Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 34–40

УДК **517.9**

ОБ АЛГЕБРЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ, СВЯЗАННОЙ С ОПЕРАТОРОМ ПОММЬЕ

О. А. Иванова, С. Н. Мелихов

Изучены свойства сверточной алгебры, образованной топологическим сопряженным к некоторому (LF)-пространству целых функций одного комплексного переменного с введенным на нем умножением-сверткой. Это умножение определено с помощью оператора сдвига для оператора Поммье.

Ключевые слова: весовое пространство целых функций, алгебра аналитических функционалов, оператор Поммье, коммутант.

1. Введение

В работе [2] описаны операторы, линейно и непрерывно действующие в некотором счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых (в $\mathbb{C}$) функций и перестановочные в нем с оператором Поммье D_{0,g_0}, ассоциированным с некоторой функцией $g_0 \in E$. Пусть E' — топологическое сопряженное к E. Как показано в [2], коммутант $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ оператора D_{0,g_0} в кольце $\mathscr{L}(E)$ всех линейных непрерывных операторов в E изоморфен алгебре E' с операцией умножения (свертки) $\otimes$, определяемой с помощью оператора сдвига для оператора Поммье. Цель настоящей работы — продолжить исследование алгебры $(E', \otimes)$. Мы доказываем, что алгебры $(E', \otimes)$ и $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ также и топологически изоморфны, если E' снабдить слабой топологией, а $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ — топологией поточечной сходимости (когда в E введена слабая топология). Указанная «топологичность» изоморфизма применяется затем при решении задачи о представлении операторов из $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ в виде $D_{g_0,0}$-операторов бесконечного порядка. Кроме того, мы описываем мультипликативные функционалы на этих алгебрах. Отметим, что в общем случае мультипликативный функционал не является единственным. Существенным побудительным мотивом к данной работе послужила статья В. А. Ткаченко [7]. В [7] установлены подобные свойства коммутанта оператора обобщенного интегрирования I_P, действующего в сильном сопряженном к весовому (LB)-пространству целых функций, индикатриса роста которых при порядке $\rho > 0$ меньше заданной ρ-тригонометрически выпуклой функции со значениями в $(-\infty, +\infty]$ (см. [3]). При этом оператор I_P является сопряженным к оператору Поммье D_{0,e^P}, где P — некоторый многочлен.

2. Предварительные сведения

Приведем некоторые сведения из [1, 2], необходимые для дальнейшего. Для непрерывной функции $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ и функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ полагаем

$$p_v(f) := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp v(z)}.$$

Далее $v_{n,k} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, — непрерывные функции такие, что на $\mathbb{C}$

$$v_{n,k+1} \leqslant v_{n,k} \leqslant v_{n+1,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Положим $p_{n,k} := p_{v_{n,k}}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Как обычно, $A(\mathbb{C})$ обозначает пространство всех целых (в $\mathbb{C}$) функций. Для $n \in \mathbb{N}$ введем весовые пространства

$$E_n := \bigl\{f \in A(\mathbb{C}) : \ p_{n,k}(f) < +\infty \ (\forall\, k \in \mathbb{N})\bigr\}.$$

Каждое пространство E_n — пространство Фреше с фундаментальной последовательностью непрерывных преднорм $(p_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$; E_n непрерывно вложено в E_{n+1} для любого $n \in \mathbb{N}$. В пространстве $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ введем топологию индуктивного предела пространств E_n относительно отображений вложения E_n в E, т. е. $E = \mathrm{ind}_{n\to} E_n$.

Далее, будем предполагать, что функции $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, удовлетворяют следующему условию:

$$\begin{gathered}(\forall\, n)(\exists\, m)(\forall\, k)(\exists\, s)(\exists\, C \geqslant 0) : \\ \sup_{|t-z|\leqslant 1} v_{n,s}(t) + \ln(1 + |z|) \leqslant \inf_{|t-z|\leqslant 1} v_{m,k}(t) + C \quad (z \in \mathbb{C}).\end{gathered} \tag{1}$$

Условие (1) обеспечивает инвариантность E относительно дифференцирования, сдвига и умножения на независимую переменную. По [1, замечание 1] для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что всякое ограниченное в E_n множество относительно компактно в E_m.

Считаем далее, что пространство E содержит функцию, отличную от тождественного нуля. Тогда E содержит функцию $g_0 \in E$ такую, что $g_0(0) = 1$.

Зафиксируем функцию $g_0 \in E$, для которой $g_0(0) = 1$. Оператор Поммье D_{0,g_0}, $z \in \mathbb{C}$, ассоциированный с g_0, определим равенствами

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0, \end{cases}$$

$f \in E$. Оператор D_{0,g_0} линейно и непрерывно отображает E в E.

Через $\mathscr{L}(E)$ обозначим пространство всех линейных непрерывных операторов в E, через E' — топологическое сопряженное к E пространство.

Оператор сдвига T_z, $z \in \mathbb{C}$, для оператора Поммье D_{0,g_0} определяется следующим образом (см. [2, § 2]):

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{tf(t)g_0(z)-zf(z)g_0(t)}{t-z}, & t \neq z, \\ zg_0(z)f'(z) - zf(z)g_0'(z) + f(z)g_0(z), & t = z, \end{cases}$$

$f \in E$.

Следуя [2], введем в E' бинарную операцию $\otimes$. Для φ, $\psi \in E'$, $f \in E$ положим

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z\bigl(\psi(T_z(f))\bigr).$$

Из [2, лемма 9 (iii)] следует, что операция $\otimes$ корректно определена. Она ассоциативна и коммутативна.

Обозначим через $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ коммутант оператора D_{0,g_0} в кольце $\mathscr{L}(E)$, т. е. множество всех операторов $B \in \mathscr{L}(E)$ таких, что $BD_{0,g_0} = D_{0,g_0}B$ в E.

Для $\varphi \in E'$ положим

$$\kappa(\varphi)(f)(z) := \varphi(T_z(f)), \quad f \in E,\ z \in \mathbb{C}.$$

Далее δ_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, — дельта-функции: $\delta_\lambda(f) := f(\lambda)$, $f \in E$. Ясно, что $\delta_\lambda \in E'$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Отметим, что $\varphi = \delta_0(\kappa(\varphi))$, $\varphi \in E'$. Согласно [2, следствие 18] отображение $\kappa : (E', \otimes) \to \mathscr{K}(D_{0,g_0})$ — изоморфизм алгебр. При этом умножением в $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ является суперпозиция операторов.

3. Топологический изоморфизм алгебр $(E', \otimes)$ и $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$

Покажем далее, что алгебраический изоморфизм $\kappa : (E', \otimes) \to \mathscr{K}(D_{0,g_0})$ является также и топологическим, если E' и $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ наделить самыми слабыми естественными локально выпуклыми топологиями. Обозначим символом E'_σ пространство E' со слабой топологией $\sigma(E', E)$, заданной естественной двойственностью между E и E'. Через $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ обозначим пространство $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ с топологией поточечной (простой) сходимости, если в E введена слабая топология $\sigma(E, E')$ (см. [9, гл. III, § 3, с. 104, пример 4 (a)]). Такая топология (она называется *слабо-операторной*) часто используется в теории операторных алгебр, в спектральной теории (см., например, [8, гл. 4, §§ 1, 6–8]). Отметим, что вследствие бочечности E пространство $\mathscr{L}(E)$ алгебраически совпадает с пространством линейных слабо непрерывных в E операторов [10, гл. 8, § 8.6, с. 703, теорема 8.6.1]. В E'_σ топология задается семейством преднорм

$$q_\Delta(\varphi) := \sup_{f\in\Delta} |\varphi(f)|, \quad \varphi \in E',$$

где Δ — произвольное конечное подмножество E. В $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ локально выпуклая топология задается семейством преднорм

$$q_{\Delta,\Omega}(B) := \sup_{f\in\Delta,\, \varphi\in\Omega} |\varphi(B(f))|, \quad B \in \mathscr{K}(D_{0,g_0}),$$

где Δ и Ω — произвольные конечные подмножества E и E' соответственно.

Теорема 1. *Отображение $\kappa : E'_\sigma \to \mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ является топологическим изоморфизмом «на».*

$\triangleleft$ Покажем, что $\kappa : E'_\sigma \to \mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ непрерывно. Действительно, для любых конечных множеств $\Delta \subset E$, $\Omega \subset E'$, любого $\varphi \in E'$

$$q_{\Delta,\Omega}(\kappa(\varphi)) = \sup_{f\in\Delta,\psi\in\Omega} |\psi(\kappa(\varphi)(f))|$$
$$= \sup_{f\in\Delta,\psi\in\Omega} |\psi_z(\varphi(T_z(f)))| = \sup_{f\in\Delta,\psi\in\Omega} |(\psi\otimes\varphi)(f)| = \sup_{f\in\Delta,\psi\in\Omega} |(\varphi\otimes\psi)(f)|$$
$$= \sup_{f\in\Delta,\psi\in\Omega} |\varphi_z(\psi(T_z(f)))| = \sup_{f\in\Delta,\psi\in\Omega} |\varphi(h_f)| = q_{\widetilde{\Delta}}(\varphi),$$

где $\widetilde{\Delta} := \{h_f := \psi(T_\cdot(f)) : \psi \in \Omega\}$ — конечное подмножество E.

Поскольку T_0 — тождественный оператор, то для любого конечного множества $\Delta \subset E$, для любого $\varphi \in E'$, вследствие $\varphi = \delta_0(\kappa(\varphi))$,

$$q_\Delta(\varphi) = \sup_{f \in \Delta} |\varphi(f)| = \sup_{f \in \Delta} |\delta_0(\kappa(\varphi)(f))| = q_{\Delta,\Omega_0}(\kappa(\varphi)),$$

где $\Omega_0 := \{\delta_0\} \subset E'$. Следовательно, обратное к κ отображение $\kappa^{-1} : \mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0}) \to E'_\sigma$ непрерывно. $\triangleright$

Применим полученный топологический результат к задаче о характере аппроксимации операторов из $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ многочленами от D_{0,g_0}. В [2, следствие 20] показано, что множество $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ совпадает с замыканием множества многочленов от оператора D_{0,g_0} в $\mathscr{L}(E)$ с топологией простой (поточечной) сходимости, если E наделено своей естественной топологией (LF)-пространства. Ниже пойдет речь о представлении операторов из $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ в виде рядов по операторам D^n_{0,g_0}, $n \geqslant 0$, с постоянными коэффициентами, т. е. в виде D_{0,g_0}-операторов бесконечного порядка (с постоянными коэффициентами). Существенным при этом является следующий результат.

Лемма 2 [2, лемма 7]**.** *Для $n \in \mathbb{N}$ существуют числа $c_{k,n} \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, такие, что для функционалов $\varphi_0 := \delta_0$, $\varphi_n(f) := f^{(n)}(0)/n! + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} f^{(k)}(0)$, $f \in E$, выполняются равенства $D^n_{0,g_0} = \kappa(\varphi_n)$, $n \geqslant 0$.*

Замечание 3. (a) Если $g_0 \equiv 1$, то $\varphi_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$, $f \in E$, $n \geqslant 0$.

(b) Нетрудно видеть, что ядром оператора D^n_{0,g_0}, $n \geqslant 1$, в E является множество

$$\operatorname{Ker}(D^n_{0,g_0}) = \{Pg_0 : P \text{ — многочлен и } \deg(P) \leqslant n-1\}.$$

Введем функции $h_n(z) := z^n g_0(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 0$. Тогда $h_n \in E$ и $D^n_{0,g_0}(h_n) = g_0$ для любого целого $n \geqslant 0$ и $D^n_{0,g_0}(h_k) = 0$, если $0 \leqslant k < n$.

(c) Из (b) вытекает следующее свойство единственности сходящихся в $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ рядов по системе $\{D^n_{0,g_0} : n \geqslant 0\}$:

Если ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n D^n_{0,g_0}$ $(a_n \in \mathbb{C})$ сходится в $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ к нулю, то $a_n = 0$ для любого $n \geqslant 0$.

Таким образом, проблема представления операторов из $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ в виде D_{0,g_0}-операторов бесконечного порядка — это проблема базисности системы $\left(D^n_{0,g_0}\right)_{n \geqslant 0}$ в $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ (с некоторой локально выпуклой топологией).

Далее будем последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов локально выпуклого пространства F называть *абсолютным базисом* в F, если для любого $x \in F$ существует единственная числовая последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$, причем ряд абсолютно сходится к x в F. Абсолютная сходимость в F ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ означает, что $\sum_{n=1}^\infty |a_n| q(x_n) < +\infty$ для любой непрерывной на преднормы q. Заметим, что это определение абсолютного базиса отличается от приведенного в книге А. Пича [6, § 10.1].

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

Следствие 4. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ *является абсолютным базисом в* E'_σ*;*

(ii) $(D^n_{0,g_0})_{n\geqslant 0}$ *является абсолютным базисом в* $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$*.*

Замечание 5. Результаты о представлении в виде D_{0,g_0}-операторов бесконечного порядка операторов, перестановочных с обычным оператором Поммье (т. е. для $g_0 \equiv 1$) в пространстве Фреше функций, аналитических в открытом круге, ранее были получены Н. И. Нагнибидой [5], Н. Е. Линчук [4].

Пусть выполняется условие (ii). Тогда для любого $\varphi \in E'$ существует последовательность $(a_n)_{n\geqslant 0}$ комплексных чисел такая, что $\kappa(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_{0,g_0}^n$, где ряд сходится к $\kappa(\varphi)$ в следующем смысле: для любых $f \in E$, $\psi \in E'$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi(D_{0,g_0}^n(f))$ сходится абсолютно к $\psi(\kappa(\varphi))(f)$, т. е. для любого $f \in E$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D_{0,g_0}^n(f)$ слабо сходится в E к $\kappa(\varphi)(f)$. В большом числе случаев отмеченная сходимость влечет более сильную естественную.

Это так, например, если пространство E является ядерным (см. [6, гл. 4], [9, гл. 4, § 10], [12, гл. 3, § 28]).

Приведем одно достаточное условие, при котором E ядерно.

Лемма 6. *Предположим, что выполняется следующее условие:*

$$(\forall\, n)(\forall\, k)(\exists\, s)(\exists\, C \geqslant 0):\\ \sup_{|t-z|\leqslant 1} v_{n,s}(t) + \ln(1+|z|) \leqslant \inf_{|t-z|\leqslant 1} v_{n,k}(t) + C \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{2}$$

Тогда пространство E ядерно.

$\lhd$ Отметим, что из условия (2) вытекает условие (1). Вследствие [11, предложение 2.1] каждое пространство Фреше E_n ядерно. Так как счетный индуктивный предел ядерных пространств — тоже ядерное пространство [6, 5.2.4], то E ядерно. $\rhd$

Символом $\mathscr{K}_p(D_{0,g_0})$ обозначим пространство $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ с топологией поточечной сходимости, если E наделено его естественной топологией (LF)-пространства.

Следствие 7. *Пусть пространство E ядерно. Следующие утверждения равносильны:*

(i) $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ *является абсолютным базисом в* E'_σ*;*

(ii) $(D_{0,g_0}^n)_{n\geqslant 0}$ *является абсолютным базисом в* $\mathscr{K}_p(D_{0,g_0})$.

В частности, условия (i) *и* (ii) *равносильны, если выполняется условие* (2).

$\lhd$ Это утверждение вытекает из следствия 4 и того, что для ядерного E слабо абсолютно суммируемые и абсолютно суммируемые в E семейства — одни и те же [6, предложение 4.2.2]. $\rhd$

4. Мультипликативные функционалы на $(E', \otimes)$

Хорошо известно, какую важную роль в теории коммутативных банаховых алгебр играют мультипликативные функционалы на этих алгебрах. Ниже мы опишем мультипликативные функционалы на алгебре $(E', \otimes)$, задаваемые элементами из E. В отличие от банахова случая множество таких функционалов оказывается «бедным»: его мощность зависит от «числа» нулей функции g_0, и если g_0 не имеет нулей, то ненулевой мультипликативный функционал единственен. Ранее единственность мультипликативного функционала на алгебре линейных непрерывных операторов, перестановочных с обобщенным интегрированием в некотором пространстве аналитических функционалов, была установлена В. А. Ткаченко [7, § 4, ж)].

Для любого $g \in E$ функционал

$$G(\varphi) := \varphi(g), \quad \varphi \in E',$$

линеен и непрерывен на E'_σ. Функционал G, $g \in E$, называется мультипликативным на $(E', \otimes)$, если $G(\varphi \otimes \psi) = G(\varphi)G(\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in E'$.

Теорема 8. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Функционал G ($g \in E$) — ненулевой мультипликативный функционал на $(E', \otimes)$.*

(ii) $g = g_0$ *или существует нуль* $\lambda \in \mathbb{C}$ *функции* g_0 *такой, что* $g(z)(1 - z/\lambda) = g_0(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Если функция g_0 *не имеет нулей, то единственным ненулевым мультипликативным функционалом является* G *при* $g = g_0$.

$\lhd$ (i)$\Rightarrow$(ii): Пусть G — ненулевой мультипликативный функционал на $(E', \otimes)$. Тогда для любых $\varphi, \psi \in E'$

$$G(\varphi)G(\psi) = \varphi(g)\psi(g) = \varphi_v\left(\psi_u\left(\frac{ug(u)g(v) - vg(v)g(u)}{u - v}\right)\right). \tag{3}$$

С другой стороны,

$$G(\varphi)G(\psi) = G(\varphi \otimes \psi) = (\varphi \otimes \psi)(g) = \varphi_v\left(\psi_u\left(\frac{ug(u)g_0(v) - vg(v)g_0(u)}{u - v}\right)\right). \tag{4}$$

Зафиксируем $z, t \in \mathbb{C}$, $z \neq t$. Для $\varphi := \delta_z$, $\psi := \delta_t$, вследствие равенств (3), (4),

$$\frac{tg(t)g_0(z) - zg(z)g_0(t)}{t - z} = \frac{tg(t)g(z) - zg(z)g(t)}{t - z},$$

откуда

$$tg(t)g_0(z) - zg(z)g_0(t) = tg(t)g(z) - zg(z)g(t)$$

и

$$tg(t)(g_0(z) - g(z)) = zg(z)(g_0(t) - g(t)).$$

Отсюда следует, что мероморфная функция $\frac{g_0(z)-g(z)}{zg(z)}$, зависящая от z, является тождественной постоянной. Значит, найдется $c \in \mathbb{C}$ такое, что

$$g_0(z) = g(z)(1 - cz), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если $c = 0$, то $g_0 = g$. Если же $c \neq 0$, то $\lambda := 1/c$ — нуль функции g_0 и

$$g_0(z) = g(z)(1 - z/\lambda), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(ii)$\Rightarrow$(i): Если $g \in E$ и для некоторого $c \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $g(z)(1 - cz) = g_0(z)$, $z \in \mathbb{C}$, то для любых $\varphi, \psi \in E'$

$$G(\varphi \otimes \psi) = \varphi_t\left(\psi_z\left(\frac{tg(t)g(z)(1 - cz) - zg(z)g(t)(1 - ct)}{t - z}\right)\right) = \varphi(g)\psi(g). \rhd$$

Следствие 9. *Каждое гиперподпространство*

$$H := \{\varphi \in E' : \varphi(g_0) = 0\} \text{ и } H_\lambda := \{\varphi \in E' : \varphi(g) = 0\},$$

где $g(z) = g_0(z)/(1 - z/\lambda)$, λ — *нуль* g_0, *является* $\sigma(E', E)$*-замкнутым максимальным идеалом в алгебре* $(E', \otimes)$.

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева // Уфимск. мат. журн.—2014.—Т. 6, № 3.—С. 17—27.
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.

3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с.
4. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения // Мат. заметки.—1988.—Т. 44, № 6.—С. 794–802.
5. *Нагнибида Н. И.* О линейных непрерывных операторах в аналитическом пространстве, перестановочных с оператором дифференцирования // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. науч. сб. Харьковского гос. ун-та им. А. М. Горького.—Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1966.—№ 2.—С. 160–164.
6. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1967.—271 с.
7. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки.—1979.—Т. 29, № 2.—С. 271—282.
8. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу.—М.: МЦНМО, 2004.—552 с.
9. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—360 с.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
11. *Haslinger F.* Weighted spaces of entire functions // Indiana Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, № 1.—P. 193–208.
12. *Meise R., Vogt D.* Introduction to Functional Analysis.—N. Y.: Oxford Univ. Press, 1997.—437 p.

Статья поступила 12 августа 2016 г.

Иванова Ольга Александровна
Южный федеральный университет,
ассистент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: neo_ivolga@mail.ru

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: melih@math.rsu.ru

ON AN ALGEBRA OF ANALYTIC FUNCTIONALS CONNECTED WITH A POMMIEZ OPERATOR

Ivanova O. A., Melikhov S. N.

We study properties of a convolution algebra formed by the dual E' of a countable inductive limit E of weighted Fréchet spaces of entire funtions of one complex variable with the multiplication-convolution $\otimes$ which is defined with the help of the shift operator for a Pommiez operator. The algebra $(E', \otimes)$ is isomorphic to the commutant of a Pommiez operator in the ring of all continuous linear operators in E. We prove that this isomorphism is topological if E' is endowed with the weak topology and the corresponding commutant is endowed with the weakly operator topology. This result we use for powers of a Pommiez operator series expansions for all continuous linear operators commuting with this Pommiez operator on E. We describe also all nonzero multiplicative functionals on the algebra $(E', \otimes)$.

Key words: weighted space of entire functions, algebra of analytic functionals, Pommiez operator, commutant.