Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 41–49

УДК **517.952**

О РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА СО СМЕШАННОЙ СТАРШЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

И. В. Рахмелевич

Проведен анализ решений многомерного дифференциального уравнения в частных производных произвольного порядка, содержащего смешанную старшую частную производную и степенные нелинейности по неизвестной функции и ее первым производным. Для исследования данного уравнения применяется метод функционального разделения переменных. В результате получены частные решения рассматриваемого уравнения. Доказаны некоторые теоремы, позволяющие понизить порядок уравнения.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, функциональное разделение переменных, степенная нелинейность.

Введение

В современной теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных большинство точных решений получено для уравнений первого и второго порядков. В то же время, как потребности развития теории,так и практических приложений приводят к задачам нахождения решений для уравнений более высокого порядка. Так, в работах [1–5] проводится исследование линейных уравнений высших порядков с переменными коэффициентами, содержащих смешанную старшую производную, в том числе получены необходимые и достаточные условия факторизации такого уравнения. Целью данной работы является исследование уравнения произвольного порядка со смешанной старшей производной, содержащего степенные нелинейности по неизвестной функции и ее первым производным. При этом используется метод разделения переменных, который является одним из наиболее эффективных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [6–10].

1. Постановка задачи. Разделение переменных в уравнении со степенными нелинейностями

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение в частных производных порядка N относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$:

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1 \dots \partial x_N} = \varphi(u) \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}. \tag{1}$$

Простейший случай двумерного уравнения вида (1) был рассмотрен в работе [11]. Предполагаем, что $\varphi(u) = bu^{\gamma}$, т. е. уравнение (1) содержит нелинейности степенного типа как по неизвестной функции, так и по ее первым производным, причем $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta_n \in \mathbb{R}$. Также должны выполняться следующие ограничения:

1) если $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (т. е. вещественное число с ненулевой дробной частью), то решение уравнения (1) $u \geqslant 0$;

2) при тех значениях n, при которых $\beta_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, производная от решения уравнения (1) $\frac{\partial u}{\partial x_n} \geqslant 0$.

Для решения уравнения (1) будем использовать метод функционального разделения переменных [6, 7]. В соответствии с указанным методом решение уравнения (1) ищем в виде:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = U(y), \quad y = \sum_{n=1}^{N} y_n(x_n). \tag{2}$$

В (2) входят неизвестные функции $U(y)$, $y_n(x_n)$, которые подлежат определению в дальнейшем. Подставляя выражение (2) в уравнение (1), приходим к соотношению:

$$\Phi(y) = \prod_{n=1}^{N} [y_n'(x_n)]^{\beta_n - 1}, \tag{3}$$

где

$$\Phi(y) \equiv \frac{U^{(N)}(y)}{b[U'(y)]^{\beta_\Sigma}[U(y)]^{\gamma}}. \tag{4}$$

Здесь и далее будем использовать обозначения: $\beta_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} \beta_n$, $I = \{1, \ldots, N\}$, — множество значений индекса n, нумерующего независимые переменные, Ω — множество значений $n \in I$, для которых $\beta_n \neq 1$; $\overline{\Omega} = I \setminus \Omega$.

Пусть $\Omega \neq \varnothing$. Тогда существует хотя бы одно значение $n = n_1$, при котором $\beta_{n_1} \neq 1$. Продифференцируем соотношение (3) по x_{n_1}. Тогда в результате элементарных преобразований с учетом второй из формул (2), находим

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = W_{n_1}(x_{n_1}) \equiv (\beta_{n_1} - 1)\frac{y''_{n_1}(x_{n_1})}{[y'_{n_1}(x_{n_1})]^2}. \tag{5}$$

Правая часть соотношения (5) зависит только от переменной x_{n_1}. Поэтому произвольно выбрав некоторое значение $n_2 \neq n_1$ и продифференцировав (5) по x_{n_2}, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_{n_2}} \left(\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} \right) = 0. \tag{6}$$

Будем предполагать, что искомое решение существенно зависит от всех переменных, т. е. $y_n(x_n) \neq \mathrm{const}$ для любого n. Тогда, из (6) с учетом (2) следует:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} \right) = 0. \tag{7}$$

Решая уравнение (7) относительно $\Phi(y)$, находим:

$$\Phi(y) = \Phi_0 \exp(\alpha y), \tag{8}$$

где Φ_0, α — произвольные постоянные. Из (8) и (4) следует обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) относительно функции $U(y)$:

$$U^{(N)}(y) - B_0[U'(y)]^{\beta_\Sigma}[U(y)]^{\gamma} \exp(\alpha y) = 0, \tag{9}$$

где введена новая постоянная

$$B_0 = b\Phi_0. \tag{10}$$

Для нахождения функций $y_n(x_n)$ используем соотношение (3). Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\alpha = 0$. Тогда из (3) с учетом (8) и (10), следует

$$\prod_{n=1}^{N} [y_n'(x_n)]^{\beta_n - 1} = \frac{B_0}{b}, \tag{11}$$

откуда находим

$$y_n(x_n) = c_n x_n + y_{n0}, \quad n \in \Omega, \tag{12}$$

где $y_n(x_n)$ — произвольная функция при $n \in \overline{\Omega}$.

Приведем некоторые частные решения уравнения (9) для произвольного N, и соответствующие им решения уравнения (1).

а) Степенное решение

$$U(y) = U_0 y^{\sigma}. \tag{13}$$

Подстановка решения (13) в уравнение (9) позволяет получить выражения для постоянных U_0, σ:

$$\sigma = \frac{\beta_\Sigma - N}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}, \quad U_0 = \left(\frac{Q_N(\sigma)}{B_0 \sigma^{\beta_\Sigma}}\right)^{\frac{1}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}}, \quad Q_N(\sigma) = \sigma(\sigma - 1)\ldots(\sigma - N + 1). \tag{14}$$

Тогда, подставляя (12) в (13), получаем решение уравнения (1):

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = U_0 \left(\sum_{n \in \Omega} c_n x_n + \sum_{n \in \overline{\Omega}} y_n(x_n) + y_0\right)^{\sigma}, \tag{15}$$

где $y_n(x_n)$ — произвольные функции, y_0, c_n — произвольные постоянные. Постоянные c_n должны удовлетворять условию, вытекающему из (11):

$$\prod_{n \in \Omega} c_n^{\beta_n - 1} = \frac{B_0}{b}. \tag{16}$$

На основании анализа выражений (14) перечислим частные случаи, в которых решение (15) не существует или вырождается в тривиальное решение:

– при $\beta_\Sigma + \gamma = 1$ решение (15) не существует;

– если $\sigma = n$ при некотором $1 \leqslant n \leqslant N - 1$, то $U_0 = 0$ при $\beta_\Sigma + \gamma > 1$, и решение (15) вырождается в тривиальное $u(x_1, x_2, \ldots, x_N) \equiv 0$, а при $\beta_\Sigma + \gamma \leqslant 1$ решение (15) не существует;

– если $\sigma = 0$ (т. е. $\beta_\Sigma = N$), то при $\gamma < 1 - N$ решение (15) вырождается в тривиальное, а при $\gamma > 1 - N$ это решение не существует.

б) Логарифмическое решение

$$U(y) = U_0 \ln(y). \tag{17}$$

Подставляя решение (17) в уравнение (9), находим, что постоянная U_0 определяется выражением

$$U_0 = \left(\frac{(-1)^{N-1}(N-1)!}{B_0}\right)^{\frac{1}{N-1}}. \tag{18}$$

Подставляя (12) в (17), получаем решение уравнения (1)

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = U_0 \ln\left(\sum_{n\in\Omega} c_n x_n + \sum_{n\in\overline{\Omega}} y_n(x_n) + y_0\right). \tag{19}$$

Здесь, так же как и в (15), $y_n(x_n)$ — произвольные функции, c_n — произвольные постоянные, удовлетворяющие условию (16). Решение (19) существует при выполнении условий $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta_\Sigma = N$.

в) Экспоненциальное решение

$$U(y) = U_0 \exp(\sigma y). \tag{20}$$

Здесь U_0 — произвольное, а σ определяется формулой:

$$\sigma = B_0^{\frac{1}{N-\beta_\Sigma}}. \tag{21}$$

Соответствующее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = U_0 \exp\left\{\sigma\left(\sum_{n\in\Omega} c_n x_n + \sum_{n\in\overline{\Omega}} y_n(x_n) + y_0\right)\right\}. \tag{22}$$

В рассматриваемом случае решение (22) существует при выполнении условий $\alpha = 0$, $\beta_\Sigma + \gamma = 1$, $\beta_\Sigma \neq N$.

Выше было сделано предположение, что $\Omega \neq \varnothing$. Если же имеет место противоположный случай $\Omega = \varnothing$, т. е. $\beta_n = 1$ при всех $n \in I$, то из (3) следует, что функции $y_n(x_n)$ являются произвольными при всех $n \in I$, а уравнение для функции $U(y)$ имеет вид (9), в котором необходимо положить $\alpha = 0$.

Случай 2. $\alpha \neq 0$. Тогда (3) с учетом (8) и (10) можно записать в виде

$$\prod_{n=1}^{N} [y_n'(x_n)]^{\beta_n - 1} = \frac{B_0}{b} \prod_{n=1}^{N} \exp[\alpha y_n(x_n)]. \tag{23}$$

Очевидно, что при $\alpha \neq 0$ соотношение (23) может быть удовлетворено только в том случае, если $\Omega = I$, т. е. $\beta_n \neq 1$ при всех $n \in I$. Из (23) следует уравнение для функций $y_n(x_n)$:

$$[y_n'(x_n)]^{\beta_n - 1} \exp[-\alpha y_n(x_n)] = \mu_n, \tag{24}$$

где μ_n — произвольные постоянные, удовлетворяющие условию

$$\prod_{n=1}^{N} \mu_n = \frac{B_0}{b}. \tag{25}$$

Решение уравнения (24) имеет вид

$$y_n(x_n) = \frac{1-\beta_n}{\alpha} \ln\left\{\frac{\alpha}{1-\beta_n} \mu_n^{1/(\beta_n - 1)} (x_n - x_{n0})\right\}. \tag{26}$$

При $\alpha \neq 0$ так же как и в предыдущем случае, уравнение (9) имеет частное решение (20). Постоянные U_0, σ определяются выражениями:

$$\sigma = \frac{\alpha}{1 - (\beta_\Sigma + \gamma)}, \qquad U_0 = \left(\frac{\sigma^{N-\beta_\Sigma}}{B_0}\right)^{\frac{1}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}}.$$

Используя выражения (2), (20), (26) и условие (25), после некоторых преобразований получаем соответствующее решение уравнения (1):

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \tilde{U}_0 \prod_{n=1}^{N} (x_n - x_{n0})^{\rho_n}, \qquad (27)$$

где ρ_n, $\tilde{U}_0$ определяются выражениями

$$\rho_n = \frac{\beta_n - 1}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}, \qquad \tilde{U}_0 = b^{\frac{1}{1-(\beta_\Sigma+\gamma)}} \prod_{n=1}^{N} \rho_n^{-\rho_n}. \qquad (28)$$

Решение (27) не существует в случае $\beta_\Sigma + \gamma = 1$.

Таким образом, уравнение (1) имеет решения, определяемые формулами (15), (19), (22), (27), а входящие в них дополнительные параметры определяются выражениями (14), (18), (21), (28). При $\Omega = I$ ($\beta_n \neq 1$ при всех $n \in I$) формулы (15), (19) и (22) описывают решения уравнения (1) типа бегущей волны.

2. Понижение порядка уравнения

В данном параграфе рассматриваются теоремы, которые позволяют понизить порядок и размерность (число независимых переменных) уравнения (1).

Пусть множество I, введенное выше, разбито на K непересекающихся подмножеств I_k ($k = 1, \ldots, K$) и, соответственно, множество переменных $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ разбито на K непересекающихся подмножеств $X_k = \{x_n\}_{n \in I_k}$. Здесь и далее N_k — число элементов в подмножествах I_k, X_k; $\beta_{\Sigma_k} = \sum_{n \in I_k} \beta_n$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть функции $u_k(X_k)$ при всех $k = 1, \ldots, K$ являются решениями уравнений*

$$\frac{\partial^{N_k} u_k}{\prod\limits_{n \in I_k} \partial x_n} = b_k [u_k(X_k)]^{\beta_\Sigma + \gamma - \beta_{\Sigma k}} \prod_{n \in I_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}, \qquad (29)$$

где b_k — некоторые постоянные, удовлетворяющие условиям:

$$\prod_{k=1}^{K} b_k = b. \qquad (30)$$

Тогда функция

$$u(X) = \prod_{k=1}^{K} u_k(X_k) \qquad (31)$$

является решением уравнения (1).

◁ Рассмотрим выражение

$$\Psi(u(X)) \equiv \frac{\partial^N u}{\partial x_1 \ldots \partial x_N} u^{-\gamma} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^{-\beta_n}. \qquad (32)$$

Подставим в (32) выражение (31). Тогда $\Psi(u(X))$ можно представить в виде

$$\Psi(u(X)) = \prod_{k=1}^{K} \Psi_k(u_k(X_k)), \qquad (33)$$

где

$$\Psi_k(u_k(X_k)) = \frac{\partial^{N_k} u_k}{\prod\limits_{n\in I_k} \partial x_n} [u_k(X_k)]^{-(\beta_\Sigma+\gamma-\beta_{\Sigma k})} \prod_{n\in I_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n}. \tag{34}$$

По условию теоремы, функции $u_k(X_k)$ удовлетворяют уравнениям (29), поэтому из (34) получаем, что $\Psi_k(u_k(X_k)) = b_k$. Тогда, из (33) с учетом (30) следует, что $\Psi(u(X)) = b$. Отсюда, учитывая (32), получаем, что функция (31) является решением уравнения (1). $\rhd$

Доказанная выше теорема 1 позволяет получить множество решений уравнения (1), которые могут быть представлены в виде произведения решений уравнений аналогичного вида, имеющих более низкий порядок.

Теоремы 2 и 3, которые приводятся ниже, определяют возможность понижения порядка уравнения (1) для частных случаев, когда параметры уравнения удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. В этих теоремах предполагается, что $K = 2$, т. е. множество I разбито на непересекающиеся подмножества I_1, I_2, которым соответствуют подмножества переменных X_1, X_2.

Теорема 2. *Пусть параметры, входящие в уравнение* (1), *удовлетворяют условиям:*

$$\gamma = 0, \quad \beta_n = 0, \tag{35}$$

причем второе из этих условий выполняется для всех $n \in I_1$. Тогда уравнение (1) *имеет решение вида*

$$u(X) = u_1(X_1)u_2(X_2) + u_0(X_1). \tag{36}$$

Здесь $u_0(X_1)$ — произвольная функция, а функции $u_1(X_1)$, $u_2(X_2)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^{N_1} u_1}{\prod\limits_{n\in I_1} \partial x_n} = b_1[u_1(X_1)]^{\beta_{\Sigma 2}}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n\in I_2} \partial x_n} = b_2 \prod_{n\in I_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}. \tag{38}$$

Произвольные постоянные b_1, b_2, входящие в (37), (38), *удовлетворяют условию*

$$b_1 b_2 = b. \tag{39}$$

$\lhd$ Подставим выражение (36) в уравнение (1), откуда после элементарных преобразований получаем:

$$[u_1(X_1)]^{-\beta_{\Sigma 2}} \frac{\partial^{N_1} u_1}{\prod\limits_{n\in I_1} \partial x_n} \prod_{n\in I_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n} \frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n\in I_2} \partial x_n}$$
$$= b\big[u_1(X_1)u_2(X_2) + u_0(X_1)\big]^{\gamma} \prod_{n\in I_1} \left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}. \tag{40}$$

В силу условий (35), второй и третий сомножители в правой части уравнения (40) равны 1. Тогда это уравнение сводится к следующему:

$$\left\{[u_1(X_1)]^{-\beta_{\Sigma 2}} \frac{\partial^{N_1} u_1}{\prod\limits_{n\in I_1} \partial x_n}\right\} \cdot \left\{\prod_{n\in I_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n} \frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n\in I_2} \partial x_n}\right\} = b. \tag{41}$$

Так как первый и второй сомножители в левой части (41) зависят от разных групп переменных, а их произведение равно постоянной, то отсюда следует, что функции $u_1(X_1), u_2(X_2)$ должны удовлетворять уравнениям (37), (38), а входящие в них постоянные – условию (39). $\triangleright$

Теорема 3. *Пусть параметры, входящие в уравнение* (1), *удовлетворяют условиям:*

$$\gamma = 0, \quad \beta_{\Sigma 1} = 0 \tag{42}$$

для некоторого подмножества I_1. *Тогда уравнение* (1) *имеет решение вида:*

$$u(X) = u_1(z_1)u_2(X_2) + u_0(z_1). \tag{43}$$

Переменная z_1, *входящая в* (43), *определяется выражением:*

$$z_1 = \sum_{n \in \Omega_1} c_n x_n + \sum_{n \in \overline{\Omega}_1} \zeta_n(x_n). \tag{44}$$

Здесь $\Omega_1 \subset I_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset I_1$ *— множества значений индекса* n, *для которых* $\beta_n \neq 1$, $\beta_n = 1$ *соответственно;* c_n *— произвольные постоянные,* $u_0(z_1)$, $\zeta_n(x_n)$ *— произвольные функции; функция* $u_2(X_2)$ *удовлетворяет уравнению* (38), *а функция* $u_1(z_1)$ *удовлетворяет следующему ОДУ:*

$$\frac{d^{N_1} u_1}{dz_1^{N_1}} = b_1 [u_1(z_1)]^{\beta_{\Sigma 2}}. \tag{45}$$

Постоянные b_1, b_2, c_n *должны удовлетворять следующему дополнительному условию:*

$$b_1 b_2 = b \prod_{n \in \Omega_1} c_n^{\beta_n - 1}. \tag{46}$$

$\triangleleft$ Подставим выражения (43), (44) в уравнение (1). Тогда левая часть уравнения после элементарных преобразований приводится к виду:

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1 \ldots \partial x_N} = \frac{d^{N_1} u_1}{dz_1^{N_1}} \cdot \frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n \in I_2} \partial x_n} \cdot \prod_{n \in \Omega_1} c_n \cdot \prod_{n \in \overline{\Omega}_1} \zeta_n'(x_n). \tag{47}$$

Преобразуем также правую часть уравнения (1) с учетом первого из условий (42)

$$\varphi(u) \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^{\beta_n} = b \prod_{n \in I_1} \left(u_2(X_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \right)^{\beta_n} \cdot \prod_{n \in I_2} \left(u_1(z_1) \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}. \tag{48}$$

В свою очередь, первое произведение в правой части (48) может быть записано в виде

$$\prod_{n \in I_1} \left(u_2(X_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \right)^{\beta_n} = \left(u_2(X_2) \frac{du_1}{dz_1} + \frac{du_0}{dz_1} \right)^{\beta_{\Sigma 1}} \cdot \prod_{n \in \Omega_1} c_n^{\beta_n} \cdot \prod_{n \in \overline{\Omega}_1} \zeta_n'(x_n). \tag{49}$$

В силу второго из условий (42), первый сомножитель в правой части (49) равен 1. Тогда, используя соотношения (47)–(49), после элементарных преобразований уравнение (1) можно представить в виде

$$\left\{ \frac{d^{N_1} u_1}{dz_1^{N_1}} [u_1(z_1)]^{-\beta_{\Sigma 2}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n \in I_2} \partial x_n} \prod_{n \in I_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n} \right)^{-\beta_n} \right\} = b \prod_{n \in \Omega_1} c_n^{\beta_n - 1}. \tag{50}$$

Так как первый и второй сомножители в фигурных скобках в левой части (50) зависят от разных переменных, а их произведение равно постоянной, то уравнение (50) можно удовлетворить только в том случае, если:

$$\frac{d^{N_1}u_1}{dz_1^{N_1}}[u_1(z_1)]^{-\beta_{\Sigma 2}} = b_1, \quad \frac{\partial^{N_2}u_2}{\prod\limits_{n\in I_2}\partial x_n}\prod_{n\in I_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n} = b_2, \tag{51}$$

где b_1, b_2 — некоторые постоянные, удовлетворяющие условию (46).

Из (51) следует, что функции $u_1(z_1)$, $u_2(X_2)$ удовлетворяют уравнениям (45), (38) соответственно. $\triangleright$

Заключение. Таким образом, в данной работе с помощью метода функционального разделения переменных исследовано многомерное дифференциальное уравнение, содержащее смешанную старшую частную производную по всем независимым переменным и степенные нелинейности по неизвестной функции и ее первым производным. Получены частные решения со степенными, экспоненциальными и логарифмическими функциями от независимых переменных. Доказаны теоремы, позволяющие понизить порядок рассматриваемого уравнения.

Литература

1. *Бондаренко Б. А.* Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных.—Ташкент: ФАН, 1987.—146 с.
2. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.—Казань: Казанское мат. об-во, 2001.—226 с.
3. *Уткина Е. А.* Об одном дифференциальном уравнении со старшей частной производной в трехмерном пространстве // Диф. уравнения.—2005.—Т. 41, № 5.—С. 697–701.
4. *Миронов А. Н.* Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}_n$ // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 584–594.
5. *Жегалов В. И., Тихонова О. А.* Факторизация уравнений с доминирующей старшей частной производной // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 66–72.
6. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения.—М.: Физматлит, 2002.—432 с.
7. *Полянин А. Д., Журов А. И.* Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Докл. РАН.—2002.—Т. 382, № 5.—С. 606–611.
8. *Рахмелевич И. В.* О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика.—2013.—№ 3.—С. 37–44.
9. *Рахмелевич И. В.* Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика.—2014.—№ 1.—С. 42–50.
10. *Miller J., Rubel L. A.* Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // J. of Physics A.—1993.—Vol. 26.—P. 1901–1913.
11. *Рахмелевич И. В.* О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика.—2015.—№ 1.—С. 12–19.

Статья поступила 11 августа 2015 г.

Рахмелевич Игорь Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин
РОССИЯ, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

ON THE SOLUTIONS OF MULTI-DIMENSIONAL ARBITRARY ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH MIXED SENIOR PARTIAL DERIVATIVE AND POWER-LAW NON-LINEARITIES

Rakhmelevich I. V.

We study the solutions of a multi-dimensional differential equation of arbitrary order containing mixed senior partial derivative and power-law non-linearities on unknown function and its first derivatives. The method of functional separation of variables is applied for examining of this equation. The particular solutions of the equation under consideration are obtained. Some theorems which permit to decrease the order of this equation are proved.

Key words: partial differential equation, functional separation of variables, power-law non-linearity.