar{u},\bar{v}) \geqslant I(u,v)$ для всех $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$. Следовательно, что управление $(u(t), v(t))$ является оптимальным. Теорема полностью доказана. $\rhd$

4. Достаточное условие оптимальности

В этом пункте рассматривается случай нелинейного функционала. Пусть требуется найти минимум функционала

$$I(u,v) = \varphi(x(t_1)) + \phi(y(T)) \quad (22)$$

при ограничениях (2), (3). Здесь $\varphi(x)$, $\phi(y)$ — заданные непрерывно дифференцируемые выпуклые скалярные функции.

Тогда, используя формулу Тейлора, приращение функционала (22), соответствующее управлениям $(u(t), v(t))$ и $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$, записывается в виде

$$\Delta I(u,v) = \varphi_x(x(t_1))\Delta x(t_1) + \phi_y(y(T))\Delta y(T) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(T)\|).$$

Отсюда, используя представления (12) и (13), будем иметь

$$\Delta I(u,v) = \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \left[\varphi_x(x(t_1))R(t_1-1,s) + \phi_y(y(T))F(T,s)\right] B(s)\,\Delta u(s) + \int_{t_1}^{T} \phi_y(y(T))\,Q(T,s)\,D(s)\,\Delta v(s)\,ds.$$

Полагая

$$\psi(s) = -\left[\varphi_x(x(t_1))R(t_1-1,s) + \phi_y(y(T))F(T,s)\right],$$

$$p(s) = -\phi_y(y(T))\,Q(T,s),$$

$$H(t,u(t),\psi(t)) = \psi'(t)\,B(t)\,u(t),$$

$$M(t,v(t),p(t)) = p'(t)\,D(t)\,v(t),$$

формулу приращения функционала (22) запишем в виде

$$\Delta I(u,v) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H(t,\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))\right] - \int_{t_1}^{T}\left[M(t,\bar{v}(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))\right]dt + o_1\left(\|\Delta x(t_1)\| + o_2\left(\|\Delta y(T)\|\right)\right). \tag{23}$$

Аналогично можно показать, что вектор-функция $(\psi(t), p(t))$ является решением задачи

$$\psi(t-1) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} A'(\tau,t)\,\psi(\tau),$$

$$\psi(t_1-1) = -\varphi_x(x(t_1)) + c_3'\,p(t_1),$$

$$\dot{p}(t) = \int_t^T C'(\tau,t)\,p(\tau)\,d\tau, \quad p(T) = -\phi_y(y(T)).$$

По предположению $\varphi(x)$, $\phi(y)$ — выпуклые дифференцируемые функции. Это означает, что

$$\begin{cases} o_1(\|\Delta x(t_1)\| \geqslant 0, \\ o_1(\|\Delta y(T)\|) \geqslant 0. \end{cases}$$

Поэтому из (23) следует неравенство

$$\Delta I(u,v) = I(\bar{u},\bar{v}) - I(u,v) \geqslant -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H(t,\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))]$$
$$-\int_{t_1}^{T}[M(t,\bar{v}(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))]\,dt.$$

Из последнего неравенства следует

Теорема 2. *Если функции $\varphi(x)$, $\phi(y)$ выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u(t),v(t))$ в задаче (22), (2), (3) достаточно, чтобы для всех $\lambda(t)\in U$, $t\in T_1$, $\mu(t)\in V$, $t\in T_2$ выполнялись соответственно соотношения*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H(t,\lambda(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))] \leqslant 0, \tag{24}$$

$$\int_{t_1}^{T}[M(t,\mu(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))]\,dt \leqslant 0. \tag{25}$$

Замечание. Полученные условия оптимальности являются аналогами результатов, полученных для задач управления, описываемых линейными дифференциальными и разностными уравнениями типа Вольтерра. Они могут найти приложения в различных областях современной теории оптимального управления, для задач управлений уравнениями Вольтерра.

Литература

1. *Островский Г. М., Волин Ю. М.* Моделирование сложных химико-технологических схем.—М.: Химия, 1975.—311 с.
2. *Агафонова И. А., Гулин Л. Л., Расина И. В.* Математическое моделирование и оптимизация процесса метилирования динатриевой соли сульфаминоантиприна.—М., 1978.—19 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР, № 3457.
3. *Белецкий В. В.* Динамика двуногой ходьбы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.—№ 3.—С. 3–14.
4. *Гурман В. И., Орлов А. Г.* Достаточные условия оптимальности сложных процессов // Автоматика и телемеханика.—1978.—Вып 4.—С. 127–134.
5. *Гурман В. И., Орлов А. Г.* Сложные процессы двуногой ходьбы // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша.—1979.—№ 95.—39 с.
6. *Арсенашвили А. И., Тадумадзе Т. А.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с переменной структурой и непрерывными условиями преемственности // Тр. ИПМ им. И. Н. Векуа Тбилисского гос. ун-та.—Тбилиси, 1998.—Т. 27.—С. 35–48.
7. *Исмайлов Р. Р., Мансимов К. Б.* Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. выч. матaтематики и мат. физики.—2006.—Том. 46, № 10.—С. 1758–1770.
8. *Абдуллаев А. А., Мансимов К. Б.* Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра.—Баку: Изд-во Элм, 2013.—224 с.
9. *Гурман В. И.* К теории оптимальных дискретных процессов // Автоматика и телемеханика.—1973.—Вып. 6.—С. 53–58.
10. *Мансимов К. Б.* Дискретные системы.—Баку: Изд.-во БГУ, 2002.—114 с.
11. *Масталиев Р. О.* Об одной ступенчатой задаче оптимального управления дискретными системами // Вестн. Бакинского ун-та. Сер. физ.-мат. наук.—2010.—№ 1.—С. 33–39.
12. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.—М.: Наука, 1969.—384 с.

13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем.—Минск: Изд-во БГУ, 1973.—185 с.
14. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления.—Минск: Наука и техника, 1974.—274 с.
15. *Колмановский В. Б.* Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика.—2000.—Вып. 4.—С. 42–50.
16. *Колмановский В. Б.* Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений // Автоматика и телемеханика.—2001.—Вып. 4.—С. 47–55.
17. *Васильева А. Б., Тихонов А. Н.* Интегральные уравнения.—М.: Изд-во МГУ, 1989.—550 с.
18. *Цалюк З. Б.* Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ.—1977.—Т. 15.—С. 131–198.

Статья поступила 24 февраля 2015 г.

Масталиев Рашад Огтайович
Институт систем управления НАН Азербайджана,
научный сотрудник лаб. управления
сложными динамическими системами
АЗЕРБАЙДЖАН, AZ 1141, Баку, Б. Вахабзаде, 9
E-mail: mastaliyevrashad@gmail.com

ON AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A LINEAR SYSTEM WITH VARIABLE STRUCTURE

Mastaliyev R. O.

The necessary and sufficient condition for optimality in the form of the Pontryagin maximum principle in optimal control problem with variable linear structure, described by linear difference and integral-differential equations of Volterra type, is obtained. Under some additional assumptions sufficient optimality conditions are also derived.

Key words: optimal control problem, linear system with variable structure, differential Volterra type equation, integro-differential Volterra type equation.