Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 36–48

УДК **517.5**

О СТЕПЕННОМ ПОРЯДКЕ РОСТА НИЖНИХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ

Р. Р. Салимов

В работе исследуется асимптотическое поведение в точке нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля. Найдены достаточные условия на функцию Q, при которых отображение имеет степенной порядок роста. В работе приведены приложения этих результатов к классам Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, при условии типа Кальдерона на функцию φ и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$. Приведен пример гомеоморфизма, показывающий точность порядка роста.

Ключевые слова: p-модуль, p-ёмкость, нижние Q-гомеоморфизмы, отображения с конечным искажением, класс Соболева, класс Орлича — Соболева.

1. Введение

Напомним некоторые определения. Следуя [1, разд. 9.2], *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называем произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называем число прообразов

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card} \{x \in \omega : \ S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k (см. [1, разд. 9.2]).

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ее *интеграл по поверхности* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho \, d\mathscr{A}_k := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \, N(S, y) \, dH^k y.$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathscr{A}_k \geqslant 1$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \in (1, \infty)$ — заданное фиксированное число. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) \, dm(x).$$

Будем говорить, что свойство P имеет место для *p-почти всех* (p-п.в.) k-мерных поверхностей S семейства Γ, если подсемейство всех поверхностей семейства Γ, для которых свойство P нарушается, имеет p-модуль нуль.

Говорят (см. [1, разд. 9.2]), что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ является *обобщенно p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1} \geqslant 1 \tag{1.1}$$

для p-п. в. $S \in \Gamma$.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке* x_0, если

$$M_p\left(f\Sigma_{\mathbb{A}}\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p\, adm}\, \Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{1.2}$$

для каждого кольца

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < |x - x_0| < \varepsilon_2\}, \quad 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0,$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, а $\Sigma_{\mathbb{A}}$ обозначает семейство всех сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \quad r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2). \tag{1.3}$$

В работах [2] и [3] приводятся приложения нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и к задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением.

Теория нижних Q-гомеоморфизмов применима к отображениям с конечным искажением класса Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ при наличии условия Кальдерона и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n - 1$ (см. [4–11]).

В данной работе мы устанавливаем аналоги леммы типа Икомы — Шварца для нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля (см. [12, теорема 2].

Ниже приведен критерий нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p > n - 1$ (см. [5, теорема 3.7]). Впервые критерий был доказан при $p = n$ в работе [13, теорема 2.1] (см. также монографию [1, теорема 9.2]).

Лемма 1.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$. Предположим, что $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n - 1$ тогда и только тогда, когда*

$$M_p(f\Sigma_R) \geqslant \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)}, \quad 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0, \tag{1.4}$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, Σ_R — семейство всех сфер $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, и

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0, r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}. \tag{1.5}$$

Инфимум в (1.2) достигается только для функции

$$\rho_0(x) = \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x-x_0|)} \right)^{\frac{1}{p-n+1}}. \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Ниже мы используем стандартные соглашения, что $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$, если $a > 0$, и $0 \cdot \infty = 0$ (см., например, [14]).

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$. $E, F \subseteq D$ — произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F; D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

Следующая лемма была получена в работе [10, лемма 5.3].

Лемма 1.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n - 1$. Тогда имеет место оценка*

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\Big(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\Big) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{1.7}$$

где $S_j = S(x_0, \varepsilon_j)$, $j = 1, 2$, и

$$\left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}. \tag{1.8}$$

Замечание 1.2. Отметим, что норма $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)$ по некоторым сферам $S(x_0, r)$ может быть равна бесконечности. По теореме Фубини функция $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)$ измерима по r в силу измеримости по x функции Q. Более того,

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} < \infty, \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d(x_0, \partial D). \tag{1.9}$$

Это следует из условия гомеоморфности отображения f и леммы 1.2, поскольку $\frac{p}{p-n+1}$ — емкость невырожденного кольца — не может быть равна нулю. (Определение емкости см. ниже.) Интеграл в (1.9) может быть равен нулю в случае, если $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \infty$ п. в., но тогда соотношение (1.7) очевидно.

2. О емкости конденсатора

Следуя работе [15], пару $\mathscr{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Конденсатор $\mathscr{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ — кольцо, т. е. если G — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathscr{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathscr{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее, $f\mathscr{E} = (fA, fC)$.

Функция $u : A \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A. Функция $u : A \to \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(\mathscr{E}) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$; 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$; 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}. \tag{2.1}$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} = \operatorname{cap_p}(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathscr{E})} \int_A |\nabla u|^p \, dm(x) \tag{2.2}$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора $\mathscr{E}$.

В дальнейшем при $p > 1$ мы будем использовать равенство (см. [16, теорема 1])

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)). \tag{2.3}$$

Известно, что при $1 < p < n$

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} \geqslant n\Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}}, \tag{2.4}$$

где Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [17, неравенство (8.9)]).

3. О степенном порядке роста нижних Q-гомеоморфизмов

Всюду далее $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Ниже приведена лемма об оценке искажения емкости сферического конденсатора при нижних Q-гомеоморфизмах.

Лемма 3.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p > n$. Предположим, что для некоторых конечных чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ и $C_0 > 0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{\sigma} \int_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant C_0 \quad \left(\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,,\ \varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)\right), \tag{3.1}$$

где

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \Big(\int_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1}\Big)^{\frac{p-n+1}{n-1}}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB_{\lambda\varepsilon}, \overline{fB_{\varepsilon}}\right) \leqslant C_0^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}. \tag{3.2}$$

$\lhd$ Рассмотрим сферическое кольцо

$$\mathbb{A}=\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \varepsilon_1<|x|<\varepsilon_2\},\quad 0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1.$$

Тогда $\left(B_{\varepsilon_2},\overline{B}_{\varepsilon_1}\right)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{B}^n$ и $\left(fB_{\varepsilon_2},\overline{fB}_{\varepsilon_1}\right)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{B}^n$.

Пусть $\Gamma^*=\Delta(fS_{\varepsilon_1},fS_{\varepsilon_2},f\mathbb{A})$. Тогда согласно (2.3) имеем равенство

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}}\ \left(fB_{\varepsilon_2},\overline{fB}_{\varepsilon_1}\right)=M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(\Gamma^*\right). \tag{3.3}$$

По лемме 1.2 получаем, что

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}}\ \left(fB_{\varepsilon_2},\overline{fB}_{\varepsilon_1}\right)\leqslant\left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}. \tag{3.4}$$

Далее, выбирая в (3.4) $\varepsilon_1=\varepsilon<\varepsilon_0<\frac{1}{\lambda}$ и $\varepsilon_2=\lambda\varepsilon$, получим

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}}\ \left(fB_{\lambda\varepsilon},\overline{fB_{\varepsilon}}\right)\leqslant\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}. \tag{3.5}$$

Из условия (3.1) вытекает оценка (3.2). $\rhd$

Следующий результат является аналогом известной леммы Икомы — Шварца об оценке нижнего предела, см. теорему 2 в [12].

Теорема 3.1. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\geqslant 2$, — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p>n$, удовлетворяющий условию $f(0)=0$. Если для некоторых конечных чисел $\lambda>1$, $\sigma>0$ и $C_0>0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\geqslant C_0 \tag{3.6}$$

для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, то

$$\liminf_{x\to0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}}\leqslant\nu_0\,C_0^{-\frac{1}{p-n}}, \tag{3.7}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

$\lhd$ Рассмотрим конденсатор $\left(fB_{\lambda\varepsilon},\overline{fB}_{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$. В силу леммы 3.1 имеем оценку

$$\mathrm{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\ \left(fB_{\lambda\varepsilon},\overline{fB}_{\varepsilon}\right)\ \leqslant\ C_0^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}. \tag{3.8}$$

Используя соотношение (2.4), получаем

$$\mathrm{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB_{\lambda\varepsilon},\overline{fB_{\varepsilon}}\right)\geqslant\nu_1\left[m\left(\overline{fB_{\varepsilon}}\right)\right]^{\frac{n(p-n+1)-p}{n(p-n+1)}}, \tag{3.9}$$

где ν_1 — константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (3.8) и (3.9), заключаем, что

$$m\left(\overline{fB_{\varepsilon}}\right)\leqslant\nu_0\,C_0^{-\frac{n}{p-n}}\,\varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}, \tag{3.10}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Учитывая, что $f(0) = 0$, получаем

$$\Omega_n \left(\min_{|x|=\varepsilon} |f(x)| \right)^n \leqslant m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right) \tag{3.11}$$

и, следовательно,

$$\min_{|x|=\varepsilon} |f(x)| \leqslant \sqrt[n]{\frac{m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right)}{\Omega_n}}. \tag{3.12}$$

Таким образом, учитывая неравенства (3.10) и (3.12), имеем

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\min\limits_{|x|=\varepsilon} |f(x)|}{\varepsilon^{\frac{\sigma}{p-n}}} \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right)}{\Omega_n \varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \nu_0\, C_0^{-\frac{1}{p-n}},$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p. $\rhd$

Следствие 3.1. *В частности, если для некоторых конечных чисел $\lambda > 1$ и $C_0 > 0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{p-n} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant C_0 \tag{3.13}$$

для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, то

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0 C_0^{-\frac{1}{p-n}}, \tag{3.14}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Теорема 3.2. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p > n$, удовлетворяющий условию $f(0) = 0$. Если для некоторых чисел $q_0 \in (0, \infty)$, $\gamma \in [0, p-n)$ выполнено условие*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\; d\mathscr{A}_{n-1} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant q_0\, r^{-\gamma}, \tag{3.15}$$

для п. в. $r \in (0, r_0)$, $r_0 \in (0, \frac{1}{e})$, то

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\gamma}{p-n}}} \leqslant \nu_0 q_0^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.16}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

$\lhd$ Из условия (3.15) вытекает оценка

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}\, q_0\; r^{p-n-\gamma+1}. \tag{3.17}$$

Пусть $\lambda = e$ и $\sigma = p - n - \gamma$. Из неравенства (3.17) следует условие

$$\varepsilon^{p-n-\gamma} \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant \frac{\varepsilon^{p-n-\gamma}}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}\, q_0} \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \frac{dr}{r^{p-n-\gamma+1}} = C_0, \tag{3.18}$$

где $C_0 = \frac{e^{n+\gamma-p}-1}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}\, q_0 (n+\gamma-p)}$.

Применяя теорему 3.1 с параметрами $\lambda = e$, $\sigma = p-n-\gamma$ и $C_0 = \frac{e^{n+\gamma-p}-1}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}} q_0(n+\gamma-p)}$, получаем оценку

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\gamma}{p-n}}} \leqslant \nu_0 q_0^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.19}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p. $\rhd$

Следствие 3.2. *В частности, если для некоторого конечного числа $q_0 > 0$ выполнено условие*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant q_0 \tag{3.20}$$

для п. в. $r \in (0, r_0)$, $r_0 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, то

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0 q_0^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.21}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Следствие 3.3. *Если $Q(x) \leqslant K < \infty$ для п.в. $x \in \mathbb{B}^n$, то*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0\, K^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.22}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Лемма 3.2. *Пусть $Q \in L_\alpha(\mathbb{B}^n)$, $\alpha > \frac{n}{p-n}$, $p > n$. Тогда при $\lambda > 1$ имеет место оценка*

$$\varepsilon^\sigma \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant \frac{c_0}{\|Q\|_\alpha} \tag{3.23}$$

для любого $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, где $\|Q\|_\alpha = \left(\int_{\mathbb{B}^n} Q^\alpha(x)\, dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\sigma = \frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$ и c_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p, λ и α.

$\lhd$ Пусть $\lambda > 1$. Заметим, что

$$(\lambda-1)\varepsilon = \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \|\,Q\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) \frac{dr}{\|\,Q\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}. \tag{3.24}$$

Применяя теорему Фубини и неравенство Гёльдера с показателями $q = \frac{p}{p-n+1}$, $q' = \frac{p}{n-1}$, имеем

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leqslant ((\lambda-1)\varepsilon)^{-\frac{p}{p-n+1}} \int\limits_{\mathbb{A}} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x), \tag{3.25}$$

где $\mathbb{A} = \mathbb{A}(0, \varepsilon, \lambda\varepsilon)$.

Применяя еще раз неравенство Гёльдера с показателями $q = \frac{\alpha(p-n+1)}{n-1} > 1$ и $q' = \frac{\alpha(p-n+1)}{\alpha(p-n+1)-n+1}$, получаем

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leqslant c_1\, \varepsilon^\theta \left(\int\limits_{\mathbb{A}} Q^\alpha(x)\, dm(x)\right)^{\frac{n-1}{\alpha(p-n+1)}}, \tag{3.26}$$

где $\theta = \frac{(n-1)(\alpha p-\alpha n-n)}{\alpha(p-n+1)}$ и c_1 — положительная постоянная, зависящая только от n, p, λ и α.

Отсюда вытекает оценка

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\geqslant\frac{c_0}{\|Q\|_{\alpha}}, \tag{3.27}$$

где $\|Q\|_{\alpha}=\left(\int_{\mathbb{B}^n}Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\sigma=\frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$ и c_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p, λ и α. $\rhd$

Теорема 3.3. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\geqslant 2$, — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p>n$, удовлетворяющий условию $f(0)=0$. Если $Q\in L_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$, $\alpha>\frac{n}{p-n}$, то*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}}\leqslant\nu_0\|Q\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.28}$$

где $\|Q\|_{\alpha}=\left(\int_{\mathbb{B}^n}Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма в пространстве $L_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и α.

$\lhd$ Пусть $\lambda=2$. Поскольку $Q\in L_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$ и $\alpha>\frac{n}{p-n}$, то из леммы 3.2 следует, что функция Q удовлетворяет условию (3.6) с параметрами $\sigma=\frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$, $C_0=\frac{c_0}{\|Q\|_{\alpha}}$. Применяя теорему 3.1, получаем оценку

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}}\leqslant\nu_0\|Q\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.29}$$

где $\|Q\|_{\alpha}=\left(\int_{\mathbb{B}^n}Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма в пространстве $L_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и α. $\rhd$

4. Приложения к классам Орлича — Соболева

Напомним некоторые определения. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Гомеоморфизм $f:D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)\cdot J(x,f) \tag{4.1}$$

для некоторой п. в. конечной функции $K(x)\geqslant 1$, где $f'(x)$ — якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ — ее операторная норма: $\|f'(x)\|=\sup_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$ и $J(x,f)=\det f'(x)$ — якобиан отображения f.

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f\in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [18] (см. также [19]).

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, обозначим символом L^{φ} пространство всех функций $f:D\to\mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_{D}\varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\,dm(x)<\infty \tag{4.2}$$

при некотором $\lambda>0$ (см., например, [20]). Здесь m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^{φ} называется *пространством Орлича.*

Классом Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщенными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f \in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}} \subset W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т. е. если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D (см. [21, разд. 1.1.3]).

Далее, если f — локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\, dm(x) < \infty, \tag{4.3}$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы снова пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0) = 0$.

Пусть $p > n-1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Ранее (см., например, [8–10]) в теоремах о локальном поведении классов Соболева и Орлича — Соболева мы пользовались *p-внешней дилатацией*

$$K_{O,p}(x,f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^p}{|J(x,f)|}, & J(x,f) \neq 0; \\ 1, & f'(x) = 0; \\ \infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{4.4}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться *α-внутренней дилатацией*

$$K_{I,\alpha}(x,f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l^\alpha(f'(x))}, & |J(x,f)| \neq 0; \\ 1, & f'(x) = 0; \\ \infty, & \text{в остальных точках,} \end{cases} \tag{4.5}$$

где $l(f'(x)) = \min_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$.

Известно, что

$$K_{I,n}(x,f) \leqslant K^{n-1}_{O,n}(x,f) \tag{4.6}$$

(см., например, [22, разд. 1.2.1]).

Из соотношения (4.6) легко следует неравенство

$$K_{I,\alpha}(x,f) \leqslant K^{\alpha-1}_{O,p}(x,f). \tag{4.7}$$

Действительно,

$$K_{I,\alpha}(x,f) = K^{\frac{\alpha}{n}}_{I,n}(x,f)\, |J^{1-\frac{\alpha}{n}}(x,f)| \leqslant K^{\frac{\alpha(n-1)}{n}}_{O,n}(x,f)\, |J^{1-\frac{\alpha}{n}}(x,f)| = K^{\alpha-1}_{O,p}(x,f). \tag{4.8}$$

Известно, что $K_{I,2} = K_{O,2}$ при $n = 2$, но при $n \geqslant 3$ в (4.6) может иметь место строгое неравенство, как это показывает элементарный пример сжатия вдоль одной из осей.

Следующее утверждение см. в [11, теорема 1].

Предложение 4.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $p > n-1$ и $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция такая, что для некоторого $t_* \in (0,\infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{4.9}$$

Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $Q = K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.

Следствие 4.1. *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса $W^{1,q}_{\rm loc}$ при $q > n-1$ является нижним $K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p > n-1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.*

Следующий ряд теорем вытекает из предложения 4.1 и теорем пункта 3.

Теорема 4.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 3$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (4.9) и $f(0) = 0$. Предположим, что $p > n$ и для некоторых конечных чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ и $C_0 > 0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{k_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)} \geqslant C_0 \tag{4.10}$$

для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, где

$$k_{I,\alpha}(r) = \int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\, d\mathscr{A}_{n-1} \ \alpha = \frac{p}{p-n+1}. \tag{4.11}$$

Тогда имеет место оценка

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}} \leqslant \nu_0\, C_0^{-\frac{1}{p-n}}, \tag{4.12}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n, p, λ и σ.

Следствие 4.2. *В частности, если для некоторых конечных чисел $\lambda > 1$ и $C_0 > 0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{p-n} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{k_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)} \geqslant C_0 \tag{4.13}$$

для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, где

$$k_{I,\alpha}(r) = \int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\, d\mathscr{A}, \quad \alpha = \frac{p}{p-n+1}, \tag{4.14}$$

то при $p > n$ имеем

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0 C_0^{-\frac{1}{p-n}}, \tag{4.15}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n, p и λ.

Пример. Предположим, что $n \geqslant 3$ и $p > n$, $\sigma > 0$. Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, где

$$f(x) = \frac{x}{|x|}|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}$$

при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Касательная и радиальная дилатации f на сфере $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$, $r \in (0,1)$, легко вычисляются:

$$\delta_T = \frac{|f(x)|}{|x|} = |x|^{\frac{\sigma-p+n}{p-n}}$$

и

$$\delta_r = \frac{\sigma}{p-n}\,|x|^{\frac{\sigma-p+n}{p-n}}.$$

Заметим, что $\delta_T \geqslant \delta_r$. Следовательно, ввиду сферической симметрии мы видим, что

$$K_{I,\alpha}(x,f) = \frac{\delta_T^{n-1}\delta_r}{\delta_r^{\alpha}} = \left(\frac{p-n}{\sigma}\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}}|x|^{\frac{(n-1)(\sigma-p+n)}{p-n+1}}, \quad \alpha = \frac{p}{p-n+1}.$$

Интегрируя по сфере S_r, получаем

$$k_{I,\alpha}(r) = \int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\,d\mathscr{A}_{n-1} = \omega_{n-1}\left(\frac{p-n}{\sigma}\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}} r^{\frac{(n-1)(\sigma+1)}{p-n+1}}.$$

Откуда вытекает равенство

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{k_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)} = \frac{\sigma\varepsilon^{\sigma}}{p-n}\,\omega_{n-1}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} r^{-(\sigma+1)}\,dr = \omega_{n-1}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\frac{1-\lambda^{-\sigma}}{p-n} = C_0 > 0.$$

Этим показано, что условие (4.10) нашей теоремы выполнено.

С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}} = 1. \tag{4.16}$$

Замечание 4.1. Построенный пример показывает, что найденный порядок роста в оценке (4.12) является точным.

Теорема 4.2. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, n \geqslant 3$, — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (4.9), $p > n$ и $f(0) = 0$.*

1) *Если для некоторых конечных чисел $\theta \in \left[0, \frac{(p-n)(n-1)}{p-n+1}\right)$ и $\kappa_0 > 0$ выполнено условие*

$$\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\,d\mathscr{A}_{n-1} \leqslant \kappa_0 r^{-\theta} \tag{4.17}$$

для п. в. $r \in (0,r_0)$, $r_0 \in \left(0, e^{-1}\right)$, то

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\theta(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}}} \leqslant \nu_0\kappa_0^{\frac{p-n+1}{(p-n)(n-1)}}, \tag{4.18}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

2) *Если $K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(x,f)\in L_\beta(\mathbb{B}^n)$, $\beta>\frac{n}{p-n}$, то*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\beta(p-n)}}}\leqslant \nu_0\|K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}\|_\beta^{\frac{1}{p-n}}, \tag{4.19}$$

где $\|K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}\|_\beta=\left(\int_{\mathbb{B}^n}K_{I,\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha-1}}(x,f)dm(x)\right)^{\frac{1}{\beta}}$ — норма в пространстве $L_\beta(\mathbb{B}^n)$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и β.

Следствие 4.3. *Если для некоторого конечного числа $\kappa_0>0$ выполнено условие*

$$\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S_r}K_{I,\alpha}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)\,d\mathscr{A}_{n-1}\leqslant\kappa_0 \tag{4.20}$$

для п. в. $r\in(0,r_0)$, $r_0\in(0,e^{-1})$, то

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant \nu_0\kappa_0^{\frac{p-n+1}{(p-n)(n-1)}}, \tag{4.21}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Следствие 4.4. *В частности, все результаты имеют место для гомеоморфизмов с конечным искажением класса Соболева $W^{1,q}_{\rm loc}$ при $q>n-1$.*

Литература

1. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory.—N. Y.: Springer, 2009.—367 p.—(Springer Monogr. in Math.).
2. *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* On boundary value problems for the Beltrami equations // Contemp. Math.—2013.—Vol. 591.—P. 211–242.
3. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 4.—С. 101–124.
4. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Об отображениях в классах Орлича — Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вiсник.—2011.—Т. 8, № 3.—С. 319–342.
5. *Ковтонюк Д. А., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича — Соболева.—Киев: Наукова думка, 2013.—303 с.
6. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича — Соболева // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 6.—С. 1–53
7. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Граничное поведение классов Орлича — Соболева // Мат. заметки.—2014.—Т. 95, № 4.—С. 564–576.
8. *Салимов Р. Р.*, Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ.—2014.—Т. 26, № 6.—С. 143–171.
9. *Салимов Р. Р.* Метрические свойства классов Орлича — Соболева // Укр. мат. вiсник.—2016.—Т. 13, № 1.—С. 129–141.
10. *Салимов Р. Р.* О конечной липшицевости классов Орлича — Соболева // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 1.—С. 64–77.
11. *Салимов Р. Р.* О новом условии конечной липшицевости классов Орлича — Соболева // Мат. Студiї.—2015.—Т. 44, № 1.—С. 27–35.
12. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J.—1965.—Vol. 25.—P. 175–203.
13. *Ковтонюк Д., Рязанов В.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вiсник.—2008.—Т. 5, № 2.—С. 157–181.

14. *Сакс С.* Теория интеграла.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.
15. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—1969.—Vol. 448.—P. 1–40.
16. *Шлык В. А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 6.—С. 216–221.
17. *Maz'ya V.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math.—2003.—Vol. 338.—P. 307–340.
18. *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc.—1993.—Vol. 118.—P. 181–188.
19. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis.—Oxford: Clarendon Press, 2001.
20. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.—М.: Физматлит, 1958.
21. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.—Ленинград: ЛГУ, 1985.—416 с.
22. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением.—Новосибирск: Наука, 1982.

Статья поступила 23 октября 2014 г.

Салимов Руслан Радикович
Институт математики НАН Украины,
старший научный сотрудник
УКРАИНА, 01601, Киев-4, ул. Терещенковская, 3
E-mail: salimov07@rambler.ru, ruslan623@yandex.ru

ON THE POWER ORDER OF GROWTH OF LOWER Q-HOMEOMORPHISMS

Salimov R. R.

In the present paper we investigate the asymptotic behavior of Q-homeomorphisms with respect to a p-modulus at a point. The sufficient conditions on Q under which a mapping has a certain order of growth are obtained. We also give some applications of these results to Orlicz–Sobolev classes $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, under conditions of the Calderon type on φ and, in particular, to Sobolev classes $W^{1,p}_{\rm loc}$, $p > n-1$. We give also an example of a homeomorphism demonstrating that the established order of growth is precise.

Keywords: p-modulus, p-capacity, lower Q-homeomorphisms, mappings of finite distortion, Sobolev class, Orlicz–Sobolev class.