Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 50–60

УДК **532.516**

К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

С. В. Ревина

Для отыскания вторичных течений, ответвляющихся от основного стационарного течения при уменьшении вязкости, необходимо рассмотреть линейную спектральную и линейную сопряженную задачи. В работе построена длинноволновая асимптотика линейной сопряженной задачи в двумерном случае при условии периодичности по пространственным переменным, когда один из пространственных периодов стремится к бесконечности. Выведены реккурентные формулы для нахождения k-го члена длинноволновой асимптотики скорости и давления. Показано, что если отклонение скорости от ее среднего по периоду значения является нечетной функцией, то коэффициенты разложения скорости являются четными при четных степенях и нечетными при нечетных степенях волнового числа. Получены соотношения между коэффициентами асимптотических разложений линейной спектральной и линейной сопряженной задач.

Ключевые слова: устойчивость течений вязкой жидкости, длинноволновая асимптотика, линейная сопряженная задача.

1. Введение

Рассматривается двумерное $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами $\ell_1 = 2\pi$ и $\ell_2 = 2\pi/\alpha$ соответственно, в предположении, что волновое число $\alpha \to 0$. Неизвестные поле скорости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ и давление $p(\boldsymbol{x}, t)$ удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

где ν — безразмерная вязкость. Через $\langle f \rangle$ будем обозначать среднее по x_1, а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ — среднее по прямоугольнику периодов $\Omega = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\ell_1} \int\limits_0^{\ell_1} f(\boldsymbol{x}, t)\, dx_1, \quad \langle\langle f \rangle\rangle(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega f(\boldsymbol{x}, t)\, dx_1\, dx_2.$$

Предполагается, что поле скорости периодично по пространственным переменным с теми же периодами, что и поле внешних сил, и среднее поля скорости задано:

$$\langle\langle \boldsymbol{v} \rangle\rangle = \boldsymbol{q}.$$

Будем интересоваться потерей устойчивости основного (невозмущенного) стационарного течения общего вида

$$\boldsymbol{V} = (0, V(x_1)), \quad \langle V \rangle \neq 0, \tag{1}$$

которое называется *сдвиговым* (или *параллельным*) *течением.*

Известно, что при достаточно больших значениях вязкости ν (малых числах Рейнольдса) основное решение устойчиво. *Критическим* называется значение параметра $\nu = \nu_c$, при котором одно или несколько собственных значений линейной спектральной задачи выходят на мнимую ось. Пусть S_2 — замыкание в $L_2(\Omega)$ множества гладких соленоидальных вектор-функций, периодических по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами ℓ_1 и ℓ_2 соответственно, Π — ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство S_2 (гидродинамический проектор). Линеаризуя уравнения Навье — Стокса на основном течении (1), получим линейную спектральную задачу в S_2:

$$A\boldsymbol{\varphi} + i\omega_0\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad A\boldsymbol{\varphi} = -\nu_c \Pi\Delta\boldsymbol{\varphi} + \Pi\left[\varphi_1 V'(x_1)\boldsymbol{e_2} + V(x_1)\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x_2}\right], \tag{2}$$

где $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ — координатные орты. Для исследования бифуркаций невозмущенного течения применим схему метода Ляпунова — Шмидта, предложенную В. И. Юдовичем [1]. Сначала рассматривается линейная спектральная задача (2), на втором шаге находятся собственные векторы линейной сопряженной задачи

$$A^*\boldsymbol{\Phi} - i\omega_0\boldsymbol{\Phi} = 0, \quad A^*\boldsymbol{\Phi} = -\nu_c\Pi\Delta\boldsymbol{\Phi} - \Pi\left[V(x_1)\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{e_j}\right], \tag{3}$$

где A^* — гильбертово-сопряженный к оператору A в S_2. При исследовании устойчивости относительно длинноволновых возмущений на каждом шаге метода Ляпунова — Шмидта применяются разложения в ряды по малому параметру α.

Впервые длинноволновая асимптотика ($\alpha \to 0$) задачи устойчивости двумерных параллельных пространственно-периодических течений общего вида построена в [2]. При этом поле скорости выражалось через функцию тока, для которой получалась задача Орра — Зоммерфельда. В [3] для построения первых членов асимптотики вторичных автоколебаний рассматривались непосредственно уравнения Навье — Стокса. В [4] с помощью некоторой формализации (применения интегральных операторов типа Вольтерра и вронскианов) получены рекуррентные формулы k-го члена длинноволновой асимптотики задачи устойчивости (2) стационарных сдвиговых течений с ненулевым средним (1). Настоящая работа посвящена выводу рекуррентных формул k-го члена длинноволновой асимптотики линейной сопряженной задачи (3). Подробный вывод изложен в [5]. Обоснование асимптотики в данной работе не проводится, но его можно провести, воспользовавшись теоремой о неявной функции для аналитических оператор-функций подобно тому, как это проделано в [2].

2. Первые члены асимптотики

Через H обозначим подпространство функций из $L_2(0, \ell_1)$, ортогональных единице:

$$H = \left\{ f \in L_2(0, \ell_1) : \langle f \rangle = 0 \right\}.$$

Определим интегральный оператор $I : H \to H$ по правилу

$$If = \int_0^x f(s)\,ds - \left\langle \int_0^x f(s)\,ds \right\rangle.$$

Оператор I — обратный к оператору дифференцирования и вполне непрерывный.

Через $W(f,g)$ обозначим вронскиан функций f и g:

$$W(f,g) = f\,\frac{dg}{dx} - g\,\frac{df}{dx}.$$

Фигурными скобками будем обозначать отклонение периодической функции от ее среднего значения по периоду $\{F\} = F(x) - \langle F\rangle$. Функция θ характеризует отклонение скорости от ее среднего значения:

$$\theta'' = V - \langle V\rangle, \quad \langle\theta\rangle = 0.$$

Запишем уравнение (3) в виде системы скалярных уравнений (здесь и в дальнейшем применяются обозначения $\sigma = i\omega$; $x = x_1$, $z = \alpha x_2$)

$$\sigma\Phi_1 + \nu_c\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \alpha^2\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}\right) + \alpha V\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + V(x)\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\sigma\Phi_2 + \nu_c\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + \alpha^2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}\right) + 2\alpha V\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = -\alpha\,\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \alpha\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0, \quad \langle\Phi_2\rangle = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi}\Phi_1\,dz = 0. \tag{6}$$

Неизвестные поле скорости $\mathbf{\Phi}$ и давление $P(x,z)$ будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра α:

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{\Phi}^k\alpha^k, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty}P^k\alpha^k. \tag{7}$$

Собственные значения σ и критическое значение вязкости ν_c также представим в виде рядов

$$\sigma(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k\alpha^k, \quad \nu_c = \nu_* + \sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\alpha^k. \tag{8}$$

В случае линеаризованного оператора Навье — Стокса линейная сопряженная задача (3) является более вырожденной по сравнению с линейной спектральной (2) — несколько первых членов асимптотики обращаются в нуль. Подставив разложения (7)–(8) в систему (4)–(6) и рассмотрев уравнения при $k = 0$ и $k = 1$, несложно убедиться, что выполняются равенства

$$P_0 = \Phi_2^0 = \Phi_2^1 = 0, \quad \Phi_1^0 = e^{-\mathrm{im}\,z}, \quad \Phi_1^1 = \Phi_1^1(z), \quad \sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = \mathrm{im}\,\langle V\rangle.$$

Для давления P^1 получаем выражение

$$P^1 = q_1^*(x)\,\frac{d\Phi_1^0}{dz} + \langle P^1\rangle, \quad q_1^* = -a_0(\theta),\ a_0(\theta) = \frac{d\theta}{dx}. \tag{9}$$

Всюду в дальнейшем через a_k^* и q_k^* обозначаются функции, через которые выражаются коэффициенты скорости $\mathbf{\Phi}^k$ и давления P^k линейной сопряженной задачи, а a_k и q_k — это соответствующие коэффициенты скорости $\boldsymbol{\varphi}^k$ и давления Q^k линейной спектральной задачи, найденные в [4].

В [4] показано, что коэффициенты разложений по степеням α собственных функций линейной спектральной задачи имеют следующую структуру:

$$\varphi_1^k = -\frac{1}{\nu_*^k}\frac{d^k\varphi_1^0}{dz^k}\, I(a_{k-1}(\theta)) - \frac{\nu_{k-1}}{\nu_*}\,\varphi_1^1,$$

$$Q^k = \frac{1}{\nu_*^{k-1}}\frac{d^k\varphi_1^0}{dz^k}\, q_k(\theta) - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*}\,\{Q^2\},$$

$$\varphi_2^k = \frac{1}{\nu_*^{k+1}}\frac{d^k\varphi_1^0}{dz^k}\, a_k(\theta) - \frac{\nu_k}{\nu_*}\,\varphi_2^0,$$

где a_k, q_k выражаются через a_j, q_j при $j \leqslant k-1$. Слагаемое, содержащее ν_{k-2} в выражении коэффициентов давления Q^k, появляется при четных $k \geqslant 4$.

Коэффициенты разложения собственных значений линейной спектральной задачи и критического значения вязкости при четных k имеют вид [4]

$$\sigma_k = 0, \quad \nu_{k-2} = \frac{(\mathrm{im})^{k-2}}{2\nu_*^{k-1}}\,\langle\theta' a_{k-2}(\theta)\rangle, \tag{10}$$

а при нечетных k

$$\sigma_k = -\frac{(-\mathrm{im})^k}{\nu_*^{k-1}}\,\langle\theta' a_{k-2}\rangle, \quad \nu_{k-2} = 0. \tag{11}$$

Здесь $m \neq 0$ — волновое число.

После подстановки разложений (7)–(8) в уравнения (4)–(6) и приравнивания коэффициентов при α^k приходим к системе для нахождения k-го члена асимптотики линейной сопряженной задачи при $k \geqslant 2$:

$$\begin{gathered}\nu_*\frac{\partial^2\Phi_1^k}{\partial x^2} = -\frac{\partial P^k}{\partial x} - \sigma_1\Phi_1^{k-1} - V(x)\,\frac{\partial\Phi_1^{k-1}}{\partial z} - \sigma_k\Phi_1^0(z) - V(x)\,\frac{\partial\Phi_2^k}{\partial x}\\ -\nu_*\frac{\partial^2\Phi_1^{k-2}}{\partial z^2} - \nu_{k-2}\frac{d^2\Phi_1^0}{dz^2} - \sum_{j=2}^{k-3}\nu_j\frac{\partial^2\Phi_1^{k-j}}{\partial x^2} - \sum_{j=3}^{k-3}\sigma_j\Phi_1^{k-j} - \sum_{j=2}^{k-5}\nu_j\frac{\partial^2\Phi_1^{k-j-2}}{\partial z^2},\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\nu_*\frac{\partial^2\Phi_2^k}{\partial x^2} = -\frac{\partial P^{k-1}}{\partial z} - \sigma_1\Phi_2^{k-1} - 2V(x)\,\frac{\partial\Phi_2^{k-1}}{\partial z} - \nu_*\frac{\partial^2\Phi_2^{k-2}}{\partial z^2}\\ -\sum_{j=2}^{k-2}\nu_j\frac{\partial^2\Phi_2^{k-j}}{\partial x^2} - \sum_{j=3}^{k-2}\sigma_j\Phi_2^{k-j} - \sum_{j=2}^{k-4}\nu_j\frac{\partial^2\Phi_2^{k-2-j}}{\partial z^2},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\frac{\partial\Phi_1^k}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2^{k-1}}{\partial z} = 0, \quad \langle\Phi_2^k\rangle = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi}\Phi_1^k\,dz = 0. \tag{14}$$

Предполагается, что суммирование происходит по тем значениям j, для которых верхняя граница суммы не меньше нижней.

Будем разыскивать решения системы (12)–(14), периодические по x и по z с периодом 2π. Условием разрешимости уравнений (12) и (13) является равенство нулю среднего правой части по переменной x. Осредненное уравнение (12) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\langle\Phi_1^{k-j}\rangle + \langle V\rangle\,\frac{d\langle\Phi_1^{k-1}\rangle}{dz} + \left\langle\theta''\left(\frac{\partial\Phi_1^{k-1}}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_2^k}{\partial x}\right)\right\rangle - \sum_{j=0}^{k-2}\nu_j\frac{d^2}{dz^2}\,\langle\Phi_1^{k-2-j}\rangle = 0. \tag{15}$$

Среднее давления находим из условия разрешимости уравнения (13):

$$\frac{d}{dz}\left\langle P^{k-1}\right\rangle = -2\left\langle V(x)\,\frac{\partial \Phi_2^{k-1}}{\partial z}\right\rangle. \tag{16}$$

Приведем схему нахождения k-го члена асимптотики. Пусть Φ_2^{k-1} известно. Тогда из уравнения неразрывности (14) находим Φ_1^k:

$$\Phi_1^k = -I\left(\frac{\partial \Phi_2^{k-1}}{\partial z}\right) + \left\langle \Phi_1^k\right\rangle. \tag{17}$$

Затем из условия разрешимости уравнения (13) находим среднее давления $\langle P^{k-1}\rangle$, а из уравнения (13) — Φ_2^k. Далее из условия разрешимости уравнения (12) находим σ_{k+2}, ν_k и $\langle \Phi_1^{k-1}\rangle$. Наконец, из уравнения (12) находим P^k. Далее процесс повторяется.

Продолжим нахождение первых членов асимптотики. Пусть $k=2$. Так как $\Phi_2^1 = 0$, то из уравнения неразрывности (14) следует, что $\Phi_1^2 = \Phi_1^2(z)$. Из (16) получаем, что $\frac{d}{dz}\langle P^1\rangle = 0$. Тогда, подставив в (13) известное выражение P^1 из (9), приходим к уравнению для нахождения Φ_2^2:

$$\nu_* \frac{\partial^2 \Phi_2^2}{\partial x^2} = \frac{d^2 \Phi_1^0}{dz^2}\,\theta'(x).$$

Отсюда

$$\Phi_2^2 = \frac{1}{\nu_*}\,\frac{d^2\Phi_1^0}{dz^2}\,a_2^*(\theta), \quad a_2^*(\theta) = I^2(a_0) = I\theta. \tag{18}$$

Из условия разрешимости уравнения (12) находим $\sigma_2 = 0$, $\nu_*^2 = \langle(\theta')^2\rangle$, $\Phi_1^1(z) = 0$. Подставив найденные выражения Φ_1^1, Φ_1^2, Φ_2^2 в (12) при $k=2$, получим P^2:

$$P^2 = \frac{1}{\nu_*}\,\frac{d^2\Phi_1^0}{dz^2}\,q_2^*(x) + \left\langle P^2\right\rangle, \quad q_2^* = -I\left\{\theta''\frac{\partial a_2^*}{\partial x}\right\} - \langle V\rangle a_2^* \equiv \tilde{q}_2^* - \langle V\rangle a_2^*, \tag{19}$$

$a_2^*(\theta)$ определено в (18). Далее будем пользоваться обозначением $\tilde{q}_n^* = q_n^* + \langle V\rangle a_n^*$.

Рассмотрим систему (12)–(14) при $k=3$. Зная Φ_2^2, из уравнения неразрывности по формуле (17) находим Φ_1^3. С учетом условия разрешимости уравнение (13) принимает вид

$$\nu_* \frac{\partial^2\Phi_2^3}{\partial x^2} = -\sigma_1 \Phi_2^2 - 2\left\{V(x)\,\frac{\partial \Phi_2^2}{\partial z}\right\} - \frac{\partial\{P^2\}}{\partial z} - \nu_1\frac{\partial^2\Phi_2^2}{\partial x^2}. \tag{20}$$

После подстановки P^2 из (19) и Φ_2^2 из (18) в (20) и применения интегрального оператора I дважды, выделим старшие члены относительно производных по z функции Φ_1^0:

$$\Phi_2^3 = \frac{1}{\nu_*^2}\,\frac{d^3\Phi_1^0}{dz^3}\,b_3^*(\theta) - \frac{\sigma_1}{\nu_*}\,I^2\Phi_2^2 - \frac{\nu_1}{\nu_*}\,\Phi_2^2, \quad b_3^* = -I^2\big[2V(x)I^2(a_0) + q_2^*(\theta)\big]. \tag{21}$$

Нам понадобится также форма представления Φ_2^3, в которой учтено выражение σ_1:

$$\Phi_2^3 = \frac{1}{\nu_*^2}\,\frac{d^3\Phi_1^0}{dz^3}\,a_3^*(\theta) - \frac{\nu_1}{\nu_*}\,\Phi_2^2, \quad a_3^*(\theta) = -I^2\left[2\theta'' a_2^* - I\left\{\theta''\,\frac{da_2^*}{dx}\right\}\right]. \tag{22}$$

Выпишем условие разрешимости уравнения (12). Подставив в (15) при $k=3$ выражение Φ_2^3 (22), приходим к равенству

$$\langle V\rangle\left(\Phi_1^2(z) + \frac{d\Phi_1^2}{dz}\right) = -\sigma_3\Phi_1^0(z) + \frac{1}{\nu_*^2}\,\frac{d^3\Phi_1^0}{dz^3}\left\langle \theta'(a_3^*)''\right\rangle - 2\nu_1\frac{d^2\Phi_1^0}{dz^2}. \tag{23}$$

Из условия разрешимости уравнения (23) находим

$$\sigma_3 = \frac{im^3}{\nu_*^2}\left\langle \theta'(a_3^*)''\right\rangle, \quad \nu_1 = 0. \tag{24}$$

Убедимся, что σ_3 из (11) и (24) совпадают, т. е. выполняется равенство

$$-\left\langle a_0(a_3^*)''\right\rangle = \left\langle a_1(a_2^*)''\right\rangle, \tag{25}$$

где $a_1 = -I\{W(\theta,\theta')\}$. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма (о вронскиане). *Для любых непрерывно дифференцируемых ℓ_1-периодических по x функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ справедлива формула*

$$-2\langle fgh\rangle + \left\langle fI\left\{g\,\frac{\partial h}{\partial x}\right\}\right\rangle = \left\langle W(I\{f\},g)h\right\rangle.$$

Лемму легко доказать, дважды применив интегрирование по частям.

Для проверки соотношения (25) воспользуемся выражением a_3^* (22) и применим лемму о вронскиане:

$$-\left\langle a_0(a_3^*)''\right\rangle = 2\left\langle \theta'\theta'' a_2^*\right\rangle - \left\langle \theta' I\left\{\theta''\frac{\partial a_2^*}{\partial x}\right\}\right\rangle = -\left\langle W(\theta,\theta'')a_2^*\right\rangle.$$

По свойству вронскиана $W(\theta,\theta'') = \frac{d}{dx}W(\theta,\theta')$. Тогда

$$-\left\langle \frac{d}{dx}\,W(\theta,\theta')a_2^*\right\rangle = -\left\langle I\big\{W(\theta,\theta')\big\}\,\frac{d^2a_2^*}{dx^2}\right\rangle = \left\langle a_1\frac{d^2a_2^*}{dx^2}\right\rangle,$$

и равенство (25) доказано. Из (24) следует, что правая часть (23) равна нулю и $\Phi_1^2(z)$ удовлетворяет однородному уравнению. Чтобы исключить тривиальную неединственность, положим $\Phi_1^2(z) = 0$.

Найдем P^3 из уравнения (12) при $k = 3$. Воспользовавшись условием разрешимости (15), приведем данное уравнение к виду

$$-\frac{\partial P^3}{\partial x} = \left\{V(x)\,\frac{\partial \Phi_2^3}{\partial x}\right\} + \nu_*\frac{\partial^2\Phi_1^3}{\partial x^2}. \tag{26}$$

Подставив в (26) известные Φ_2^3 и Φ_1^3, находим третий член асимптотики давления

$$P^3 = \frac{1}{\nu_*^2}\,\frac{d^3\Phi_1^0}{dz^3}\,q_3^*(x) + \left\langle P^3\right\rangle, \quad q_3^* = -I\left\{\theta''\frac{\partial a_3^*}{\partial x}\right\} + \nu_*^2 a_2^* - \langle V\rangle a_3^*. \tag{27}$$

Рассмотрим систему (12)–(14) при $k = 4$. Зная Φ_2^3, из уравнения неразрывности по формуле (17) находим Φ_1^4. Воспользовавшись условием разрешимости (16) при $k = 4$, уравнение (13) перепишем в виде

$$\nu_*\frac{\partial^2\Phi_2^4}{\partial x^2} = -\sigma_1\Phi_2^3 - 2\left\{V(x)\,\frac{\partial\Phi_2^3}{\partial z}\right\} - \frac{\partial\{P^3\}}{\partial z} - \nu_*\frac{\partial^2\Phi_2^2}{\partial z^2} - \nu_2\frac{\partial^2\Phi_2^2}{\partial x^2}. \tag{28}$$

Учитывая найденные ранее выражения Φ_2^2, Φ_2^3, P^3, получаем

$$\Phi_2^4 = \frac{1}{\nu_*^3}\,\frac{d^4\Phi_1^0}{dz^4}\,a_4^* - \frac{\nu_2}{\nu_*}\,\Phi_2^2, \quad a_4^*(\theta) = -I^2\big[2\{\theta'' a_3^*\} + \widetilde{q_3^*} + \nu_*^2 a_2^*\big]. \tag{29}$$

Подставив в (15) при $k=4$ выражение Φ_2^4 (29), приходим к равенству

$$\langle V\rangle\left(\Phi_1^3(z)+\frac{d\Phi_1^3}{dz}\right)=-\sigma_4\Phi_1^0(z)+\frac{1}{\nu_*^3}\frac{d^4\Phi_1^0}{dz^4}\left\langle\theta'\big((a_4^*)''-\nu_*^2a_2^*\big)\right\rangle-2\nu_2\frac{d^2\Phi_1^0}{dz^2}. \tag{30}$$

Из условия разрешимости уравнения (30) находим

$$\sigma_4=0,\quad \nu_2=-\frac{m^2}{2\nu_*^3}\left\langle\theta'\big((a_4^*)''-\nu_*^2a_2^*\big)\right\rangle. \tag{31}$$

Убедимся, что ν_2 из (10) и (31) совпадают, т. е. выполняется равенство

$$\left\langle a_0(a_4^*)''\right\rangle-\nu_*^2\left\langle a_0a_2^*\right\rangle=\left\langle a_2(a_2^*)''\right\rangle, \tag{32}$$

где $a_2=-I^2\{W(Ia_1,\theta'')\}-3\nu_*^2I\theta$ [4].

Для проверки равенства (32) применим лемму о вронскиане дважды. Подставим в левую часть (32) выражение a_4^* из (29) и воспользуемся леммой:

$$\begin{aligned}\left\langle a_0\big((a_4^*)''-\nu_*^2a_2^*\big)\right\rangle&=-2\left\langle\theta'\{\theta''a_3^*\}\right\rangle+\left\langle\theta'I\{\theta''(a_3^*)'\}\right\rangle-3\nu_*^2\left\langle\theta'a_2^*\right\rangle\\&=\left\langle W(\theta,\theta'')a_3^*\right\rangle-3\nu_*^2\left\langle\theta'a_2^*\right\rangle=-\left\langle a_1(a_3^*)''\right\rangle-3\nu_*^2\left\langle\theta'a_2^*\right\rangle.\end{aligned} \tag{33}$$

На втором шаге воспользуемся выражением a_3^* из (22) и вновь применим лемму:

$$\begin{aligned}-\left\langle a_1(a_3^*)''\right\rangle-3\nu_*^2\left\langle\theta'a_2^*\right\rangle&=2\left\langle a_1\theta''a_2^*\right\rangle-\left\langle a_1I\{\theta''(a_2^*)'\}\right\rangle-3\nu_*^2\left\langle\theta'a_2^*\right\rangle\\&=-\left\langle W(Ia_1,\theta'')a_2^*\right\rangle-3\nu_*^2\left\langle\theta'a_2^*\right\rangle=\left\langle(a_2)''a_2^*\right\rangle,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Заметим, что из (33) вытекает еще одно соотношение между коэффициентами линейной и линейной сопряженной задачи:

$$\left\langle a_0(a_4^*)''\right\rangle+\left\langle a_1(a_3^*)''\right\rangle+2\nu_*^2\left\langle a_0a_2^*\right\rangle=0. \tag{34}$$

Учитывая (31), из (30) получаем, что $\Phi_1^3(z)=0$. Для четных и нечетных k соотношения, аналогичные (34), различны [5]. Применив лемму о вронскиане, при $k=3,5,7$ приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-2}\left\langle a_j(a_{k-j}^*)''\right\rangle+2\nu_*^2\sum_{j=0}^{k-4}\left\langle a_ja_{k-2-j}^*\right\rangle+\nu_*^4\sum_{j=0}^{k-6}\left\langle I^2a_ja_{k-4-j}^*\right\rangle\\+\frac{\langle\theta'a_2\rangle}{2\nu_*^2}\sum_{j=0}^{k-6}\left\langle a_{j+1}(a_{k-3-j}^*)''\right\rangle=0,\end{aligned} \tag{35}$$

а при $k=4,6$ имеем

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-3}\left\langle a_j(a_{k-j}^*)''\right\rangle+2\nu_*^2\sum_{j=0}^{k-4}\left\langle a_ja_{k-2-j}^*\right\rangle+\nu_*^4\sum_{j=0}^{k-6}\left\langle I^2a_ja_{k-4-j}^*\right\rangle\\+\frac{\langle\theta'a_2\rangle}{2\nu_*^2}\sum_{j=0}^{k-5}\left\langle a_j(a_{k-2-j}^*)''\right\rangle=\frac{\langle\theta'a_2\rangle^2}{4\nu_*^4}\sum_{j=0}^{k-6}\left\langle a_j(a_{k-4-j}^*)''\right\rangle.\end{aligned} \tag{36}$$

3. Общий член асимптотики

К началу $k+1$ итерации при $k \leqslant 7$ известно [5], что коэффициенты разложений собственных функций линейной сопряженной задачи имеют следующую структуру:

$$\Phi_1^k = -\frac{1}{\nu_*^{k-2}}\,\frac{d^k\Phi_1^0}{dz^k}\,I(a_{k-1}^*) - \frac{\nu_{k-3}}{\nu_*}\,\Phi_1^3, \tag{37}$$

$$\Phi_2^k = \frac{1}{\nu_*^{k-1}}\,\frac{d^k\Phi_1^0}{dz^k}\,a_k^* - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*}\,\Phi_2^2, \tag{38}$$

$$P^k = \frac{1}{\nu_*^{k-1}}\,\frac{d^k\Phi_1^0}{dz^k}\,q_k^* - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*}\,\{P^2\} + \langle P^k\rangle, \tag{39}$$

где a_k^*, q_k^* выражаются через a_j^*, q_j^* при $j \leqslant k-1$. Слагаемое, содержащее ν_{k-2} в выражении коэффициентов давления P^k, появляется при четных k, удовлетворяющих условию $k \geqslant 4$.

Более подробные выражения собственных функций имеют вид

$$\begin{gathered}\Phi_1^k = -\frac{1}{\nu_*^{k-2}}\,\frac{d^k\Phi_1^0}{dz^k}\,I(b_{k-1}^*) - \frac{\nu_{k-4}}{\nu_*}\,\Phi_1^4\\ -\sum_{j=3}^{k-3}\frac{\sigma_j}{\nu_*}\,I^2\big(\Phi_1^{k-j}\big) - \sum_{j=2}^{k-3}\frac{\nu_j}{\nu_*}\,\Phi_1^{k-j} - \sum_{j=2}^{k-6}\frac{\nu_j}{\nu_*}\,I^2\left(\frac{\partial^2\Phi_1^{k-2-j}}{\partial z^2}\right),\end{gathered} \tag{40}$$

$$\begin{gathered}\Phi_2^k = \frac{1}{\nu_*^{k-1}}\,\frac{d^k\Phi_1^0}{dz^k}\,b_k^* - \frac{\nu_{k-3}}{\nu_*}\,\Phi_2^3\\ -\sum_{j=2}^{k-2}\frac{\nu_j}{\nu_*}\,\Phi_2^{k-j} - \sum_{j=3}^{k-2}\frac{\sigma_j}{\nu_*}\,I^2\big(\Phi_2^{k-j}\big) - \sum_{j=2}^{k-5}\frac{\nu_j}{\nu_*}\,I^2\left(\frac{\partial^2\Phi_2^{k-2-j}}{\partial z^2}\right),\end{gathered} \tag{41}$$

где

$$b_k^* = -I^2\big[2\{\theta'' a_{k-1}^*\} + \tilde q_{k-1}^* + \nu_*^2 a_{k-2}^*\big], \quad q_k^* = \tilde q_k^* - \langle V\rangle a_k^*, \tag{42}$$

$$\tilde q_k^* = -I\left\{\theta''\left(\frac{da_k^*}{dx} - \nu_*^2 I(a_{k-2}^*)\right)\right\} + \nu_*^4 I^2(a_{k-3}^*) + \nu_*^2 b_{k-1}^* - \frac{\langle\theta' a_{k-4}\rangle}{2}\,\big(I\{\theta'' I a_2^*\} + a_3^*\big). \tag{43}$$

Последнее слагаемое в (43) присутствует только при четных k.

Так как при $k \leqslant 7$ известно, что $\langle\Phi_1^1\rangle = \ldots = \langle\Phi_1^{k-2}\rangle = 0$, то уравнение (15) принимает вид

$$\langle V\rangle\left(\big\langle\Phi_1^{k-1}\big\rangle + \frac{d}{dz}\,\big\langle\Phi_1^{k-1}\big\rangle\right) = -\sigma_k\Phi_1^0(z) - \left\langle\theta''(x)\left(\frac{\partial\Phi_2^k}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_1^{k-1}}{\partial z}\right)\right\rangle - \nu_{k-2}\frac{d^2\Phi_1^0}{dz^2}. \tag{44}$$

Условием разрешимости уравнения (44) является ортогональность правой части решению однородного сопряженного уравнения.

Пусть k четное. Тогда из условия разрешимости, отделяя вещественную и мнимую части, находим

$$\sigma_k = 0, \quad \nu_{k-2} = \frac{(\mathrm{im})^{k-2}}{\nu_*^{k-1}}\left[\big\langle\theta'(a_k^*)''\big\rangle - \nu_*^2\big\langle\theta' a_{k-2}^*\big\rangle + \frac{1}{2}\,\big\langle\theta' a_{k-4}\big\rangle\big\langle\theta' a_2^*\big\rangle\right]. \tag{45}$$

Сравнивая (45) с (10) и учитывая, что собственные значения и критическое значение вязкости в линейной спектральной и линейной сопряженной задаче совпадают, получим связь между коэффициентами линейной и линейной сопряженной задачи при четных k:

$$\langle\theta'(a_k^*)''\rangle - \nu_*^2\langle\theta' a_{k-2}^*\rangle + \frac{1}{2}\langle\theta' a_{k-4}\rangle\langle\theta' a_2^*\rangle = \langle\theta' a_{k-2}\rangle. \tag{46}$$

При нечетных k вместо (45) приходим к равенствам

$$\nu_{k-2} = 0, \quad \sigma_k = \frac{(-\mathrm{im})^k}{\nu_*^{k-1}}\big[\langle\theta'(a_k^*)''\rangle - \nu_*^2\langle\theta' a_{k-2}^*\rangle\big], \tag{47}$$

а из (11) и (47) вместо (46) получим соотношения

$$\langle\theta'(a_k^*)''\rangle - \nu_*^2\langle\theta' a_{k-2}^*\rangle = -\langle\theta' a_{k-2}\rangle. \tag{48}$$

Так как правая часть (44) равна нулю, то $\langle\Phi_1^{k-1}\rangle = 0$.

Заметим, что левые части равенств (46) и (48) можно преобразовать в правые, если применить лемму о вронскиане $k-2$ раза. При этом в качестве промежуточных результатов при $k \leqslant 7$ приходим к соотношениям между коэффициентами линейной и линейной сопряженной задачи (35) и (36).

Предположим, что формулы (37)–(43), (45), (47) справедливы при $n = k$. Докажем, что они выполняются для $n = k+1$. Для нахождения Φ_1^{k+1} воспользуемся (17). Очевидно, Φ_1^{k+1} находится по формулам (40), (42)–(43), если в них k заменить на $k+1$.

Для нахождения Φ_2^{k+1} сгруппируем слагаемые в правой части (13), заменив k на $k+1$, и преобразуем их по отдельности. С учетом выражения среднего давления (16) и уравнения (20) для нахождения Φ_2^3 получим

$$\begin{aligned}\sigma_1\Phi_2^{k-1} + 2V(x)\,\frac{\partial\Phi_2^{k-1}}{\partial z} + \frac{\partial P^{k-1}}{\partial z} &= 2\Big\{\theta''\frac{\partial\Phi_2^{k-1}}{\partial z}\Big\} + \langle V\rangle\,\frac{\partial\Phi_2^{k-1}}{\partial z} + \frac{\partial\{P^{k-1}\}}{\partial z}\\ &= \frac{1}{\nu_*^{k-2}}\,\frac{d^k\Phi_1^0}{dz^k}\big[2\{\theta'' a_{k-1}^*\} + \tilde q_{k-1}^*\big] + \nu_{k-2}\frac{\partial^2\Phi_2^3}{\partial x^2}.\end{aligned} \tag{49}$$

Воспользовавшись выражением Φ_2^{k-1}, из (13) и (49) выводим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi_2^{k+1}}{\partial x^2} &= \frac{1}{\nu_*^k}\,\frac{d^{k+1}\Phi_1^0}{dz^{k+1}}\big[-2\{\theta'' a_k^*\} - \tilde q_k^* - \nu_*^2 a_{k-1}^*\big] - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*}\,\frac{\partial^2\Phi_2^3}{\partial x^2}\\ &-\sum_{j=2}^{k-1}\frac{\nu_j}{\nu_*}\,\frac{\partial^2\Phi_2^{k+1-j}}{\partial x^2} - \sum_{j=3}^{k-1}\frac{\sigma_j}{\nu_*}\,\Phi_2^{k+1-j} - \sum_{j=2}^{k-4}\frac{\nu_j}{\nu_*}\,\frac{\partial^2\Phi_2^{k-1-j}}{\partial z^2},\end{aligned} \tag{50}$$

отсюда находим Φ_2^{k+1} по формулам (41)–(43) (заменой k на $k+1$).

Осредненное уравнение (13) при α^{k+1} имеет вид (44), если k заменить на $k+1$. Из условия разрешимости этого уравнения находим ν_{k-1} и σ_{k+1}. Получим формулы (45), (47) с учетом указанной замены. Тогда $\langle\Phi_1^k\rangle = 0$.

С учетом найденных ν_{k-1} и σ_{k+1}, а также Φ_1^{k-1} и Φ_1^{k+1}, заменив в (12) k на $k+1$, приходим к уравнению для нахождения давления:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial P^{k+1}}{\partial x} &= \Big\{\theta''\Big(\frac{\partial\Phi_2^{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_1^k}{\partial z}\Big)\Big\} + \langle V\rangle\frac{\partial\Phi_2^{k+1}}{\partial x}\\ &- \frac{1}{\nu_*^{k-4}}\,\frac{d^{k+1}\Phi_1^0}{dz^{k+1}}\,I(a_{k-2}^*) - \frac{1}{\nu_*^{k-2}}\,\frac{d^{k+1}\Phi_1^0}{dz^{k+1}}\,\frac{db_k^*}{dx} - \nu_{k-3}\frac{\partial^2\Phi_1^4}{\partial x^2}.\end{aligned} \tag{51}$$

Воспользовавшись известными выражениями Φ_1^k, Φ_2^{k+1}, а также уравнением для нахождения P^2, преобразуем (51) к виду

$$-\frac{\partial P^{k+1}}{\partial x} = \frac{1}{\nu_*^k}\frac{d^{k+1}\Phi_1^0}{dz^{k+1}}\left[\left\{\theta''\left(\frac{da_{k+1}^*}{dx} - \nu_*^2 I(a_{k-1}^*)\right)\right\} + \langle V\rangle\frac{da_{k+1}^*}{dx}\right.$$
$$\left. - \nu_*^4 I(a_{k-2}^*) - \nu_*^2\frac{db_k^*}{dx}\right] + \frac{\nu_{k-1}}{\nu_*}\frac{\partial P^2}{\partial x} - \frac{\nu_{k-3}}{\nu_*}\left[\nu_*\frac{\partial^2\Phi_1^4}{\partial x^2} + \left\{\theta''\frac{\partial\Phi_1^3}{\partial z}\right\}\right], \tag{52}$$

причем слагаемые в (52), содержащие ν_{k-1} и ν_{k-3}, отличны от нуля только для нечетных k. Подставив в (52) известные выражения Φ_1^3 и Φ_1^4, а также ν_{k-3}, находим P^{k+1} по формулам (39), (43), в которых k нужно заменить на $k+1$, что и требовалось доказать.

Заключение. В настоящей работе выведены рекуррентные формулы для нахождения k-го члена длинноволновой асимптотики линейной сопряженной к задаче устойчивости стационарных двумерных сдвиговых течений вязкой жидкости с ненулевым средним $\langle V\rangle \neq 0$. Получены соотношения между коэффициентами асимптотических разложений линейной спектральной и линейной сопряженной задачи.

Пусть отклонение скорости от ее среднего значения $\{V\}$ является нечетной функцией, тогда $\theta(x)$ — нечетная функция. В этом случае из рекуррентных формул следует, что коэффициенты разложения собственных функций сопряженной задачи

$$a_k^*(\theta), \quad b_k^*(\theta), \quad \Phi_j^k(\theta)$$

четные при k четном и нечетные при k нечетном. Аналогичное свойство коэффициентов асимптотики собственных функций выполнялось и в линейной спектральной задаче.

Что касается коэффициентов разложения давления, то в линейной сопряженной задаче при нечетной $\theta(x)$ коэффициенты

$$\tilde{q}_k^* = q_k^* + \langle V\rangle a_k^*$$

нечетные при k четном и четные при k нечетном. В то же время, для линейной спектральной задачи аналогичное свойство выполнялось непосредственно для коэффициентов разложения давления q_k.

Литература

1. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // Прикл. мат. и мех.—1971.—Т. 35, № 4.—С. 638–655.
2. *Юдович В. И.* О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач мат. физики.—М.: Наука, 1966.—С. 242–249.
3. *Мелехов А. П., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ.—2008.—№ 2.—С. 41–56.
4. *Ревина С. В.* Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // Журн. вычисл. мат. и мат. физ.—2013.—Т. 53, № 8.—С. 1387–1401.
5. *Ревина С. В.* Линейная сопряженная к задаче устойчивости двумерных сдвиговых течений вязкой жидкости с ненулевым средним.—М., 2014.—47 с.—Деп. в ВИНИТИ 11.08.14, № 228-В2014.

Статья поступила 31 марта 2016 г.

Ревина Светлана Васильевна
Институт математики, механики и компьютерных наук
Южного федерального университета,
доцент кафедры вычислительной математики и матем. физики
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: svrevina@sfedu.ru

ON THE PROBLEM OF SHEAR FLOW STABILITY WITH RESPECT TO LONG-WAVE PERTURBATIONS

Revina S. V.

To find secondary flow branching to the steady flow it is necessary to consider linear spectral problem and linear adjoint problem. Long-wave asymptotics of linear adjoint problem in two-dimensional case is under consideration. We assume the periodicity with spatial variables when one of the periods tends to infinity. Recurrence formulas are obtained for the kth term of the velocity and pressure asymptotics. If the deviation of the velocity from its period-average value is an odd function of spatial variable, the velocity coefficients are odd for odd k and even for even k. The relations between coefficients of linear adjoint problem and linear spectral problem are obtained.

Key words: stability of two-dimensional viscous flows, long-wave asymptotics, linear adjoint problem.