Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 71–79

УДК **517.968.4**

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА — ВОЛЬТЕРРА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Х. А. Хачатрян, Ц. Э. Терджян, М. Ф. Броян

Рассматривается система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Вольтерра в критическом случае. Доказывается существование покомпонентно положительного решения этой системы в пространстве ограниченных суммируемых функций с нулевым пределом в $+\infty$.

Ключевые слова: система нелинейных интегральных уравнений, оператор, итерация, монотонность, примитивная матрица, суммируемое решение.

1. Введение

Исследуется следующая система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Вольтерра:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)\Omega_{ij}(t, f_j(t))\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty),\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

относительно искомой измеримой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$, определенной на $\mathbb{R}^+$ (T — знак транспонирования).

Элементы матриц-функций $v \equiv (v_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ удовлетворяют следующим условиям:

I) $v_{ij}(\tau) \geqslant 0$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, $v_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

II) $m_1(v_{ij}) \equiv \int\limits_0^\infty \tau v_{ij}(\tau) d\tau < +\infty$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

III) (*условие критичности*)

Спектральный радиус матрицы A равен единице

$$A \equiv \left(\int_0^\infty v_{ij}(\tau)\, d\tau \right)_{i,j=1}^{n\times n}, \qquad r(A) = 1 \tag{2}$$

(т. е. модуль максимального по модулю собственного значения равен единице).

Функции $\{\Omega_{ij}(t, y)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ определены на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, принимают вещественные значения и удовлетворяют условию критичности:

$$\Omega_{ij}(t, 0) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{3}$$

и некоторым другим дополнительным условиям (см. формулировку теоремы).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения, проект № SCS 15T-1A033.

Система (1), кроме самостоятельного математического интереса, имеет применение в различных областях математической физики (см. [1, 2]). Соответствующая линейная система, при условии $r(A) \leqslant 1$, исследовалась в работах [3, 4]. В скалярном случае, когда $r(A) > 1$, соответствующее линейное уравнение исследовалась в работе [5]. В том случае, когда $n = 1$, а ядро имеет компактный носитель, исследованию уравнения (1), при определенных ограничениях на нелинейность, посвящены работы [6–8]. В скалярном случае, когда для ядра миноранотой служит суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция, зависящая от разности своих аргументов при определенном ограничении на нелинейность, уравнение (1) исследовалось в работе [9].

В настоящей работе, при некоторых условиях на функции $\Omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, построено покомпонентно положительное решение системы (1) в пространстве ограниченных суммируемых функций с нулевым пределом в $+\infty$.

2. Некоторые обозначения и вспомогательные факты

Пусть матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$, задаваемая согласно формуле (2), является примитивной, т. е.

(i) $a_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что все элементы матрицы A^p положительны.

Тогда в силу теоремы Перрона [10] существует вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)^T$ с положительными координатами η_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такой, что

$$A\eta = \eta \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции $\Omega_{ij}(t, y)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, допускают следующее представление:

$$\Omega_{ij}(t, y) = G_{ij}(t, y) + \omega_{ij}(t, \lambda_i - y), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Здесь λ_i — числовые параметры, а $\omega_{ij}(t, y)$ — определенные на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ измеримые и вещественные функции, обладающие следующими свойствами:

a) существует число $\delta > 0$ такое, что функции $\omega_{ij}(t, y) \geqslant 0$, $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times [\delta, +\infty) \equiv \Omega_\delta$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

b) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функции $\omega_{ij}(t, y) \downarrow$ по y на $[\delta, +\infty)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

c) функции $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу y на множестве Ω_δ, т. е. при каждом фиксированном $y \in [\delta, +\infty)$ функции $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, измеримы по $t \in \mathbb{R}^+$ и почти при всех $t \in \mathbb{R}^+$ функции $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны по y на $[\delta, +\infty)$.

Это условие в дальнейшем мы вкратце запишем следующим образом:

$$\omega_{ij} \in \mathrm{Car}_y(\Omega_\delta), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

d) существуют $\sup\limits_{y\geqslant\delta} \omega_{ij}(t, y) \equiv \beta_{ij}(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\beta_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $m_1(\beta_{ij}) < +\infty$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Относительно функций $G_{ij}(t, y)$ предположим выполнение следующих условий:

1) $G_{ij}(t, y) \geqslant y$, $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

2) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функции $G_{ij}(t, y)$ $\uparrow$ по y на $y \in \mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

3) существуют $\gamma_{ij}(t) = \sup\limits_{y \geqslant 0}(G_{ij}(t, y) - y)$, $\gamma_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $m_1(\gamma_{ij}) < +\infty$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

4) $G_{ij}(t, y) \in \mathrm{Car}_y(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Примерами функций $G_{ij}(t, y)$ и $\omega_{ij}(t, y)$ являются следующие функции:

$$
\begin{aligned}
&G_{ij}(t, y) = y + e^{-y}\gamma_{ij}(t),\\
&G_{ij}(t, y) = y + \frac{\gamma_{ij}(t)}{y+1},\\
&G_{ij}(t, y) = y + \gamma_{ij}(t)\cos\frac{y}{y+1},\\
&G_{ij}(t, y) = y + \frac{\gamma_{ij}(t)}{\gamma_{ij}(t)y+1},\\
&G_{ij}(t, y) = y + \frac{2\gamma_{ij}(t)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{y^2+4},\\
&\omega_{ij}(t, y) = \beta_{ij}(t)e^{-y^2},\\
&\omega_{ij}(t, y) = \beta_{ij}(t)\sin\frac{\pi}{\beta_{ij}^2(t)y^2+2},
\end{aligned}
$$

где функции $\gamma_{ij}(t)$ и $\beta_{ij}(t)$ задаются согласно 3) и d).

Приведем также примеры функций $\gamma_{ij}(t)$ и $\beta_{ij}(t)$.

$$
\begin{aligned}
&A_1)\ \ \gamma_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}e^{-t}, \quad \varepsilon_{ij} > 0,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\\
&A_2)\ \ \gamma_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}e^{-t^2}t, \quad \varepsilon_{ij} > 0,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\\
&B_1)\ \ \beta_{ij}(t) = q_{ij}\frac{1}{t^2+1}, \quad q_{ij} > 0,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\\
&B_2)\ \ \beta_{ij}(t) = q_{ij}\left(e^{-t}t + \frac{1}{t^3+1}\right), \quad q_{ij} > 0,\ i, j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Сначала наряду с (1) рассмотрим следующую вспомогательную систему линейных неоднородных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$
\psi_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\psi_j(t)dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ x \in \mathbb{R}^+, \tag{6}
$$

относительно искомой вектор-функции $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))^T$. Предполагается, что в (6) свободные члены $\{g_i(x)\}_{i=1}^n$ имеют следующую специальную структуру:

$$
\begin{aligned}
g_i(x) &= \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\beta_{ij}(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)\,dt\\
&= \tilde{g}_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ x \in \mathbb{R}^+,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где

$$
\tilde{g}_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\beta_{ij}(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{8}
$$

Нетрудно убедиться, что

$$g_i \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad m_1(g_i) < +\infty, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Следовательно, из результатов работы [4] следует, что система (6) имеет решение $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))^T$, причем

$$\psi_i(x) \geqslant 0, \quad \psi_i \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \psi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Обозначим через

$$\kappa := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{x \geqslant 0} \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим следующую вспомогательную систему нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Вольтерра

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_x^\infty v_{ij}(t-x)\big(\varphi_j(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_j(t))\big)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{13}$$

и для этой системы введем в рассмотрение следующие специальные приближения:

$$\begin{gathered} \varphi_{i,\gamma}^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_x^\infty v_{ij}(t-x)\Big(\varphi_{j,\gamma}^{(p)}(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_{j,\gamma}^{(p)}(t))\Big)\, dt, \\ \varphi_{i,\gamma}^{(0)}(x) = \gamma\eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \ p = 0, 1, 2, \ldots; \ x \in \mathbb{R}^+, \ \gamma \in \Pi, \end{gathered} \tag{14}$$

где множество параметров Π задается согласно следующей формуле:

$$\Pi := \left[\frac{\delta + 2\kappa}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \eta_i}, +\infty\right). \tag{15}$$

Индукцией по p докажем, что

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p)}(x) \downarrow \text{ по } p \quad (\forall\, \gamma \in \Pi, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p)}(x) \geqslant \gamma\eta_i - \psi_i(x) \quad (\forall\, \gamma \in \Pi, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \forall\, p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Сначала докажем (16). С учетом (2), (4), a) и I) из (14) будем иметь

$$\begin{gathered} \varphi_{i,\gamma}^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_x^\infty v_{ij}(t-x)(\eta_j\gamma - \omega_{ij}(t, \eta_j\gamma))\, dt \\ \leqslant \gamma \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int\limits_x^\infty v_{ij}(t-x)\, dt = \gamma \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j = \gamma\eta_i = \varphi_{i,\gamma}^{(0)}(x). \end{gathered}$$

В силу монотонности функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, по y на $[\delta, +\infty)$, предполагая, что

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p)}(x) \leqslant \varphi_{i,\gamma}^{(p-1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

при некотором $p \in \mathbb{N}$ из (14) будем иметь

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\Big(\varphi_{j,\gamma}^{(p)}(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_{j,\gamma}^{(p)}(t))\Big)\, dt$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\Big(\varphi_{j,\gamma}^{(p-1)}(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_{j,\gamma}^{(p-1)}(t))\Big)\, dt = \varphi_{i,\gamma}^{(p)}(x).$$

Теперь докажем неравенства (17). При $p = 0$ эти неравенства очевидны. Предположим, что (17) выполняются при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда из (4), (6), (7), (14), с учетом b) для функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p+1)}(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\big(\gamma\eta_j - \psi_j(t) - \omega_{ij}(t, \gamma\eta_j - \psi_j(t))\big)\, dt$$

$$= \gamma\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\psi_j(t)\, dt - \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\omega_{ij}\big(t, \gamma\eta_j - \psi_j(t)\big)\, dt$$

$$\geqslant \gamma\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\psi_j(t)\, dt - g_i(x) = \gamma\eta_i - \psi_i(x).$$

Из (16) и (17) следует, что последовательность вектор-функций

$$\{\varphi_{\gamma}^{(p)}(x)\}_{p=0}^{\infty}, \quad (\varphi_{\gamma}^{(p)}(x) = (\varphi_{1,\gamma}^{(p)}(x), \varphi_{2,\gamma}^{(p)}(x), \ldots, \varphi_{n,\gamma}^{(p)}(x))^T),$$

имеет поточечный предел, когда $p \to +\infty$:

$$\lim_{p\to+\infty} \varphi_{\gamma}^{(p)}(x) = \varphi_{\gamma}(x), \quad \varphi_{\gamma}(x) = (\varphi_{1,\gamma}(x), \varphi_{2,\gamma}(x), \ldots, \varphi_{n,\gamma}(x))^T,$$

причем предельная вектор-функция $\varphi_{\gamma}(x)$, $\gamma \in \Pi$, в силу условия Каратеодори, с учетом предельных теорем М. Красносельского и Б. Леви (см. [11, 12]), удовлетворяет системе (13).

Итак, система (13) обладает однопараметрическим семейством положительных решений, причем имеют место следующие соотношения:

$$\gamma\eta_i - \psi_i(x) \leqslant \varphi_{i,\gamma}(x) \leqslant \gamma\eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ \gamma \in \Pi, \ x \in \mathbb{R}^+, \ \lim_{x\to+\infty} \varphi_{i,\gamma}(x) = \gamma\eta_i. \tag{18}$$

3. Основной результат

Теперь займемся решением основной системы (1). Справедлива следующая

Теорема. *Пусть в* (1) *ядра* $v_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяют условиям* I)–III), *функции* $\Omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, \ldots, n$, *обладают свойствами* (5), a)–d) *и* 1)–4). *Тогда для каждого* $\lambda_i \geqslant \eta_i \frac{\delta + 2\kappa}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \eta_i}$ *система* (1) *имеет положительное суммируемое и ограниченное решение* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$, *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_i(x) = 0$.

◁ Пусть γ^* — некоторое фиксированное число из множества параметров П. Для системы (1) введем следующие специальные последовательные приближения:

$$f_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)\Big(G_{ij}(t, f_j^{(p)}(t)) + \omega_{ij}(t, \lambda_j - f_j^{(p)}(t))\Big)\,dt,$$
$$f_i^{(0)}(x) = \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x);\ x \in \mathbb{R}^+;\ \lambda_i = \gamma^*\eta_i;\ \ i = 1, 2, \ldots, n;\ p = 0, 1, 2\ldots;\ \gamma^* \in \Pi. \tag{19}$$

Индукцией по p докажем, что

$$f_i^{(p)}(x)\ \uparrow\ \text{по } p \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ p = 0, 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

$$f_i^{(p)}(x) \leqslant \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) + \psi_i(x) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Сначала докажем (20). В силу монотонности функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, по y на $[\delta, +\infty)$ с учетом (4) и условия 1) для функций $G_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, из (19) получим

$$f_i^{(1)}(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)(\gamma^*\eta_j - \varphi_{j,\gamma^*}(t) + \omega_{ij}\big(t, \lambda_j - \gamma^*\eta_j + \varphi_{j,\gamma^*}(t)\big)\,dt$$
$$\geqslant \gamma^*\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)(\varphi_{j,\gamma^*}(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_{j,\gamma^*}(t)))dt = \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) = f_i^{(0)}(x).$$

Предполагая, что $f_i^{(p)}(x) \geqslant f_i^{(p-1)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x \in \mathbb{R}^+$, при некотором $p \in \mathbb{N}$, из (19), учитывая монотонность функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, по y на $[\delta, +\infty)$, при условии 2) получим

$$f_i^{(p+1)}(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)\left(G_{ij}\left(t, f_j^{(p-1)}(t)\right) + \omega_{ij}\left(t, \lambda_j - f_j^{(p-1)}(t)\right)\right)dt = f_i^{(p)}(x),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Теперь докажем неравенства (21). При $p = 0$, эти неравенства очевидны, ибо

$$f_i^{(0)}(x) = \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) \leqslant \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) + \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Предположим, что (21) имеют место при некотором $p \in \mathbb{N}$. Обозначим через

$$\chi_i(x) := \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) + \psi_i(x).$$

Учитывая монотонность функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, по y на $[\delta, +\infty)$ и условия (4), 1)–4), a)–d), из (19) будем иметь

$$f_i^{(p+1)}(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)(G_{ij}(t,\chi_j(t)) + \omega_{ij}(t,\lambda_j - \chi_j(t)))\,dt$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)(G_{ij}(t,\chi_j(t)) - \chi_j(t))dt + \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)(\chi_j(t) + \omega_{ij}(t,\lambda_j - \chi_j(t)))\,dt$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)(\chi_j(t) + \omega_{ij}(t,\lambda_j - \chi_j(t)))\,dt$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)(\gamma^*\eta_j - \varphi_{j,\gamma^*}(t) + \psi_j(t)$$

$$+\,\omega_{ij}(t,\lambda_j - \gamma^*\eta_j + \varphi_{j,\gamma^*}(t) - \psi_j(t)))dt = \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)dt + \gamma^*\eta_i$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)(\varphi_{j,\gamma^*}(t) - \omega_{ij}(t,\lambda_j - \gamma^*\eta_j + \varphi_{j,\gamma^*}(t) - \psi_j(t)))\,dt$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)\psi_j(t)dt \leqslant \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) + g_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)\psi_j(t)\,dt$$

$$= \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) + \psi_i(x).$$

Из (20) и (21) следует, что последовательность вектор-функций $\{f^{(p)}(x)\}_{p=0}^\infty$, $f^{(p)}(x) = (f_1^{(p)}(x), f_2^{(p)}(x), \ldots, f_n^{(p)}(x))^T$ имеет предел, когда $p \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f_i^{(p)}(x) = f_i(x), \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T,$$

причем предельная функция $f(x)$, в силу условия Каратеодори, с учетом предельных теорем М. Красносельского и Б. Леви (см. [11, 12]) удовлетворяет системе (1).

Из (20) и (21) следует также, что имеют место следующие неравенства:

$$\gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) \leqslant f_i(x) \leqslant \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) + \psi_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Откуда, учитывая (11) и (18), будем иметь:

$$\lim_{x\to\infty} f_i(x) = 0.$$

Таким образом, существование решения $f \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$ системы (1) установлено. $\rhd$

В конце работы поясним существенность накладываемых условий I–III, a)–d) и 1)–4).

Замечание 1. Условия, накладываемые на ядерные функции $v_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, имеют одновременно и технический, и естественный характер.

Так, например, даже в линейном случае, если ядра не обладают свойством неотрицательности, то соответствующая система во многих случаях не имеет неотрицательных решений.

Условие II) имеет технический характер и пока нам не удалось избавиться от этого условия. Условие III) связано с приложениями рассматриваемой задачи к задачам физической кинетики. В этих задачах, как правило, ядерные функции обладают свойством критичности.

Замечание 2. Основные условия, накладываемые на функции $\Omega_{ij}(t,y)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, являются естественными для получения суммируемых решений в следующих аспектах:

1) так например, в случае, когда нарушается условие 3) (на функции $G_{ij}(t,y)$, $i,j=1,2,\ldots,n$) и G_{ij} зависят лишь от y, то из результатов работы [13] следует, что соответствующая система обладает монотонно возрастающим ограниченным решением (решение не принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$);

2) именно условие монотонности на функций $G_{ij}(t,y)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, и $\omega_{ij}(t,y)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, обеспечивает получение неотрицательных нетривиальных (физических) решений;

3) без условия d) на функции $\omega_{ij}(t,y)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, даже соответствующая линейная система не может обладать суммируемым решением;

4) условие Каратеодори является в некотором смысле техническим условием, которое обеспечивает в дальнейшем предельный переход под знаком интеграла. Например, если функции $\Omega_{ij}(t,y)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, непрерывны по совокупности своих аргументов в данном множестве, то эти функции будут удовлетворять условию Каратеодори.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

1. *Амбарцумян В. А.* Научные труды. Т. 1.—Ереван: Изд-во АН. АрмССР.—1960.—431 с.
2. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика.—Т. 2, № 4.—1966.—С. 31–36.
3. *Арабаджян Л. Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Диф. уравнения.—1987.—Т. 23, № 9.—С. 1618–1622.
4. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ.—1984.—Т. 22.—С. 175–242.
5. *Арабаджян Л. Г.* О разрешимости одного интегрального уравнения типа Вольтерра на полуоси // Изв. НАН Армении. Математика.—1999.—Т. 34, № 2.—С. 80–83.
6. *Zarebina M.* A numerical Solution of Nonlinear Volterra–Fredholm Integral Equations // J. of Appl. Analysis and Computation.—2013.—Vol. 3, № 1.—P. 95–104.
7. *Lauran M.* Existence results for some Nonlinear Integral Equations // Miskole Math. Notes.—2012.—Vol. 13, № 1.—P. 67–74.
8. *Karapetyants N. K., Kilbas A. A., Saigo M.* On the Solutions of Nonlinear Volterra Convolution Equation with power Nonlinearity // J. of Integral Equations and Appl.—1996.—Vol. 8, № 4—P. 429–445.
9. *Хачатрян Х. А., Григорян С. А.* О нертивиальной разрешимости одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна — Вольтерра // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, № 2.—С. 57–66.
10. *Ланкастер П.* Теория матриц.—М.: Наука, 1978.—280 с.
11. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1981.—544 с.
13. *Хачатрян Х. А.* Некоторые классы нелинейных интегральных уравнений Урысона // Докл. БелАН. Математика.—2011.—Т. 55, № 1.—С. 5–9.

Статья поступила 5 февраля 2016 г.

Хачатрян Хачатур Агавардович
Институт математики НАН Республики Армения,
ведущий научный сотрудник отдела методов математической физики
АРМЕНИЯ, 375019, г. Ереван, пр-т Маршала Баграмяна, 24 б
E-mail: Khach82@rambler.ru

Терджян Цолак Эрнестович
Национальный аграрный университет Армении,
доцент кафедры высшей математики и теоретической механики
АРМЕНИЯ, 3750009, г. Ереван, Теряна, 74
E-mail: Terjyan73@mail.ru

Броян Марине Фирдусовна
Национальный аграрный университет Армении,
доцент кафедры высшей математики и теоретической механики
АРМЕНИЯ, 3750009, г. Ереван, Теряна, 74
E-mail: Broyan@rambler.ru

ON SOLVABILITY OF A HAMMERSTEIN–VOLTERA TYPE NONLINEAR SYSTEM OF INTEGRAL EQUATIONS IN CRITICAL CASE

Khachatryan Kh. A., Terjyan Ts. E., Broyan M. F.

We consider Hammerstein–Voltera type nonlinear system of integral equations in critical case. Above mentioned equations have applications in rediative transfer theory and kinetic theory of gases. Using special iteration methods and method of monotone operators theory we prove the exitstence of by component positive solutions in space of bounded and summerable functions with zero limit at infinity. Some examples of corresponding equations representing separate interest are also given.

Key words: nonlinear system of integral equations, Hammerstein–Voltera type operator, iteration, monotonisity, primitive matrix, summerable solution.