Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 2, С. 49–54

УДК **004.934**

РЕГУЛЯРИЗОВАННОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДА ХААРА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

М. Л. Казарян

Исследуется задача суммирования ряда Хаара непрерывной функции. Приводится доказательство теоремы об устойчивости и равномерной сходимости регуляризованного обобщенной сумматорной функцией ряда Фурье — Хаара непрерывной функции, заданного приближенными коэффициентами.

Ключевые слова: преобразование Хаара, ряд Хаара, метод регуляризации Тихонова, регуляризирующий множитель, класс функций S_p, $1 \leqslant p < \infty$.

Аппарат дискретных ортогональных преобразований (ДОП) имеет достаточно широкое применение [1]. Последние годы отмечены интенсивным применением функций Уолша, Хаара, Радемахера в различных теоретических и практических исследованиях: теория функций и функциональный анализ, теория аппроксимации, теория вероятностей, связь и телевидение, обработка сигналов и распознавание сигналов и т. д.

Система Хаара оказалась полезной при решении некоторых актуальных вопросов общей теории ортогональных рядов. Первые практические применения систем Уолша и Хаара относятся к области связи. Благодаря работам Х. Хармута функции Уолша вошли в технику телевидения. Им же, на основе упомянутых систем, построена теория секвентного анализа [3].

Остановимся подробнее на рядах Хаара. Важное приложение функции Хаара нашли в практической обработке изображений. При цифровой обработке сигналов приходится иметь дело с данными, известными приближенно, что делает невозможным применение традиционных методов решения этих задач. Эта же ситуация возможна при рассмотрении показаний приборов в геофизике, в дистанционном зондировании Земли [7], в телекоммуникационных процессах [2] и т. д.

Подобные задачи являются некорректными [5]. Исследования ряда Хаара на корректность уже проводились [2]. В данной статье предлагается продолжить начатые исследования.

Предварительные сведения. Известно [5], что задача суммирования ряда Фурье интегрируемой с квадратом на отрезке $[a, b]$ функции $f(t)$ с приближенными коэффициентами $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ вместо точных коэффициентов

$$a_k = \int\limits_a^b f(t)\,\psi_k(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

по некоторой ортонормированной системе функций $\{\psi_k(t)\}$ является некорректно поставленной. А именно, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k - a_k)^2 \leqslant \delta^2, \quad \delta > 0, \tag{1}$$

то погрешность, т. е. отклонение функции $f(t)$ и суммы ее ряда Фурье с коэффициентами $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ вместо $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, в равномерной метрике может оказаться сколь угодно большой.

Определение 1. Определим функции вейвлет-Хаара следующим образом [4]:

$$\chi_1(t) \equiv 1,$$

$$\chi_{mj}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{при } t \in \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{2j-1}{2^m}\right), \\ -2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{при } t \in \left[\frac{2j-1}{2^m}, \frac{j}{2^{m-1}}\right), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $m = 1, 2, \ldots,$ $j = 1, \ldots, 2^{m-1}$, а при $j = 2^{m-1}$ правый из отрезков считается замкнутым также справа. При нумерации функций одним индексом k полагается $k = 2^{m-1} + j$.

Это определение отличается от определения самого Хаара [8] значениями функций Хаара в точках разрыва, но при этом сохраняется основное свойство системы Хаара — равномерное стремление ряда Фурье — Хаара непрерывной на $[0, 1]$ функции $f(t)$ к $f(t)$.

В случае системы Хаара не удовлетворяется условие равномерной ограниченности, а предложенный в [5] метод не обеспечивает непрерывность функции, аппроксимирующей непрерывную функцию. Эти исследования были уже проведены [1, 2].

Также ранее [2] было обосновано рассмотрение задачи регуляризации ряда вейвлет-Хаара с приближенными коэффициентами.

В решении этой задачи значительную роль играют классы S_p, $1 \leqslant p < \infty$, которые были введены и детально описаны И. М. Соболем (см. [4]) для изучения многомерных квадратурных формул и содержат функции с быстро сходящимся рядом Хаара.

Определение 2 [4]. Через S_p, $1 \leqslant p < \infty$, обозначим класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

1) представимы рядом Хаара

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \chi_k(t);$$

2)

$$A_p(f) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |a_{mj}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A, \quad A = \text{const}, \ A \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть

$$S_p = \bigcup_{A>0} S_p(A).$$

Введем несколько обозначений. Через $C(0;1)$ обозначим пространство функций, непрерывных на отрезке $[0;1]$, а через $L^p(0;1)$ — пространство интегрируемых в p-й степени функций [5].

Определим функцию $\varphi(t)$, представляющую обобщенный метод суммирования и являющуюся аналогом сумматорной функции из [5], следующим образом.

Определение 3. Непрерывную справа в точке 0 монотонную функцию $\varphi(t)$ с

$$\varphi(0) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0, \quad \int\limits_0^\infty \varphi(t)\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt < \infty \tag{3}$$

назовем *обобщенной сумматорной функцией*, а метод суммирования рядов посредством этой функции — *обобщенным методом суммирования.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [4]. *Если ряд Хаара*

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\, \chi_k(t)$$

с произвольными действительными коэффициентами, сходится равномерно на $[0; 1]$*, то он является рядом Фурье — Хаара для своей суммы.*

Пусть вместо точных коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ функции $f(t)$ известны их приближенные значения $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ так, что удовлетворяется соотношение (1). Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 2 [4]. *Пусть* $f(t) \in S_p$*,* $1 \leqslant p < \infty$*,* $t \in [0, 1]$*,* $\alpha = \alpha(\delta)$ *монотонно стремится к нулю и* $\delta\alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$*. Тогда*

1) $f_\delta(\alpha, t) = \sum_{k=1}^\infty \varphi(\alpha k) c_k\, \chi_k(t)$ *принадлежит* $S_{p'}$*,* $p' = \max(2, p)$*;*

2) $f_\delta(\alpha, t)$ *равномерно на* $[0; 1]$ *стремится к* $f(t)$*.*

Учитывая условие (2), теорему 2 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 3 [4]. *Пусть последовательность действительных чисел* $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* (2) *и вместе с* $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ *— условию* (1)*. Пусть далее* $\alpha = \alpha(\delta)$ *монотонно стремится к нулю и* $\delta\alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$*. Тогда*

1) *Функции* $f(t) = \sum_{k=1}^\infty a_k\, \chi_k(t)$ *и* $f_\delta(\alpha, t) = \sum_{k=1}^\infty \varphi(\alpha k) c_k\, \chi_k(t)$ *принадлежат соответственно классам* S_p*,* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $S_{p'}$*,* $2 \leqslant p' < \infty$*.*

2) $f_\delta(\alpha, t)$ *равномерно на* $[0, 1]$ *стремится к* $f(t)$*.*

Регуляризованное суммирование ряда непрерывной функции. Классы S_p, $1 \leqslant p < \infty$, содержат достаточно большое количество непрерывных функций. Но поскольку не все непрерывные функции входят в классы S_p, то отдельное рассмотрение задачи для классов $C(0; 1)$ представляется целесообразным. Здесь мы докажем аналог теоремы 2 для функций из $C(0; 1)$. Мы убедимся, что, как и в предыдущей теореме, аппроксимирующая функция принадлежит классу $S_{p'}$, $2 \leqslant p' < \infty$.

Теорема 4. *Пусть* $f(t)$ *непрерывная на* $[0; 1]$ *функция,* $0 < \alpha \leqslant 1$*,* $\alpha = \alpha(\delta)$ *монотонно стремится к нулю и* $\delta\alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$*. Тогда*

$$f_\delta(\alpha, t) = \sum_{k=1}^\infty \varphi(\alpha k)\, c_k\, \chi_k(t)$$

1) *стремится к* $f(t)$ *равномерно на отрезке* $[0; 1]$*;*

2) *при фиксированном* α*,* $f_\delta(\alpha, t) \in S_{p'}$*,* $p' \geqslant 2$*.*

◁ Рассмотрим отклонение

$$\left|f(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\alpha k)c_k\,\chi_k(t)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{k(\alpha)}[1-\varphi(\alpha k)]a_k\,\chi_k(t)\right| + \left|\sum_{k=k(\alpha)+1}^{\infty}a_k\,\chi_k(t)\right|$$
$$+\left|\sum_{k=k(\alpha)+1}^{\infty}a_k\,\varphi(\alpha k)\chi_k(t)\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\alpha k)\gamma_k\chi_k(t)\right| = S_1+S_2+S_3+S_4,$$

где $\gamma_k = c_k - a_k$, $k = 0, 1, \ldots$

Отдельно оценим суммы S_1, S_2, S_3, S_4. Для S_1 получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{k(\alpha)}[1-\varphi(\alpha k)]a_k\,\chi_k(t)\right| \leqslant [1-\varphi(\alpha k(\alpha))]\sum_{k=1}^{k(\alpha)}|a_k\chi_k(t)|$$
$$\leqslant A[1-\varphi(\alpha k(\alpha))]\sum_{m=1}^{m(\alpha)-1}2^{\frac{m-1}{2}},$$

где $A = \mathrm{const}$, $k(\alpha) \leqslant 2^{m(\alpha)-1} \leqslant 2k(\alpha)$. Поскольку

$$\sum_{m=1}^{m(\alpha)-1}2^{\frac{m-1}{2}} \leqslant 2\sqrt{k(\alpha)},$$

следовательно,

$$S_1 \leqslant A_1[1-\varphi(\alpha k(\alpha))]\sqrt{k(\alpha)} = A_1[1-\varphi(\alpha k(\alpha))]k(\alpha)\frac{1}{\sqrt{k(\alpha)}},$$

где $A_1 = \mathrm{const}$. Ввиду непрерывности справа функции $\varphi(t)$ в точке $t = 0$, всегда можно выбрать α и, соответственно, число $k(\alpha)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varphi(\alpha k(\alpha)) \geqslant 1 - \frac{c}{k(\alpha)}.$$

Откуда следует, что

$$S_1 \leqslant \frac{c}{k(\alpha)}, \quad c = \mathrm{const},$$

и, следовательно, S_1 стремится к нулю при $\alpha \to 0$.

Сумма S_2 является остатком разложения непрерывной функции по системе функций Хаара и оценивается с помощью непрерывности этой функции следующим образом [4]:

$$S_2 \leqslant c_0\omega\left(\frac{1}{k(\alpha)}, f\right), \quad c_0 = \mathrm{const}\,.$$

Сумма

$$\sum_{k=k(\alpha)+1}^{\infty}a_k\,\varphi(\alpha k)\chi_k(t)$$

есть остаток равномерно сходящегося ряда. Действительно, так как $f(t)$ непрерывна, то частные суммы ее разложения

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\,\chi_k(t)$$

ограничены, а $\varphi(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \to 0$, следовательно, согласно признаку Дирихле, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi(\alpha k)\, \chi_k(t)$$

сходится равномерно, откуда следует, что S_3 равномерно стремится к нулю при $k(\alpha) \to \infty$.

Перейдем к оценке суммы S_4

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, \varphi(\alpha k)\, \chi_k(t)\right| = \left|\gamma_1\, \varphi(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj}\, \varphi(\alpha(2^{m-1}+j))\, \chi_{mj}(t)\right|$$
$$\leqslant |\gamma_1\, \varphi(\alpha)| + \sum_{m=1}^{\infty} \left|\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj}\, \varphi(\alpha(2^{m-1}+j))\, \chi_{mj}(t)\right|.$$

Поскольку

$$\left|\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj}\, \varphi(\alpha(2^{m-1}+j))\, \chi_{mj}(t)\right| \leqslant \delta \left(\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \varphi^2(\alpha(2^{m-1}+j))\, \chi^2_{mj}(t)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \delta\varphi(\alpha 2^{m-1}) 2^{\frac{m-1}{2}},$$

то

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, \varphi(\alpha k))\, \chi_k(t)\right| \leqslant \delta + \delta \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(\alpha 2^{m-1}) 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Отсюда, учитывая условия, наложенные на $\varphi(t)$ (см. (1)), нетрудно убедиться, что

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, \varphi(\alpha k))\, \chi_k(t)\right| \leqslant \delta + \delta \frac{\alpha^{-\frac{1}{2}}}{\ln 2} \int_0^{\infty} \varphi(t) t^{-\frac{1}{2}}\, dt \leqslant c_1 \delta(\alpha) \alpha^{-\frac{1}{2}},$$

где $c_1 = \mathrm{const}$.

Таким образом, первая часть теоремы доказана, так как сопоставление полученных для сумм S_1, S_2, S_3, S_4 оценок показывает, что равномерная сходимость $f_\delta(\alpha, t)$ к $f(t)$ обеспечена.

Докажем вторую часть теоремы. Из доказательства первой части, очевидно, что функция $f_\delta(\alpha, t)$ есть сумма равномерно сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) c_k \chi_k(t)$ и, что согласно теореме 1 функция $f_\delta(\alpha, t)$ представима своим рядом Фурье — Хаара. Это означает, что первое условие определения классов S_p выполнено. Не трудно убедиться, что коэффициенты функции $f_\delta(\alpha, t)$ удовлетворяют условию (2). Именно, при $p' \geqslant 2$ и фиксированном α

$$A_p(f_\delta(\alpha, t)) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\varphi(\alpha(2^{m-1}+j)) c_{mj}|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \varphi(\alpha 2^{m-1}) \left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \varphi(\alpha 2^{m-1}) \left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь мы воспользовались следующим известным неравенством [6]: если $0 < q < q'$, то

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant M} |U_j| \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{M} |U_j|^{q'}\right\}^{\frac{1}{q'}} \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{M} |U_j|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Обозначим $\alpha 2^x = t$, $\alpha \ln 2 \cdot 2^x dx = dt$. Тогда для $A_p(f_\delta(\alpha, t))$ получаем оценку

$$A_p(f_\delta(\alpha,t)) \leqslant c_2\alpha^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^\infty \varphi(t)t^{-\frac{1}{2}}\,dt = c_3\alpha^{-\frac{1}{2}}, \quad c_3 = \mathrm{const}\,.$$

Следовательно, для каждого фиксированного α функция $f_\delta(\alpha, t)$ принадлежит s_2. $\rhd$

Выводы. В работе исследуются ряды Хаара на корректность методом регуляризации Тихонова. Рассматривается задача регуляризованного суммирования для классов $C(0;1)$.

Доказана теорема об устойчивости и равномерной сходимости регуляризованного обобщенной сумматорной функцией ряда Хаара из класса непрерывных функций с приближенными коэффициентами, а также доказано, что аппроксимирующая функция принадлежит классу $S_{p'}$, $2 \leqslant p' < \infty$.

Литература

1. *Казарян М. Л.* Исследование задач цифровой обработки сигналов посредством дискретных ортогональных преобразований на устойчивость.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 2009.—81 с.
2. *Казарян М. Л.* Вейвлет-преобразования Хаара в системе телекоммуникаций и исследование их на устойчивость // Телекоммуникации.—2014.—№ 9.—С. 7–13.
3. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений.—М.: Мир, 1982.
4. *Соболь И. М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.—М.: Наука, 1969.—288 с.
5. *Тихонов А. Н.* Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 156, № 2.—С. 268–271.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциальных и интегральных исчислений. Т. 2.—М.: Наука, 1964.—463 с.
7. *Шовенгердт Р. А.* Дистанционное зондирование. Методы и модели обработки изображений.—М.: Техносфера, 2010.—560 с.
8. *Haar A.* Zur Theoria der orthogonalen Funktionsysteme // Math. Fnn.—1910.—Vol. 69.—P. 331–371.

Статья поступила 10 июля 2014 г.

Казарян Маретта Левоновна
Северо-Осетинский государственный университет,
доцент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;

Финансовый университет при правительстве России
заведующая кафедрой математики и информатики
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Молодежная, 7
E-mail: marettak@bk.ru

REGULARIZED SUMMATION OF HAAR SERIES OF CONTINUOUS FUNCTIONS

Kazarian M. L.

We study the problem of summation of Haar series of continuous functions. We present the proof of the stability and uniform convergence of Haar series regularized by generalized summation function for the class of continuous functions with approximate coefficients.

Key words: Haar transformation, Haar series, Tikhonov regularization method, regularizing multiplier, class of functions S_p, $1 \leqslant p < \infty$.