Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 4, С. 35–49

УДК **517.9**

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. И. Митрохин

Работа посвящена изучению дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемым потенциалом и периодическими граничными условиями. Метод изучения операторов с суммируемым потенциалом является развитием метода изучения операторов с кусочно-гладкими коэффициентами. Краевые задачи такого рода возникают при изучении колебаний балок и мостов, склеенных из материалов различной плотности. Решение дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор, сведено к решению интегрального уравнения Вольтерры. Интегральное уравнение решается методом последовательных приближений Пикара.
Целью исследования интегрального уравнения является получение асимптотических формул и оценок для решений дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. Вопросы геофизики, квантовой механики, кинетики, газодинамики и теории колебаний стержней, балок и мембран требуют развития асимптотических методов на случай негладких коэффициентов дифференциальных уравнений. Асимптотические методы продолжают развиваться, несмотря на бурное развитие численных методов, связанное с появлением мощных суперкомпьютеров, в настоящее время асимптотические и численные методы дополняют друг друга.
В статье при больших значениях спектрального параметра получена асимптотика решений дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. Асимптотические оценки решений устанавливаются аналогично асимптотическим оценкам решений дифференциального оператора второго порядка с гладкими коэффициентами. Изучение периодических граничных условий приводит к изучению корней функции, представленной в виде определителя четвёртого порядка. Для получения корней этой функции изучена индикаторная диаграмма. Корни этого уравнения находятся в четырех секторах бесконечно малого раствора, определяемых индикаторной диаграммой. В статье исследовано поведение корней этого уравнения в каждом из секторов индикаторной диаграммы. Найдена асимптотика собственных значений изучаемого дифференциального оператора. Полученные формулы для асимптотики собственных значений позволяют изучить спектральные свойства собственных функций исследуемого дифференциального оператора. Если потенциал оператора будет не суммируемой функцией, а только кусочно гладкой, то полученных формул для асимптотики собственных значений достаточно для вывода формулы первого регуляризованного следа изучаемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: дифференциальный оператор четвертого порядка, суммируемый потенциал, периодические граничные условия, спектральный параметр, асимптотика решений, асимптотика собственных значений.

1. Постановка задачи. Изучим спектральные свойства краевой задачи для дифференциального оператора четвертого порядка, задаваемого дифференциальным уравнением вида

$$y^{(4)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^4 y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad a > 0, \tag{1}$$

с периодическими граничными условиями

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi), \quad y''(0) = y''(\pi), \quad y^{(3)}(0) = y^{(3)}(\pi). \tag{2}$$

В дифференциальном уравнении (1) число $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, функция $\rho(x) = \alpha^4 > 0$ — весовая функция, функция $q(x)$ — потенциал. Мы предполагаем, что потенциал $q(x)$ является суммируемой функцией на отрезке $[0;\pi]$:

$$q(x) \in L_1[0;\pi] \Leftrightarrow \left(\int_0^x q(t)\,dt\right)'_x = q(x) \tag{3}$$

почти для всех x из отрезка $[0;\pi]$.

2. Исторический обзор. Сначала спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов изучались в том случае, когда коэффициенты дифференциальных уравнений, задающих эти операторы, были достаточно гладкими функциями. В работе [1] были получены асимптотические формулы для корней квазиполиномов, которые получаются при изучении операторов высших порядков с регулярными граничными условиями с гладкими коэффициентами. В работе [2] вычислены регуляризованные следы такого рода операторов. В работе [6] вычислены следы обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков с достаточно гладкими коэффициентами.

В работах [3] и [4] автор успешно понизил гладкость коэффициентов дифференциальных операторов и изучил операторы с кусочно-гладкими коэффициентами. В работе [5] изучен дифференциальный оператор, у которого не только потенциал является кусочно-непрерывной функцией, но и весовая функция также была кусочно-гладкой.

Резкий прогресс в изучении дифференциальных операторов был сделан совсем недавно, когда в работах [7] и [8] был изучен оператор второго порядка с суммируемым потенциалом, были вычислены асимптотики произвольного порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке. Методика работ [7, 8] для изучения спектральных свойств операторов с суммируемыми коэффициентами не переносится на операторы более высоких порядков.

В работах [9, 10] автором разработана новая методика для изучения дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами. В работе [9] был изучен оператор четвертого порядка, у которого не только потенциал, но и коэффициент при первой производной были интегрируемыми на отрезке функциями. В работе [10] рассматривался оператор шестого порядка с запаздывающим аргументом, потенциал оператора являлся суммируемой функцией на отрезке, граничные условия разделенные, была вычислена асимптотика собственных значений и собственных функций. Необходимо отметить, что с возрастанием порядка дифференциальных уравнений, задающих операторы, сложность выкладок возрастает многократно.

В работе [11] удалось изучить дифференциальный оператор произвольного нечетного порядка со стандартными фиксированными разделенными граничными условиями. В работе [12] изучены спектральные свойства целого семейства дифференциальных операторов высокого четного порядка с разделенными граничными условиями.

Периодические граничные условия, которые мы будем изучать в настоящей работе, являются неразделенными. Для дифференциальных операторов порядка выше второго неразделенные граничные условия (с целью отыскания асимптотики собственных значений) ранее фактически не изучались.

3. Асимптотика решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра λ. Введем следующие обозначения: $\lambda = s^4$, $s = \sqrt[4]{\lambda}$, при этом для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[4]{1} = +1$. Пусть w_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — различные корни четвертой степени из единицы:

$$w_k^4 = 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{4}(k-1)} \ (k = 1, 2, 3, 4); \quad w_1 = 1, \quad w_2 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i = z \neq 0,$$
$$w_3 = e^{\frac{4\pi i}{4}} = z^2 = -1, \quad w_4 = z^3 = -i. \tag{4}$$

Числа w_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ из (4) делят единичную окружность на четыре равные части, при этом справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{4} w_k^p = 0, \ p = 1, 2, 3; \qquad \sum_{k=1}^{4} w_k^p = 4, \ p = 0, \ p = 4. \tag{5}$$

Методом вариации постоянных устанавливается следующее утверждение.

Теорема 1. *Решение* $y(x, s)$ *дифференциального уравнения* (1) *является решением интегрального уравнения Вольтерры*

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^{4} C_k e^{a w_k s x} - \frac{1}{4a^3 s^3} \sum_{k=1}^{4} w_k e^{a w_k s x} \varphi_k(x, s), \tag{6}$$

$$\varphi_k(x, s) = \int\limits_0^x q(t) e^{-a w_k s t} y(t, s)\, dt, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{7}$$

◁ Проверить справедливость формул (6), (7) можно непосредственным дифференцированием, учитывая, что при выполнении условия суммируемости (3) почти всюду на отрезке $[0; \pi]$ справедлива следующая формула:

$$\frac{d}{dx}(\varphi_k(x, s)) = \left(\int\limits_0^x q(t) e^{-a w_k s t} y(t, s)\, dt \right)'_x = q(x) e^{-a w_k s x} y(x, s).$$

Поэтому из формул (6), (7) имеем

$$y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^{4} C_k (a w_k s)^m e^{a w_k s x} - \frac{1}{4a^3 s^3} \sum_{k=1}^{4} w_k (a w_k s)^m e^{a w_k s x} \varphi_k(x, s)$$
$$- \frac{1}{4a^3 s^3} \phi_m(x, s), \quad m = 1, 2, 3, \tag{8}$$

$$\phi_m(x, s) = \sum_{k=1}^{4} w_k (a w_k s)^{m-1} e^{a w_k s x} q(x) e^{-a w_k s x} y(x, s) = 0, \quad m = 1, 2, 3,$$

в силу соотношений (5) и свойства суммируемости (3).

Продифференцируем $y^{(3)}(x, s)$ из (8) еще раз по переменной x, подставим получившееся выражение и (6), (7) в дифференциальное уравнение (1), увидим, что $y^{(4)}(x, s) + q(x) y(x, s) - \lambda a^4 y(x, s) = 0$ почти для всех x из отрезка $[0; \pi]$, т. е. убедимся в том, что $y(x, s)$ из (6), (7) действительно является решением уравнения (1). ▷

Асимптотику решений интегрального уравнения (6) найдем методом последовательных приближений Пикара: найдем $y(t,s)$ из уравнения (6), подставим $y(t,s)$ в уравнение (6), получим

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k e^{aw_k sx}-\frac{1}{4a^3s^3}\sum_{k=1}^{4}w_k e^{aw_k sx}\int\limits_0^x q(t)e^{-aw_k st}$$
$$\times\left\{\sum_{k=1}^{4}C_k e^{aw_k st}-\frac{1}{4a^3s^3}\sum_{k=1}^{4}w_k e^{aw_k st}\int\limits_0^t q(\xi)e^{-aw_k sx}y(\xi,s)\,d\xi\right\}dt. \quad (9)$$

Произведя в (9) необходимые преобразования, находим

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k e^{aw_k sx}-\frac{1}{4a^3s^3}\sum_{k=1}^{4}C_k\psi_{3k}(x,s)+\frac{H_6(x,s)}{16a^6s^6}, \quad (10)$$

$$\psi_{3k}(x,s)=\sum_{n=1}^{4}w_n e^{aw_n sx}\int\limits_0^x q(t)e^{a(w_k-w_n)st}dt_{akn}, \quad k=1,2,3,4, \quad (11)$$

$$H_6(x,s)=\sum_{p=1}^{4}w_p e^{aw_p sx}\int\limits_0^x q(t)e^{-aw_p st}\left(\sum_{n=1}^{4}w_n e^{aw_n st}\int\limits_0^t q(\xi)e^{-aw_n s\xi}y(\xi,s)\,d\xi\right)dt. \quad (12)$$

Подставим в формулу (12) выражение для $y(\xi,s)$ из (6), (7), получим:

$$H_6(x,s)=\sum_{p=1}^{4}w_p e^{aw_p sx}\int\limits_0^x q(t)e^{-aw_p st}\left(\sum_{n=1}^{4}w_n e^{aw_n st}\int\limits_0^t q(\xi)e^{-aw_n s\xi}\right.$$
$$\left.\times\left[\sum_{r=1}^{4}C_r e^{aw_r s\xi}-\frac{1}{4a^3s^3}\sum_{r=1}^{4}w_r e^{aw_r s\xi}\varphi_r(\xi,s)\right]d\xi\right)dt. \quad (13)$$

Поменяв в (13) порядок суммирования и сделав необходимые выкладки и упрощения, находим

$$H_6(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k H_{6k}(x,s), \quad (14)$$

$$H_{6k}(x,s)=\sum_{n=1}^{4}w_n e^{aw_n sx}\left[\sum_{p=1}^{4}w_p\int\limits_0^x q(t)e^{a(w_p-w_n)st}\right.$$
$$\left.\times\left(\int\limits_0^t q(\xi)e^{a(w_k-w_p)s\xi}\,d\xi\right)dt_{a_pnkp}\right]+\frac{H_{9k}(x,s)}{4a^3s^3}, \quad k=1,2,3,4. \quad (15)$$

Проанализировав формулы (9)–(15), приходим к выводу, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Общее решение дифференциального уравнения* (1) *при условии суммируемости потенциала* (3) *имеет следующий вид:*

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k y_k(x,s);\quad y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k y_k^{(m)}(x,s),\quad m=1,2,3, \tag{16}$$

причем фундаментальная система решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^4$ *подчиняется следующей асимптотике при* $s\to\infty$:

$$y_k(x,s)=e^{aw_ksx}-\frac{\psi_{3k}(x,s)}{4a^3s^3}+\frac{H_{6k}(x,s)}{16\,a^6s^6}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|ax}}{s^9}\right),\quad k=1,2,3,4, \tag{17}$$

$$y_k^{(m)}(x,s)=(as)^m\left\{w_k^m e^{aw_ksx}-\frac{\psi_{3k}^m(x,s)}{4a^3s^3}+\frac{H_{6k}^m(x,s)}{16a^6s^6}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|ax}}{s^9}\right)\right\}, \tag{18}$$
$$k=1,2,3,4;\quad m=1,2,3,$$

функции ψ_{3k} $(k=1,2,3,4)$ *определены формулой* (11), *функции* $H_{6k}(x,s)$ $(k=1,2,3,4)$ *определены формулой* (15),

$$\psi_{3k}^m(x,s)=\sum_{n=1}^{4}w_nw_n^m e^{aw_nsx}\int_0^x q(t)e^{a(w_k-w_n)st}\,dt_{akn},\quad k=1,2,3,4;\ m=1,2,3, \tag{19}$$

$$H_{6k}^m(x,s)=\sum_{n=1}^{4}w_nw_n^m e^{aw_nsx}\left[\sum_{p=1}^{4}w_p\int_0^x q(t)e^{a(w_p-w_n)st}\right.$$
$$\left.\times\left(\int_0^t q(\zeta)e^{a(w_k-w_p)s\zeta}\,d\zeta\right)dt_{apnkp}\right],\quad k=1,2,3,4;\ m=1,2,3. \tag{20}$$

Асимптотические оценки (17), (18) устанавливаются аналогично асимптотическим оценкам для дифференциального оператора второго порядка (см. [13, гл. 2], [14, гл. 2]).

При этом при выводе формул (16)–(20) мы требовали выполнения следующих начальных условий:

$$\psi_{3k}(0,s)=0;\quad H_{6k}(0,s)=0;\quad \psi_{3k}^m(0,s)=0;\quad H_{6k}^m(0,s)=0;$$
$$y_k(0,s)=1;\quad y_k^{(m)}(0,s)=(as)^m w_k^m,\quad k=1,2,3,4;\ m=1,2,3. \tag{21}$$

4. Изучение граничных условий (2). Подставляя формулы (16) для общего решения дифференциального уравнения (1) в граничные условия (2), получаем

$$\begin{cases} y(\pi,s)\overset{(2)}{=}y(0,s)\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{4}C_ky_k(\pi,s)=\sum\limits_{k=1}^{4}C_ky_k(0,s)\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{4}C_k[y_k(\pi,s)-y_k(0,s)]=0;\\ \frac{y^{(m)}(\pi,s)}{(as)^m}\overset{(2)}{=}\frac{y^{(m)}(0,s)}{(as)^m}\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{4}C_k\left[\frac{y_k^{(m)}(\pi,s)}{(as)^m}-\frac{y_k^{(m)}(0,s)}{(as)^m}\right]=0,\quad m=1,2,3.\end{cases} \tag{22}$$

Система (22) представляет собой линейную однородную систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными C_1, C_2, C_3, C_4. Из метода Крамера следует, что такая система имеет ненулевые решения ($C_1^4+C_2^4+C_3^4+C_4^4\neq 0$) только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(2) *с условием суммируемости потенциала* (3) *имеет следующий вид:*

$$f(s)=\begin{vmatrix} y_1(\pi,s)-y_1(0,s) & y_2(\pi,s)-y_2(0,s) & y_3(\pi,s)-y_3(0,s) & y_4(\pi,s)-y_4(0,s)\\ \frac{y_1'(\pi,s)}{as}-\frac{y_1'(0,s)}{as} & \frac{y_2'(\pi,s)}{as}-\frac{y_2'(0,s)}{as} & \frac{y_3'(\pi,s)}{as}-\frac{y_3'(0,s)}{as} & \frac{y_4'(\pi,s)}{as}-\frac{y_4'(0,s)}{as}\\ \frac{y_1''(\pi,s)}{(as)^2}-\frac{y_1''(0,s)}{(as)^2} & \frac{y_2''(\pi,s)}{(as)^2}-\frac{y_2''(0,s)}{(as)^2} & \frac{y_3''(\pi,s)}{(as)^2}-\frac{y_3''(0,s)}{(as)^2} & \frac{y_4''(\pi,s)}{(as)^2}-\frac{y_4''(0,s)}{(as)^2}\\ \frac{y_1^{(3)}(\pi,s)}{(as)^3}-\frac{y_1^{(3)}(0,s)}{(as)^3} & \frac{y_2^{(3)}(\pi,s)}{(as)^3}-\frac{y_2^{(3)}(0,s)}{(as)^3} & \frac{y_3^{(3)}(\pi,s)}{(as)^3}-\frac{y_3^{(3)}(0,s)}{(as)^3} & \frac{y_4^{(3)}(\pi,s)}{(as)^3}-\frac{y_4^{(3)}(0,s)}{(as)^3} \end{vmatrix}=0. \tag{23}$$

Подставляя формулы (17), (18) в уравнение (23) и учитывая начальные условия (21), приведем уравнение (23) к следующему виду:

$$f(s)=\left\|b_{mn}^{(s)}\right\|_{m,n=1}^{4}=0, \tag{24}$$

$$b_{1n}(s)=(e^{w_n}-1)-\frac{\psi_{3n}(\pi,s)}{M^3}+\frac{H_{6n}(\pi,s)}{M^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right),\qquad n=1,2,3,4;$$
$$b_{mn}(s)=w_n^m(e^{w_n}-1)-\frac{\psi_{3n}^m(\pi,s)}{M^3}+\frac{H_{6n}^m(\pi,s)}{M^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right),\ \ m=2,3,4;\ \ n=1,2,3,4,$$

где введены следующие обозначения: $e^{w_k}=a^{aw_k s\pi}$, $M^3=4a^3s^3$, $M^6=16a^6s^6$.

Раскладывая определитель $f(s)$ из (24) по столбцам на сумму определителей, получаем

$$f(s)=f_0(s)-\frac{f_3(s)}{4a^3s^3}+\frac{f^6(s)}{16a^6s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)=0, \tag{25}$$

основное приближение имеет вид

$$f_0(s)=0, \tag{26}$$

$$f_0(s)=\begin{vmatrix} 1(e^{w_1}-1) & 1(e^{w_2}-1) & 1(e^{w_3}-1) & 1(e^{w_4}-1)\\ w_1(e^{w_1}-1) & w_2(e^{w_2}-1) & w_3(e^{w_3}-1) & w_4(e^{w_4}-1)\\ w_1^2(e^{w_1}-1) & w_2^2(e^{w_2}-1) & w_3^2(e^{w_3}-1) & w_4^2(e^{w_4}-1)\\ w_1^3(e^{w_1}-1) & w_2^3(e^{w_2}-1) & w_3^3(e^{w_3}-1) & w_4^3(e^{w_4}-1) \end{vmatrix} \tag{27}$$
$$=W_0(e^{aw_1s\pi}-1)(e^{aw_2s\pi}-1)(e^{aw_3s\pi}-1)(e^{aw_4s\pi}-1),$$

где W_0 — определитель Вандермонда чисел w_1, w_2, w_3, w_4:

$$W_0=\det \mathrm{Wandermound's}(w_1,w_2,w_3,w_4)$$
$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4\\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & w_4^2\\ w_1^3 & w_2^3 & w_3^3 & w_4^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}=-16i\neq 0, \tag{28}$$

$$f_3(s)=\sum_{k=1}^{4}f_{3k}(s),\quad f_6(s)=\sum_{k=1}^{4}f_{6k}(s)+\sum_{k=5}^{10}f_{6k}(s), \tag{29}$$

определители $f_{3k}(s)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ получаются из определителя $f_0(s)$ из (27) заменой k-го столбца на столбец $(\psi_{3k}(\pi, s),\ \psi^1_{3k}(\pi, s),\ \psi^2_{3k}(\pi, s),\ \psi^3_{3k}(\pi, s))^*$, например,

$$f_{31}(s) = \begin{vmatrix} \psi_{31}(\pi, s) & 1(e^{w_2} - 1) & 1(e^{w_3} - 1) & 1(e^{w_4} - 1) \\ \psi^1_{31}(\pi, s) & w_2(e^{w_2} - 1) & w_3(e^{w_3} - 1) & w_4(e^{w_4} - 1) \\ \psi^2_{31}(\pi, s) & w_2^2(e^{w_2} - 1) & w_3^2(e^{w_3} - 1) & w_4^2(e^{w_4} - 1) \\ \psi^3_{31}(\pi, s) & w_2^3(e^{w_2} - 1) & w_3^3(e^{w_3} - 1) & w_4^3(e^{w_4} - 1) \end{vmatrix}, \tag{30}$$

определители $f_{6k}(s)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ получаются из определителя $f_0(s)$ из (27) заменой k-го столбца на столбец $(H_{6k}(\pi, s),\ H^1_{6k}(\pi, s),\ H^2_{6k}(\pi, s),\ H^3_{6k}(\pi, s))^*$, например,

$$f_{62}(s) = \begin{vmatrix} 1(e^{w_1} - 1) & H_{62}(\pi, s) & 1(e^{w_3} - 1) & 1(e^{w_4} - 1) \\ w_1(e^{w_1} - 1) & H^1_{62}(\pi, s) & w_3(e^{w_3} - 1) & w_4(e^{w_4} - 1) \\ w_1^2(e^{w_1} - 1) & H^2_{62}(\pi, s) & w_3^2(e^{w_3} - 1) & w_4^2(e^{w_4} - 1) \\ w_1^3(e^{w_1} - 1) & H^3_{62}(\pi, s) & w_3^2(e^{w_3} - 1) & w_4^3(e^{w_4} - 1) \end{vmatrix}, \tag{31}$$

определители $f_{6k}(s)$ $(k = 5, 6, \ldots, 10)$ получаются из определителя $f_0(s)$ из (27) заменой двух столбцов (под номерами k_1 и k_2) на столбцы $(\psi_{3k_1}(\pi, s); \psi^1_{3k_1}(\pi, s); \psi^2_{3k_1}(\pi, s); \psi^3_{3k_1}(\pi, s))^*$ и $(\psi_{3k_2}(\pi, s); \psi^1_{3k_2}(\pi, s); \psi^2_{3k_2}(\pi, s); \psi^3_{3k_2}(\pi, s))^*$, например,

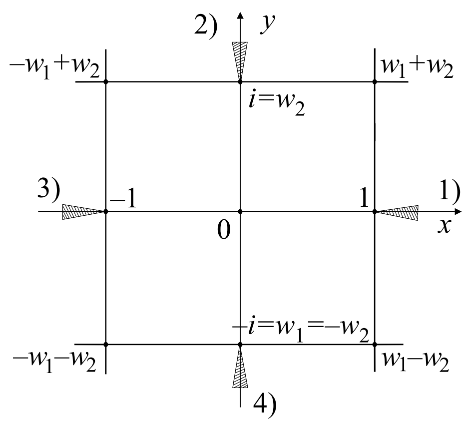
$$f_{65}(s) = \begin{vmatrix} \psi_{31}(\pi, s) & \psi_{32}(\pi, s) & 1(e^{w_3} - 1) & 1(e^{w_4} - 1) \\ \psi^1_{31}(\pi, s) & \psi^2_{32}(\pi, s) & w(e^{w_3} - 1) & w_4(e^{w_4} - 1) \\ \psi^2_{31}(\pi, s) & \psi^2_{32}(\pi, s) & w_3^2(e^{w_3} - 1) & w_4^2(e^{w_4} - 1) \\ \psi^3_{31}(\pi, s) & \psi^3_{32}(\pi, s) & w_3^2(e^{w_3} - 1) & w_4^3(e^{w_4} - 1) \end{vmatrix}, \tag{32}$$

в определителе $f_{66}(s)$ меняются 1-й и 3-й столбцы, в определителе $f_{67}(s)$ — 1-й и 4-й столбцы, в $f_{68}(s)$ — 2-й и 3-й столбцы, в $f_{69}(s)$ — 2-й и 4-й столбцы, в определителе $f_{6,10}(s)$ — 3-й и 4-й столбцы.

Учитывая, что в силу формул (4) $w_3 = -w_1$, $w_4 = -w_2$, определитель $f_0(s)$ из (27) преобразуется к следующему виду:

$$f_0(s) = W_0\Big\{e^{w_1+w_2} + e^{w_1-w_2} + e^{-w_1+w_2} + e^{-w_1-w_2} - 2e^{w_1} - 2e^{-w_1} - 2e^{w_2} - 2e^{-w_2} + 4\Big\}. \tag{33}$$

Индикаторная диаграмма 1 уравнения (25)–(32) (см. [15, гл. 12]), т. е. выпуклая оболочка показателей экспонент, входящих в это уравнение, в силу (33) имеет следующий вид:



Индикаторная диаграмма 1.

Поэтому из общей теории (см. [15, гл. 12]) следует, что для нахождения асимптотики корней уравнений (25)–(29) и $f_0(s) = 0$ из (33), в секторе 1) индикаторной диаграммы 1 надо оставить экспоненты с показателями $w_1 - w_2, w_1$ и $w_1 + w_2$, в секторе 2) необходимо оставить экспоненты с показателями $w_1 + w_2, w_2$ и $w_1 - w_2$, в секторе 3) — экспоненты с показателями $-w_1 + w_2, -w_1$ и $-w_1 - w_2$, в секторе 4) — экспоненты с показателями $-w_1 - w_2$, $-w_2$ и $w_1 - w_2$.

5. Изучение определителей $f_{3k}(s)$ и $f_{6k}(s)$ из (25)–(32). Подставляя функции $\psi_{31}(\pi, s)$ из (11) и $\psi_{31}^{(m)}(\pi, s)$ $(m = 1, 2, 3)$ из (19) в определитель $f_{31}(s)$ из (30), вынесем множители $(e^{w_2} - 1)$, $(e^{w_3} - 1)$ и $(e^{w_4} - 1)$ из 2-го, 3-го и 4-го столбцов, получим

$$f_{31}(s) = \begin{vmatrix} \psi_{31}(\pi, s) & 1 & 1 & 1 \\ \psi_{31}^1(\pi, s) & w_2 & w_3 & w_4 \\ \psi_{31}^2(\pi, s) & w_2^2 & w_3^2 & w_4^2 \\ \psi_{31}^2(\pi, s) & w_2^3 & w_3^3 & w_4^3 \end{vmatrix} (e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1), \tag{34}$$

$$\psi_{31}(\pi, s) = \sum_{p=1}^{4} w_p e^{w_p} \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a1p};$$

$$\psi_{31}^m(\pi, s) = \sum_{p=1}^{4} w_p w_p^m e^{w_p} \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a1p}, \quad m = 1, 2, 3.$$

Раскладывая определитель $f_{31}(s)$ из (34) по столбцам на сумму определителей, используя свойства определителей, находим

$$f_{31}(s) = w_1 W_0 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a11} e^{w_1}(e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1), \tag{35}$$

где определитель W_0 определен формулой (28).

Аналогичным образом выводим

$$f_{32}(s) = w_2 W_0 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a22} e^{w_2}(e^{w_1} - 1)(e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1), \tag{36}$$

$$f_{33}(s) = w_3 W_0 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a33} e^{w_2}(e^{w_1} - 1)(e^{w_2} - 1)(e^{w_4} - 1), \tag{37}$$

$$f_{34}(s) = w_4 W_0 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a44} e^{w_4}(e^{w_1} - 1)(e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1), \tag{38}$$

при этом отметим, что в силу формулы (11) имеем

$$\left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a11} = \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a22} = \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a33} = \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a44} = \int_0^\pi q(t)\, dt_{a11}. \tag{39}$$

Используя формулы (15) и (20), для определителя $f_{62}(s)$ из (31) имеем

$$f_{62}(s)=\begin{vmatrix} 1 & \sum\limits_{n=1}^{4} w_n e^{w_n}\left(\sum\limits_{p=1}^{4} w_p\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{apn2p}\right) & 1 & 1\\ w_1 & \sum\limits_{n=1}^{4} w_n w_n e^{w_n}\left(\sum\limits_{p=1}^{4} w_p\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{apn2p}\right) & w_3 & w_4\\ w_1^2 & \sum\limits_{n=1}^{4} w_n w_n^2 e^{w_n}\left(\sum\limits_{p=1}^{4} w_p\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{apn2p}\right) & w_3^2 & w_4^2\\ w_1^3 & \sum\limits_{n=1}^{4} w_n w_n^3 e^{w_n}\left(\sum\limits_{p=1}^{4} w_p\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{apn2p}\right) & w_3^3 & w_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\times (e^{w_1}-1)(e^{w_3}-1)(e^{w_4}-1), \quad (40)$$

откуда, используя свойства определителей, находим

$$f_{62}(s)=w_2W_0\left(\sum_{n=1}^{4} w_n\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{an22n}\right)e^{w_2}(e^{w_1}-1)(e^{w_3}-1)(e^{w_4}-1). \quad (41)$$

Аналогично выводу формул (40) и (41) получаем

$$f_{61}(s)=w_1W_0\left(\sum_{n=1}^{4} w_n\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{an11n}\right)e^{w_1}(e^{w_2}-1)(e^{w_3}-1)(e^{w_4}-1), \quad (42)$$

$$f_{63}(s)=w_3W_0\left(\sum_{n=1}^{4} w_n\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{an33n}\right)e^{w_3}(e^{w_1}-1)(e^{w_2}-1)(e^{w_4}-1), \quad (43)$$

$$f_{64}(s)=w_4W_0\left(\sum_{n=1}^{4} w_n\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{an44n}\right)e^{w_4}(e^{w_1}-1)(e^{w_2}-1)(e^{w_3}-1). \quad (44)$$

Используя свойства, примененные нами при выводе формул (34)–(44), для определителя $f_{65}(s)$ из (32) имеем:

$$f_{65}(s)=\begin{vmatrix} \sum\limits_{n=1}^{4} w_n e^{w_n}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a1n} & \sum\limits_{n=1}^{4} w_n e^{w_n}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a2n} & 1 & 1\\ \sum\limits_{n=1}^{4} w_n w_n e^{w_n}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a1n} & \sum\limits_{n=1}^{4} w_n w_n e^{w_n}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a2n} & w_3 & w_4\\ \sum\limits_{n=1}^{4} w_n w_n^2 e^{w_n}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a1n} & \sum\limits_{n=1}^{4} w_n w_n^2 e^{w_n}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a2n} & w_3^2 & w_4^2\\ \sum\limits_{n=1}^{4} w_n w_n^3 e^{w_n}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a1n} & \sum\limits_{n=1}^{4} w_n w_n^3 e^{w_n}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a2n} & w_3^3 & w_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\times (e^{w_3}-1)(e^{w_4}-1)=w_1w_2W_0e^{w_1}e^{w_2}(e^{w_3}-1)(e^{w_4}-1)$$

$$\times\left[\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a11}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a22}-\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a12}\left(\int\limits_0^{\pi}\dots\right)_{a21}\right]. \quad (45)$$

Аналогичным образом находим:

$$f_{66}(s) = w_1 w_3 W_0 e^{w_1} e^{w_3} (e^{w_2} - 1)(e^{w_4} - 1)$$
$$\times \left[\left(\int_0^\pi \dots \right)_{a11} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a33} - \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a13} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a31} \right], \quad (46)$$

$$f_{67}(s) = w_1 w_4 W_0 e^{w_1} e^{w_4} (e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1)$$
$$\times \left[\left(\int_0^\pi \dots \right)_{a11} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a44} - \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a14} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a41} \right], \quad (47)$$

$$f_{68}(s) = w_2 w_3 W_0 e^{w_2} e^{w_3} (e^{w_1} - 1)(e^{w_4} - 1)$$
$$\times \left[\left(\int_0^\pi \dots \right)_{a22} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a33} - \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a23} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a32} \right], \quad (48)$$

$$f_{69}(s) = w_2 w_4 W_0 e^{w_2} e^{w_4} (e^{w_1} - 1)(e^{w_3} - 1)$$
$$\times \left[\left(\int_0^\pi \dots \right)_{a22} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a44} - \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a24} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a42} \right], \quad (49)$$

$$f_{6,10}(s) = w_3 w_4 W_0 e^{w_3} e^{w_4} (e^{w_1} - 1)(e^{w_2} - 1)$$
$$\times \left[\left(\int_0^\pi \dots \right)_{a33} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a44} - \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a34} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a43} \right]. \quad (50)$$

6. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) **в секторе** 1) **индикаторной диаграммы** 1. Используя замечание, сделанное нами после формулы (33), в формулах (35)–(39), (41)–(44) и (45)–(50) необходимо сделать нужные перемножения и в секторе 1) индикаторной диаграммы оставить экспоненты с показателями $w_1 - w_2, w_1$ и $w_1 + w_2$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(2) (*с условием* (3) *суммируемости потенциала* $q(x)$) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы* 1 *имеет следующий вид:*

$$g_1(s) = g_{1,0}(s) - \frac{g_{1,3}(s)}{4a^3 s^3} + \frac{g_{1,6}(s)}{16a^6 s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) = 0, \quad (51)$$

$$g_{1,0}(s) = e^{a(w_1+w_2)s\pi} - 2e^{aw_1 s\pi} + e^{a(w_1-w_2)s\pi}, \quad (52)$$

$$g_{1,3}(s) = \Big\{ w_1 \big[e^{w_1+w_2} - 2e^{w_1} + e^{w_1-w_2} \big] + w_2 \big[e^{w_1+w_2} - e^{w_1} \big]$$
$$+ w_4 \big[e^{w_1-w_2} - e^{w_1} \big] \Big\} \int_0^\pi q(t)\, dt_{a11}, \; e^{w_k} = e^{aw_k s\pi}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (53)$$

$$g_{1,6}(s) = g_{1,6,1}(s) + g_{1,6,2}(s);$$

$$g_{1,6,1}(s) = w_1\big[e^{w_1+w_2} - 2e^{w_1} + e^{w_1-w_2}\big]\sum_{n=1}^{4} w_n\left(\int_0^\pi \dots\right)_{an11n} \tag{54}$$

$$+\,w_2\big[e^{w_1+w_2} - e^{w_1}\big]\sum_{n=1}^{4} w_n\left(\int_0^\pi \dots\right)_{an22n} + (-w_2)\big[e^{w_1-w_2} - e^{w_1}\big]\sum_{n=1}^{4} w_n\left(\int_0^\pi \dots\right)_{an44n},$$

$$g_{1,6,2}(s) = w_1w_2\big[e^{w_1+w_2} - e^{w_1}\big]\left[\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a11}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a22} - \left(\int_0^\pi \dots\right)_{a12}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a21}\right]$$

$$-w_1w_2\big[e^{w_1-w_2} - e^{w_1}\big]\left[\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a11}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a44} - \left(\int_0^\pi \dots\right)_{a14}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a41}\right] \tag{55}$$

$$+\,w_2w_2e^{w_1}\left[\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a22}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a44} - \left(\int_0^\pi \dots\right)_{a24}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a42}\right].$$

При этом заметим, что в формулах (51)–(55) мы можем поделить на $e^{w_1} = e^{aw_1s\pi} \neq 0$.

Основное приближение уравнения (51)–(55) имеет вид $g_{1,0}(s) = 0 \Leftrightarrow e^{aw_2s\pi} - 2 + e^{-aw_2s\pi} = 0 \Leftrightarrow e^{aw_2s\pi} = 1$ (корень кратности 2) $\Leftrightarrow s_{k,1\text{осн}} = \frac{2k}{a}$, $k \in \mathbb{Z}$, индекс 1 у $s_{k,1\text{осн}}$ означает, что мы изучаем сектор 1), «осн» означает «основное» приближение.

Теорема 5. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(3) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы* 1 *имеет следующий вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2k}{a} + \frac{2d_{3k,1}}{ak^3} + \frac{2d_{6k,1}}{ak^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^9}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{56}$$

$\lhd$ Для доказательства теоремы 5 необходимо показать, что коэффициенты $d_{3k,1}$ в формуле (56) находятся единственным образом и привести формулы для их вычисления в явном виде.

Используя формулы Маклорена и формулу (56), имеем

$$e^{\pm aw_2s\pi}\Big|_{s_{k,1}} = 1 \pm \frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3} \pm \frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6} - \frac{2\pi^2 d_{3k,1}^2}{k^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^9}\right), \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^3}\Big|_{s_{k,1}} &= \frac{a^3}{8k^3}\left[1 - \frac{3d_{3k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right)\right], \\ \frac{1}{s^6}\Big|_{s_{k,1}} &= \frac{a^6}{64k^6}\left[1 - \frac{6d_{3k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right)\right]. \end{aligned} \tag{58}$$

Подставляя формулы (56)–(58) в уравнение (51)–(54), получаем

$$\Bigg[1+\frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3}+\frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6}-\frac{2\pi^2 d_{3k,1}^2}{k^6}+\underline{O}\bigg(\frac{1}{k^9}\bigg)$$
$$-2+1-\frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3}-\frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6}-\frac{2\pi^2 d_{3k,1}^2}{k^6}+\underline{O}\bigg(\frac{1}{k^9}\bigg)\Bigg]$$
$$-\frac{1}{4a^3}\frac{a^3}{8k^3}\bigg[1-\frac{3d_{3k,1}}{k^4}+\underline{O}\bigg(\frac{1}{k^7}\bigg)\bigg]\int\limits_0^\pi q(t)dt_{a11}\bigg\{w_1\bigg[1+\frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3}$$
$$+\underline{O}\bigg(\frac{1}{k^6}\bigg)-2+1-\frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3}++\underline{O}\bigg(\frac{1}{k^6}\bigg)\bigg]+w_2\bigg[1+\frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3}+\underline{O}\bigg(\frac{1}{k^6}\bigg)-1\bigg]$$
$$-w_2\bigg[1-\frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3}+\underline{O}\bigg(\frac{1}{k^6}\bigg)-1\bigg]+\frac{1}{16a^6}\frac{a^6}{64k^6}\bigg[1-\frac{6d_{3k,1}}{k^4}+\underline{O}\bigg(\frac{1}{k^7}\bigg)\bigg]$$
$$\times\bigg[g_{1,6,1}(s)\Big|_{s_{k,1}}+g_{1,6,2}(s)\Big|_{s_{k,1}}\bigg]\bigg\}+\underline{O}\bigg(\frac{1}{k^9}\bigg). \quad (59)$$

Приравнивая в уравнении (59) последовательно коэффициенты при k^0, k^{-3}, k^{-6}, выводим формулу

$$d_{3k,1}=\frac{1}{32\pi}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt_{a11},\quad k\in\mathbb{N}. \quad (60)$$

Получение формулы (60) завершает доказательство теоремы 5. ▷

Изучая аналогичным образом сектора 2), 3), 4) индикаторной диаграммы 1, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 6. *Асимптотика собственных значений оператора* (1)–(3) *в секторах* 2)–4) *индикаторной диаграммы* 1 *удовлетворяет следующим асимптотикам:*

1)

$$\begin{aligned}
&s_{k,2}=s_{k,1}e^{\frac{\pi i}{2}},\\
&s_{k,3}=s_{k,2}e^{\frac{\pi i}{2}}=s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{2}},\\
&s_{k,4}=s_{k,3}e^{\frac{\pi i}{2}}=s_{k,1}e^{\frac{3\pi i}{2}},\\
&s_{k,m}=s_{k,1}e^{\frac{\pi i}{2}(m-1)},\quad m=1,2,3,4,
\end{aligned} \quad (61)$$

где числа $s_{k,1}$ *определены формулами* (56), (60);

2)

$$\lambda_{k,m}=s_{k,m}^4,\quad m=1,2,3,4;\ k\in\mathbb{N}. \quad (62)$$

Для нахождения асимптотики собственных значений функций можно доказать следующее утверждение.

Теорема 7. *Собственные функции $y_k(x,s)$ дифференциального оператора* (1)–(3) *удовлетворяют следующим асимптотикам:*

$$y_{k,m}(x,s) = \left.\begin{vmatrix} y_1(\pi,s)-y_1(0,s) & y_2(\pi,s)-y_2(0,s) & y_3(\pi,s)-y_3(0,s) & y_4(\pi,s)-y_4(0,s) \\ \frac{y_1'(\pi,s)}{as}-\frac{y_1'(0,s)}{as} & \frac{y_2'(\pi,s)}{as}-\frac{y_2'(0,s)}{as} & \frac{y_3'(\pi,s)}{as}-\frac{y_3'(0,s)}{as} & \frac{y_4'(\pi,s)}{as}-\frac{y_4'(0,s)}{as} \\ \frac{y_1''(\pi,s)}{(as)^2}-\frac{y_1''(0,s)}{(as)^2} & \frac{y_2''(\pi,s)}{(as)^2}-\frac{y_2''(0,s)}{(as)^2} & \frac{y_3''(\pi,s)}{(as)^2}-\frac{y_3''(0,s)}{(as)^2} & \frac{y_4''(\pi,s)}{(as)^2}-\frac{y_4''(0,s)}{(as)^2} \\ \frac{y_1^{(3)}(x,s)}{(as)^3}-\frac{y_1^{(3)}(0,s)}{(as)^3} & \frac{y_2^{(3)}(x,s)}{(as)^3}-\frac{y_2^{(3)}(0,s)}{(as)^3} & \frac{y_3^{(3)}(x,s)}{(as)^3}-\frac{y_3^{(3)}(0,s)}{(as)^3} & \frac{y_4^{(3)}(x,s)}{(as)^3}-\frac{y_4^{(3)}(0,s)}{(as)^3} \end{vmatrix}\right|_{s=s_{k,m}},$$

где числа $s_{k,m}$ определены формулами (56), (60)–(62), *функции $y_n^{(p)}(x,s)$ удовлетворяют асимптотикам* (17), (18), (21), $n = 1,2,3,4$, $p = 0,1,2,3$.

Литература

1. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб.—1968.—Т. 65, № 4.—С. 558–566.
2. *Лидский В. В., Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функц. анализ и его приложения.—1967.—Т. 1, № 2.—С. 52–59.
3. *Митрохин С. И.* О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. МГУ. Серия: математика, механика.—1986.—№ 6.—С. 3–6.
4. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // Диф. уравнения.—1992.—Т. 28, № 3.—С. 530–532.
5. *Митрохин С. И.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Докл. РАН.—1997.—Т. 356, № 1.—С. 13–15.
6. *Садовничий В. А.* О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Мат. сб.—1967.—Т. 72, № 2.—С. 293–310.
7. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Диф. уравнения.—1998.—Т. 34, № 10.—С. 1423–1426.
8. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Изв. РАН. Сер. Математика.—2000.—Т. 64, № 4.—С. 47–108.
9. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Тр. МИАН.—2010.—Т. 270.—С. 188–197.
10. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфимский мат. журн.—2011.—Т. 3, № 4.—С. 95–115.
11. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом // Диф. уравнения.—2011.—Т. 47, № 2.—С. 1808–1811.
12. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах семейства дифференциальных операторов высокого четного порядка с суммируемым потенциалом // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика.—2016.—№ 4.—С. 121–135.
13. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969.—528 с.
14. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач.—М.: Физматлит, 2007.—384 с.
15. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения.—М.: Мир, 1967.—548 с.

Статья поступила 2 февраля 2017 г.

Митрохин Сергей Иванович
НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, г. Москва, Воробьевы Горы, д. 1
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

A PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A SUMMABLE POTENTIAL

Mitrokhin S. I.

The paper is devoted to the study of a fourth-order differential operator with a summable potential and periodic boundary conditions. The method of studying of operators with a summable potential is an extension of the method of studying operators with piecewise smooth coefficients. Boundary value problems of this kind arise when studying the oscillations of beams and bridges composed from materials of different density. The solution of the differential equation is reduced to the solution of the Volterra integral equation. The integral equation is solved by Picard's method of successive approximations. The aim of the, investigation of the integral equation is to obtain asymptotic formulas and estimates for the solutions of the differential equation that defines the differential operator. Questions of geophysics, quantum mechanics, kinetics, gas dynamics and the theory of oscillations of rods, beams and membranes require the development of asymptotic methods for the case of differential equations with nonsmooth coefficients. Asymptotic methods continue to evolve, despite the rapid progress in numerical methods associated with the advent of supercomputers; at present asymptotic and numerical methods complement each other. In the paper, for large values of the spectral parameter, the asymptotics of the solutions of the differential equation that defines the differential operator is obtained. Asymptotic estimates for solutions are established similarly to the asymptotic estimates of solutions of a second-order differential operator with smooth coefficients. The study of periodic boundary conditions leads to the study of the roots of a function represented in the form of a fourth order determinant. To obtain the roots of this function, an indicator diagram has been examined. The roots are in four sectors of an infinitesimal angle, determined by the indicator diagram. The behavior of the roots of this equation in each of the sectors of the indicator diagram is investigated. The asymptotics of eigenvalues of the differential operator under consideration is found. The formulas obtained for the asymptotics of the eigenvalues make it possible to study the spectral properties of the eigenfunctions. If the potential of the operator is not a summable function, but only piecewise smooth, then the obtained formulas for the asymptotics of the eigenvalues are sufficient to derive the formula for the first regularized trace of the differential operator under study.

Key words: differential operator of fourth order, summable potential, periodic boundary conditions, spectral parameter, asymptotics of solutions, asymptotics of eigenvalues.

References

1. *Lidskyi V. B., Sadovnichiy V. A.* Asymptotic formulas for the roots of a class of entire functions. *Matematicheskij sbornik* [*Mathematical Collection*], 1968, vol. 65, no. 4, pp. 558–566 (in Russian).
2. *Lidskyi V. B., Sadovnichiy V. A.* Regularized sums of the roots of a class of entire functions. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozhenija* [*Functional Analysis and its Applications*], 1967, vol. 1, no. 2, pp. 52–59 (in Russian).
3. *Mitrokhin S. I.* About formulas of regularized traces for second order differential operators with discontinuous coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. Matematika, mehanika.* [*Vestnik MGU. Series: Mathematics, Mechanics*], 1986, no. 6, pp. 3–6 (in Russian).
4. *Mitrokhin S. I.* About spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients. *Differentsial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 1992, vol. 28, no. 3, pp. 530–532 (in Russian).
5. *Mitrokhin S. I.* About some spectral properties of differential operators of the second order with discontinuous weight function. *Doklady RAN* [*Reports of the Russian Academy of Sciences*], 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13–15 (in Russian).
6. *Sadovnichiy V. A.* About traces of ordinary differential operators of the highest orders. *Matematicheskij sbornik* [*Mathematical Collection*], 1967, vol. 72, no. 2, pp. 293–310 (in Russian).
7. *Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A.* Asymptotics of any order for eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value Sturm–Liouville problem on a segment with a summable potential. *Differentsial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1423–1426 (in Russian).
8. *Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A.* Asymptotics of any order for eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value Sturm–Liouville problem on a segment with a summable potential. *Izvestija RAN. Seriya: matematika* [*News of the Russian Academy of Sciences*], 2000, vol. 64, no. 4, pp. 47–108 (in Russian).

9. *Mitrokhin S. I.* About spectral properties of a fourth-order differential operator with integrable coefficients. *Trudy MIAN* [*Works MIAN*], 2010, vol. 270, pp. 188–197 (in Russian).
10. *Mitrokhin S. I.* About spectral properties of a delay differential operator with summable coefficients. *Ufimskiy matematichkiy zhurnal* [*Ufa Mathematical Journal*], 2011, vol. 3, no. 4, pp. 95–115 (in Russian).
11. *Mitrokhin S. I.* About spectral properties of differential operators of odd order with a summable potential. *Differencial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 2011, vol. 47, no. 2, pp. 1808–1811 (in Russian).
12. *Mitrokhin S. I.* Spectral properties of a family of differential operators of high even order with summable potential. *Vestnik VGU. Serija: Fizika. Matematika* [*Vestnik VSU. Series: Physics. Mathematics*], 2016, no. 4, pp. 121–135 (in Russian).
13. *Naimark M. A. Lineynye differencial'nye operatory* [*Linear Differential Operators*], Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).
14. *Yurko V. A. Vvedenie v teoriju obratnyh spektral'nyh zadach* [*Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems*], Moscow, Fizmatlit, 2007, 384 p. (in Russian).
15. *Bellman R., Cooke K. L. Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [*Differential-Difference Equations*], Moscow, Mir, 1967, 548 p. (in Russian).

Received February 2, 2017

Mitrokhin Sergei Ivanovich
Lomonosov Moscow State University,
Research Computer Center
1 Vorobyevy Gory, Moscow, 119991 Russia
E-mail: `mitrokhin-sergey@yandex.ru`