Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 21–36

УДК 517.521
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17961

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА

Р. М. Гаджимирзаев[1]
[1] Дагестанский научный центр РАН,
Россия, 367032 Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: ramis3004@gmail.com

Аннотация. Построены новые специальные ряды по модифицированным полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx)$. Эти полиномы при $\alpha > -1$ образуют ортогональную с весом $\rho(Nx)$ систему на равномерной сетке $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = 1/N$, $N > 0$. Упомянутые специальные ряды по полиномам $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ появились как естественный и альтернативный рядам Фурье — Мейкснера аппарат одновременного приближения дискретной функции f, заданной на равномерной сетке Ω_δ, и ее конечных разностей $\Delta_\delta^\nu f$. Основное внимание в настоящей статье уделено исследованию аппроксимативных свойств частичных сумм указанных рядов. В частности, получена поточечная оценка для функции Лебега частичных сумм специального ряда. Следует отметить, что новые специальные ряды, в отличие от рядов Фурье — Мейкснера, обладают тем свойством, что их частичные суммы совпадают со значениями исходной функции в точках $0, \delta, \ldots, (r-1)\delta$.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, аппроксимативные свойства, ряд Фурье, специальные ряды, функция Лебега.
Mathematical Subject Classification (2000): 41A10.

1. Введение

В настоящей работе рассмотрены новые специальные ряды по модифицированным полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx)$ с $\alpha > -1$, ортогональным на равномерной сетке $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = \frac{1}{N}$, $N > 0$, и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В частности, получена оценка сверху для функции Лебега частичных сумм специального ряда по полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$. Специальные ряды по полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами, чем ряды Фурье по указанным полиномам. Например, новые специальные ряды, соответствующие заданному $r \in \mathbb{N}$, обладают тем свойством, что частичные суммы этих рядов интерполируют исходную функцию в точках $0, \delta, \ldots, (r-1)\delta$.

При исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм специального ряда нам понадобятся некоторые свойства полиномов Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$, которые мы приведем в следующем пункте.

2. Некоторые сведения о полиномах Мейкснера

Для $q \neq 0$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ классические полиномы Мейкснера [1–3] можно определить с помощью равенства

$$M_n^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x, q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$

где $x^{[k]}=x(x-1)\dots(x-k+1)$, $(a)_k=a(a+1)\dots(a+k-1)$. При $\alpha>-1$ и $0<q<1$ полиномы Мейкснера $M_n^\alpha(x)$ образуют ортогональную систему на сетке $\{0,1,\dots\}$ с весом $\rho(x)=\rho(x,\alpha,q)=q^x\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}$, а, более точно, имеет место следующее равенство:

$$\sum_{x=0}^{\infty} m_n^\alpha(x)m_k^\alpha(x)\rho(x)=\delta_{nk},\quad 0<q<1,\ \alpha>-1,$$

где $m_n^\alpha(x)=m_n^\alpha(x,q)=\{h_n^\alpha(q)\}^{-\frac12}M_n^\alpha(x)$, $h_n^\alpha(q)=\binom{n+\alpha}{n}q^{-n}\Gamma(\alpha+1)$.

Пусть $N>0$, $\delta=\frac1N$, $q=e^{-\delta}$, $\Omega_\delta=\{0,\delta,2\delta,\dots\}$. Многочлены $M_{n,N}^\alpha(x)=M_n^\alpha(Nx,e^{-\delta})$ и $m_{n,N}^\alpha(x)=m_n^\alpha(Nx,e^{-\delta})=\left\{h_n^\alpha(e^{-\delta})\right\}^{-\frac12}M_{n,N}^\alpha(x)$ в случае $\alpha>-1$ образуют ортогональную и ортонормированную на Ω_δ системы с весом $\rho(Nx)=\rho(Nx;\alpha,e^{-\delta})$.

В дальнейшем, при оценке функции Лебега, важную роль играет следующая формула Кристоффеля — Дарбу:

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_{n,N}^\alpha(t,x)&=\sum_{k=0}^{n} m_{k,N}^\alpha(t)m_{k,N}^\alpha(x)\\&=\frac{\delta\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{(e^{\delta/2}-e^{-\delta/2})(x-t)}\left[m_{n+1,N}^\alpha(t)m_{n,N}^\alpha(x)-m_{n,N}^\alpha(t)m_{n+1,N}^\alpha(x)\right].\end{aligned}\tag{1}$$

которую можно записать [4] так:

$$\begin{gathered}\mathscr{K}_{n,N}^\alpha(t,x)=\frac{\alpha_n}{(\alpha_n+\alpha_{n-1})}m_{n,N}^\alpha(t)m_{n,N}^\alpha(x)+\frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{(\alpha_n+\alpha_{n-1})}\frac{\delta}{\left(e^{\frac{\delta}{2}}-e^{-\frac{\delta}{2}}\right)}\frac{1}{(x-t)}\\ \times\left[m_{n,N}^\alpha(x)\left(m_{n+1,N}^\alpha(t)-m_{n-1,N}^\alpha(t)\right)-m_{n,N}^\alpha(t)\left(m_{n+1,N}^\alpha(x)-m_{n-1,N}^\alpha(x)\right)\right],\end{gathered}\tag{2}$$

где $\alpha_n=\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$. Для $0<\delta\leqslant1$, $N=\frac1\delta$, $\lambda>0$, $1\leqslant n\leqslant\lambda N$, $\alpha>-1$, $0\leqslant x<\infty$, $s\geqslant0$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$ справедливы [2, 5] следующие оценки:

$$\begin{gathered}e^{-\frac x2}\left|m_{n,N}^\alpha(x\pm s\delta)\right|\leqslant c(\alpha,\lambda,s)\theta_n^{-\frac\alpha2}A_n^\alpha(x),\\ A_n^\alpha(x)=\begin{cases}\theta_n^\alpha, & 0\leqslant x\leqslant\frac1{\theta_n},\\ \theta_n^{\frac\alpha2-\frac14}x^{-\frac\alpha2-\frac14}, & \frac1{\theta_n}<x\leqslant\frac{\theta_n}2,\\ \left[\theta_n\left(\theta_n^{\frac13}+|x-\theta_n|\right)\right]^{-\frac14}, & \frac{\theta_n}2<x\leqslant\frac{3\theta_n}2,\\ e^{-\frac x4}, & \frac{3\theta_n}2<x<\infty,\end{cases}\end{gathered}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&e^{-\frac x2}\left|m_{n+1,N}^\alpha(x\pm s\delta)-m_{n-1,N}^\alpha(x\pm s\delta)\right|\\&\qquad\leqslant c(\alpha,\lambda,s)\begin{cases}\theta_n^{\frac\alpha2-1}, & 0\leqslant x\leqslant\frac1{\theta_n},\\ \theta_n^{-\frac34}x^{-\frac\alpha2+\frac14}, & \frac1{\theta_n}<x\leqslant\frac{\theta_n}2,\\ x^{-\frac\alpha2}\theta_n^{-\frac34}\left(\theta_n^{\frac13}+|x-\theta_n|\right)^{\frac14}, & \frac{\theta_n}2<x\leqslant\frac{3\theta_n}2,\\ e^{-\frac x4}, & \frac{3\theta_n}2<x<\infty.\end{cases}\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь и далее c, $c(\alpha)$, $c(\alpha,\dots,\lambda)$ — положительные числа, зависящие только от указанных параметров, причем различные в разных местах.

3. Неравенство Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Мейкснера

В работе [6] были введены специальные ряды по классическим полиномам Лагерра и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В настоящей работе мы рассмотрим специальные ряды по полиномам Мейкснера, которые являются дискретным аналогом вышеупомянутых специальных рядов по полиномам Лагерра. Нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть Ω — дискретное множество, состоящее из бесконечного числа различных точек действительной оси, $\mu = \mu(x)$ — неотрицательная функция, определенная на этом множестве. Через $l_{2,\mu}(\Omega)$ обозначим пространство функций f, заданных на Ω и таких, что $\sum_{x\in\Omega} f^2(x)\mu(x) < \infty$. Мы рассмотрим случай, когда $\Omega = \Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$, $\delta = \frac{1}{N}$, $\mu(x) = \rho(Nx) = \rho(Nx; \alpha, e^{-\delta})$. Пусть $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_\delta)$, тогда при $x \in \Omega_{r,\delta} = \{r\delta, (r+1)\delta, \dots\}$ мы можем определить дискретный аналог полинома Тейлора следующего вида:

$$P_{r-1,N}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Delta_\delta^\nu d(0)}{\nu!}(Nx)^{[\nu]}, \quad \Delta_\delta^0 d(x) = d(x),$$

$\Delta_\delta^1 d(x) = d(x+\delta) - d(x)$, $\Delta_\delta^\nu d(x) = \Delta_\delta(\Delta_\delta^{\nu-1} d(x))$. Легко проверить, что функция $d_r(x) = \frac{d(x) - P_{r-1,N}(x)}{N^{-r}(Nx)^{[r]}}$ принадлежит пространству $l_{2,\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$, где $\rho_{N,r}(x) = \rho(N(x - r\delta))$, а модифицированные полиномы Мейкснера $m_{k,N,r}^\alpha(x) = m_{k,N}^\alpha(x - r\delta)$ $(k = 0, 1, \dots)$ при $\alpha > -1$ образуют ортонормированный базис в $l_{2,\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$ с весом $\rho_{N,r}(x)$. Поэтому мы можем определить коэффициенты Фурье — Мейкснера

$$\hat{d}_{r,k}^\alpha = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} d_r(t)\rho_{N,r}(t) m_{k,N,r}^\alpha(t) = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} \frac{d(t) - P_{r-1,N}(t)}{N^{-r}(Nt)^{[r]}} \rho_{N,r}(t) m_{k,N,r}^\alpha(t)$$

и ряд Фурье — Мейкснера

$$d_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_{r,k}^\alpha m_{k,N,r}^\alpha(x),$$

который в силу базисности в $l_{2,\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$ системы полиномов Мейкснера $m_{k,N,r}^\alpha(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ сходится равномерно относительно $x \in \Omega_{r,\delta}$. Отсюда следует, что

$$d(x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_{r,k}^\alpha m_{k,N,r}^\alpha(x), \quad x \in \Omega_\delta. \tag{5}$$

Следуя [7, 8], мы будем называть (5) специальным рядом по полиномам Мейкснера для функции $d(x)$. Частичную сумму ряда (5) обозначим через

$$S_{n+r,N}^\alpha(d, x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^{n} \hat{d}_{r,k}^\alpha m_{k,N,r}^\alpha(x).$$

Если $d(x) = p_{n+r}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n + r$, то, очевидно, $\hat{d}_{r,k}^\alpha = 0$ при $k \geqslant n + 1$ и поэтому из (5) следует $S_{n+r,N}^\alpha(p_{n+r}, x) \equiv p_{n+r}(x)$, т. е. $S_{n+r,N}^\alpha(d, x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов $p_{n+r}(x)$ степени не выше $n+r$. Обозначим через $q_{n+r}(x)$ алгебраический полином степени $n + r$, для которого $\Delta^i d(0) = \Delta^i q_{n+r}(0)$ $(i = 0, \dots, r - 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left|d(x) - S_{n+r,N}^\alpha(d, x)\right| &= \left|d(x) - q_{n+r}(x) + q_{n+r}(x) - S_{n+r,N}^\alpha(d, x)\right| \\ &\leqslant |d(x) - q_{n+r}(x)| + \left|S_{n+r,N}^\alpha(q_{n+r} - d, x)\right|. \end{aligned}$$

Отсюда для $x \in \Omega_{r,\delta}$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|d(x)-S_{n+r,N}^{\alpha}(d,x)\right| \leqslant e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|d(x)-q_{n+r}(x)\right|+e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r}-d,x)\right|. \quad (6)$$

Так как $P_{r-1,N}(q_{n+r}-d,x)=0$, то

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}&\left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r}-d,x)\right| \\ &= e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}N^{-r}(Nx)^{[r]}\left|\sum_{k=0}^{n}(\widehat{q_{n+r}-d})_{r,k}^{\alpha}m_{k,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| \\ &\leqslant e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{|q_{n+r}(t)-d(t)|}{(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)\left|\sum_{k=0}^{n}m_{k,N}^{\alpha}(t-r\delta)m_{k,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| \\ &= e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{|q_{n+r}(t)-d(t)|}{(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)\left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta,x-r\delta)\right|. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим

$$E_k^r(d,\delta)=\inf_{q_k}\sup_{x\in\Omega_{r,\delta}}e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|d(x)-q_k(x)\right|, \quad (8)$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_k(x)$ степени k, для которых $\Delta^i d(0)=\Delta^i q_k(0)$ $(i=0,\ldots,r-1)$. Тогда из (6) и (7), учитывая (8), получаем

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|d(x)-S_{n+r,N}^{\alpha}(d,x)\right|\leqslant E_{n+r}^{r}(d,\delta)\left(1+l_{n,r}^{\alpha,N}(x)\right), \quad (9)$$

где

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x)=e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{e^{-\frac{t}{2}+r\delta}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{(Nt)^{[r]}\Gamma(Nt-r+1)} \times\left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta,x-r\delta)\right|.$$

В связи с неравенством (9) возникает задача об оценке функции Лебега $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ при $n\leqslant\lambda N$, $\lambda\geqslant 1$. В настоящей работе мы ограничимся исследованием величины $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ на множествах $G_1=\left[r\delta,\frac{3\lambda}{\theta_n}\right]$ и $G_2=\left[\frac{3\lambda}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}\right]$. А оценка функции $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ на промежутке $\left(\frac{\theta_n}{2},\infty\right)$ является объектом исследования другой нашей работы. При доказательстве следующей теоремы мы воспользуемся техникой доказательства теоремы 4 из работы [6].

Теорема 1. *Пусть $r\in\mathbb{N}$, $r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda\geqslant 1$, $0<\delta\leqslant 1$, $\delta=1/N$, $n\leqslant\lambda N$. Тогда имеют место следующие оценки:*

1) *если $x\in G_1=\left[r\delta,\frac{3\lambda}{\theta_n}\right]$, то*

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x)\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\begin{cases}\ln(n+1), & \alpha=r,\\ 1+n^{\alpha-r}, & \alpha\neq r;\end{cases} \quad (10)$$

2) *если $x\in G_2=\left[\frac{3\lambda}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}\right]$, то*

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x)\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln(1+nx)+\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right]. \quad (11)$$

◁ Пусть $x \in G_1 = \left[r\delta, \frac{3\lambda}{\theta_n}\right]$. Тогда

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) = S_1 + S_2, \tag{12}$$

где

$$S_1 \leqslant c(r) e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} (Nx)^r \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant \frac{4}{\theta_n}}} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} (Nt)^{\alpha-r} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta, x-r\delta)\right|,$$

$$S_2 \leqslant c(r) e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} (Nx)^r$$
$$\times \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta, x-r\delta)\right|.$$

Оценим S_1. Из (1) и (3) получаем

$$S_1 \leqslant c(\alpha,r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant \frac{4}{\theta_n}}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{n} \left|e^{-\frac{x}{2}} m_{k,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| \left|e^{-\frac{t}{2}} m_{k,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|$$
$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\delta x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant \frac{4}{\theta_n}}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{n} \theta_k^{\alpha} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\delta x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant \frac{4}{\theta_n}}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{\alpha+1} \tag{13}$$
$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}} \int\limits_0^{\frac{4}{\theta_n}+\delta} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\,dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}} \left.\frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}}{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\right|_0^{\frac{4}{\theta_n}+\delta} = c(\alpha,\lambda,r).$$

Перейдем к оценке величины S_2. Для этого представим ее в виде $S_2 \leqslant S_{21}+S_{22}+S_{23}$, где

$$S_{21} = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} N^r \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}$$
$$\times \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta) m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$S_{22} = \frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{\alpha_n+\alpha_{n-1}} \frac{\delta}{e^{\frac{\delta}{2}}-e^{-\frac{\delta}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} N^r \left|m_{n+1,N}^{\alpha}(x-r\delta) - m_{n-1,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right|$$
$$\times \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)(t-x)} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$S_{23} = \frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{\alpha_n+\alpha_{n-1}} \frac{\delta}{e^{\frac{\delta}{2}}-e^{-\frac{\delta}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} N^r \left|m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right|$$
$$\times \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)(t-x)} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|m_{n+1,N}^{\alpha}(t-r\delta) - m_{n-1,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|.$$

Оценим величину S_{21}. Из (3) имеем

$$S_{21} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}\frac{\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{t^r\Gamma(Nt-r+1)} \times \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|. \tag{14}$$

Пусть

$$W=\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right| = W_1+W_2,$$

где

$$W_1=\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$W_2=\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского к величине W_1, получаем

$$W_1 \leqslant \left(\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}t^{-r-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\frac{e^{-t}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\left(m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$
$$\leqslant c(\alpha)\left(\int_0^{\frac{3\theta_n}{2}} t^{\alpha-r-\frac{1}{2}}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{4}}.$$

$$W_2 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} e^{-\frac{t}{4}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-n}. \tag{16}$$

Из оценок (15) и (16) находим

$$W \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Из последнего неравенства и (14) имеем

$$S_{21} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r}. \tag{17}$$

Перейдем к оценке величины S_{22}. В силу (4) и (3)

$$S_{22} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) n x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-1} \theta_n^{-\frac{\alpha}{2}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\alpha-r} A_n^\alpha(t)}{t-x} = S_{22}^1 + S_{22}^2 + S_{22}^3,$$

где

$$S_{22}^i = c(\alpha,\lambda,r) n x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-1} \delta \sum_{t\in B_i} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\alpha-r} A_n^\alpha(t)}{t-x}, \quad i=1,2,3,$$

$$B_1 = \left(\frac{4}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}\right] \cap \Omega_{r,\delta}, \quad B_2 = \left(\frac{\theta_n}{2}, \frac{3\theta_n}{2}\right] \cap \Omega_{r,\delta}, \quad B_3 = \left(\frac{3\theta_n}{2}, \infty\right) \cap \Omega_{r,\delta}.$$

Из (3) получаем

$$\begin{aligned} S_{22}^1 &\leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \delta \sum_{t\in B_1} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\alpha-r} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{t-x} \\ &\leqslant c(\alpha,\lambda,r) \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \left(\delta \left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac{3}{2}} + \int_{\frac{4}{\theta_n}}^{\frac{\theta_n}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac{3}{2}}\, dt \right) \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,\lambda,r)}{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \Big|_{\frac{4}{\theta_n}}^{\frac{\theta_n}{2}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} = c(\alpha,\lambda,r), \tag{18}$$

$$\begin{gathered} S_{22}^2 \leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} \delta \sum_{t\in B_2} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\alpha-r} \left[\theta_n^{\frac{1}{3}} + |t-\theta_n|\right]^{-\frac{1}{4}}}{t-x} \\ \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \theta_n^{\alpha-r-\frac{7}{4}} \int_{\frac{\theta_n}{2}}^{\frac{3\theta_n}{2}} \left[\theta_n^{\frac{1}{3}} + |t-\theta_n|\right]^{-\frac{1}{4}} dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \theta_n^{\alpha-r-\frac{7}{4}} \theta_n^{\frac{3}{4}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \theta_n^{\alpha-r-1}, \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} S_{22}^3 &\leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \delta \sum_{t\in B_3} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\alpha-r} e^{-\frac{t}{4}}}{t-x} \\ &\leqslant c(\alpha,\lambda,r) \theta_n^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \int_{\frac{3\theta_n}{2}-\delta}^{\infty} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}} e^{-\frac{t}{4}}\, dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \theta_n^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-n}. \end{aligned} \tag{20}$$

Собирая оценки (18)–(20), находим

$$S_{22} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)(1+\theta_n^{\alpha-r-1}). \tag{21}$$

Оценим S_{23}:

$$\begin{aligned} S_{23} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) n \theta_n^{\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \delta &\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\alpha-r}}{(t-x)} \\ &\times e^{-\frac{t}{2}} \left| m_{n+1,N}^\alpha(t-r\delta) - m_{n-1,N}^\alpha(t-r\delta) \right| \leqslant S_{23}^1 + S_{23}^2 + S_{23}^3, \end{aligned}$$

где

$$S_{23}^{i}=c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}+1}x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\delta\sum_{t\in B_i}\frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{(t-x)}e^{-\frac{t}{2}}\left|m_{n+1,N}^{\alpha}(t-r\delta)-m_{n-1,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|.$$

В силу (4) получаем

$$\begin{aligned}S_{23}^{1}&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\delta\sum_{t\in B_1}\frac{\theta_n^{-\frac{3}{4}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{t-x}\\&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}\left(\delta\left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-1}+\int\limits_{\frac{4}{\theta_n}}^{\frac{\theta_n}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-1}\,dt\right)\\&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\begin{cases}2\ln\theta_n-3\ln 2, & \alpha=r,\\ \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}-\left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}\right], & \alpha\neq r,\end{cases}\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}S_{23}^{2}&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\delta\sum_{t\in B_2}\frac{\theta_n^{-\frac{3}{4}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right]^{\frac{1}{4}}}{t-x}\\&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r-\frac{5}{4}}\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}-\delta}^{\frac{3\theta_n}{2}+\delta}[\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}\,dt\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r-\frac{5}{4}}\theta_n^{\frac{5}{4}}=c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r},\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}S_{23}^{3}&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\delta\sum_{t\in B_3}\frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{4}}}{t-x}\\&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\int\limits_{\frac{3\theta_n}{2}-\delta}^{\infty}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}e^{-\frac{t}{4}}\,dt\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}e^{-n}.\end{aligned}\tag{24}$$

Из оценок (22)–(24) выводим

$$S_{23}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\begin{cases}2\ln\theta_n-3\ln 2, & \alpha=r,\\ \theta_n^{\alpha-r}, & \alpha\neq r.\end{cases}\tag{25}$$

Собирая оценки (17), (21) и (25), находим

$$S_2\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\begin{cases}\ln(n+1), & \alpha=r,\\ 1+n^{\alpha-r}, & \alpha\neq r.\end{cases}\tag{26}$$

Из (12), (13) и (26) имеем

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x)\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\begin{cases}\ln(n+1), & \alpha=r,\\ 1+n^{\alpha-r}, & \alpha\neq r.\end{cases}$$

Тем самым оценка (10) доказана.

Перейдем к доказательству оценки (11). Пусть $x \in G_2 = \left[\frac{3\lambda}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}\right]$. Введем обозначения

$$D_1 = \left[r\delta, x - \sqrt{\frac{x}{\theta_n}}\,\right] \cap \Omega_{r,\delta},$$
$$D_2 = \left(x - \sqrt{\frac{x}{\theta_n}}, x + \sqrt{\frac{x}{\theta_n}}\,\right] \cap \Omega_{r,\delta},$$
$$D_3 = \left(x + \sqrt{\frac{x}{\theta_n}}, \infty\right) \cap \Omega_{r,\delta}.$$

Тогда $l_{n,r}^{\alpha,N}(x) = J_1 + J_2 + J_3$, где

$$J_i \leqslant c(\alpha, r) e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_i} e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, x - r\delta)\right|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Оценим J_2. Для этого заметим, что в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, x - r\delta)\right| \leqslant \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, t - r\delta)\right|^{\frac{1}{2}} \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(x - r\delta, x - r\delta)\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, если $\frac{3\lambda}{\theta_n} \leqslant x \leqslant \frac{\theta_n}{2}$, то $x - \sqrt{\frac{x}{\theta_n}} \geqslant \frac{\lambda}{\theta_n}$, кроме того, для $t \in D_2$, имеем $c_1 x \leqslant t \leqslant c_2 x$. Тогда

$$J_2 \leqslant c(\alpha, r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|e^{-x} \mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(x - r\delta, x - r\delta)\right|^{\frac{1}{2}} \delta \sum_{t \in D_2} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} \left|e^{-t} \mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, t - r\delta)\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Отдельно оценим величину $|e^{-t} \mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, t - r\delta)|$. Используя (1), (3) и (4), почти дословно повторяя рассуждения доказательства леммы 7.1 из работы [6], в которой получена оценка ядра Кристоффеля — Дарбу для полиномов Лагерра, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\alpha > -1$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant \frac{3}{\theta_n}$. Тогда равномерно относительно n и N таких, что $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$, имеет место оценка*

$$\left|e^{-t} \mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, t - r\delta)\right| \leqslant c(\alpha, \lambda, r) t^{-\alpha - \frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}.$$

Вернемся к оценке величины J_2. В силу леммы 1 мы можем записать

$$\begin{aligned} J_2 &\leqslant c(\alpha, \lambda, r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_2} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}} \\ &\leqslant c(\alpha, \lambda, r) x^{\frac{r}{2} - \frac{\alpha}{2}} n^{\frac{1}{2}} \delta \sum_{t \in D_2} t^{\frac{\alpha}{2} - \frac{r}{2} - \frac{1}{2}} \leqslant c(\alpha, \lambda, r) x^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \sum_{t \in D_2} \delta \leqslant c(\alpha, \lambda, r). \end{aligned} \tag{27}$$

Перейдем к оценке величины J_1. С этой целью представим ее в виде $J_1 \leqslant J_{11} + J_{12} + J_{13}$, где

$$J_{11} \leqslant c(\alpha, r) e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_1} e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} \left|m_{n,N}^{\alpha}(x - r\delta) m_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta)\right|,$$

$$J_{12} \leqslant c(\alpha, r) n e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|m_{n+1,N}^{\alpha}(x - r\delta) - m_{n-1,N}^{\alpha}(x - r\delta)\right| \delta \sum_{t \in D_1} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}}}{|t - x|} \left|m_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta)\right|,$$

$$J_{13} \leqslant c(\alpha,r) n e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left| m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta) \right| \delta$$
$$\times \sum_{t\in D_1} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{|t-x|} \left| m_{n+1,N}^{\alpha}(t-r\delta) - m_{n-1,N}^{\alpha}(t-r\delta) \right|.$$

Оценим величину J_{11}. Для этого запишем ее в следующем виде:

$$J_{11} \leqslant c(\alpha,r)\left(J_{11}^{1} + J_{11}^{2}\right), \tag{28}$$

где (будем считать, что $J_{11}^1 = 0$, если $r\delta > \frac{\lambda}{\theta_n}$)

$$J_{11}^{1} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{\lambda}{\theta_n}}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \int\limits_0^{\frac{\lambda}{\theta_n}+\delta} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\, dt$$
$$\leqslant \frac{c(\alpha,\lambda,r)}{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}} x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{\frac{r}{2}-\alpha-\frac{3}{4}} = c(\alpha,\lambda,r)(x\theta_n)^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}} \theta_n^{-1} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{-\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

$$J_{11}^{2} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}} \theta_n^{-\frac{1}{2}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\lambda}{\theta_n}<t\leqslant x-\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{1}{2}} \theta_n^{-\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Из неравенств (28), (29) и (30) имеем

$$J_{11} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\left(\frac{x}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta_n^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{31}$$

Чтобы оценить величину J_{12}, представим ее в виде

$$J_{12} = J_{12}^{1} + J_{12}^{2}, \tag{32}$$

в котором

$$J_{12}^{1} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) n x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{\lambda}{\theta_n}}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\alpha-r}}{x-t} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \theta_n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$\times \frac{1}{x}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{\lambda}{\theta_n}}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \leqslant \frac{c(\alpha,\lambda,r)}{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} x^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \theta_n^{-\alpha+\frac{r}{2}-\frac{3}{4}} = c(\alpha,\lambda,r)\left(x\theta_n\right)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{2}}, \tag{33}$$

$$J_{12}^{2} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) n x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \theta_n^{-\frac{3}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\lambda}{\theta_n}<t\leqslant x-\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\frac{\alpha}{2}} - r - \frac{1}{4}}{x-t} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$\times \left(\delta \frac{\left(\frac{\lambda}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{x-\left(\frac{\lambda}{\theta_n}\right)} + \int\limits_{\frac{\lambda}{\theta_n}}^{x-\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}+\delta} \frac{t^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{x-t}\, dt \right) \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \int\limits_{\frac{\lambda}{x\theta_n}}^{1-\sqrt{\frac{1}{x\theta_n}}+\frac{\delta}{x}} \frac{y^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{1-y}\, dy$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\int\limits_{\frac{\lambda}{x\theta_n}}^{\frac{1}{3}} y^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\,dy + c(\alpha,\lambda,r)\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1-\sqrt{\frac{1}{x\theta_n}+\frac{\delta}{x}}} \frac{1}{1-y}\,dy \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(1+\ln\sqrt{x\theta_n}\right). \quad (34)$$

Из (32)–(34) получаем

$$J_{12} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(1+\ln\sqrt{x\theta_n}\right). \quad (35)$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас к оценкам (33)–(35), можно показать, что

$$J_{13} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(1+\ln\sqrt{x\theta_n}\right). \quad (36)$$

Из (31), (35) и (36) имеем

$$J_1 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(1+\ln\sqrt{x\theta_n}\right). \quad (37)$$

Оценим величину J_3. Для этого воспользуемся формулой (2). Тогда

$$J_3 \leqslant c(\alpha,r)(J_{31}+J_{32}+J_{33}), \quad (38)$$

где

$$J_{31} = e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^r\left|m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right|\sum_{t\in D_3} e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(Nt)^{\alpha-r}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$J_{32} = ne^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^r\left|m_{n+1,N}^{\alpha}(x-r\delta)-m_{n-1,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| \times\sum_{t\in D_3}\frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(Nt)^{\alpha-r}}{t-x}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$J_{33} = ne^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^r\left|m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right|\sum_{t\in D_3}\frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(Nt)^{\alpha-r}}{t-x} \times(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|m_{n+1,N}^{\alpha}(t-r\delta)-m_{n-1,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|.$$

Величину J_{31} представим в виде $J_{31} = J_{31}^1 + J_{31}^2 + J_{31}^3$. Обращаясь к неравенству (3), получаем

$$\begin{aligned} J_{31}^1 &\leqslant c(\alpha,\lambda)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\delta\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{\theta_n}{2}}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}t^{\alpha-r} \\ &\leqslant c(\alpha,\lambda)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{1}{2}}\left(\delta\left(x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}} + \int\limits_{x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}^{\frac{\theta_n}{2}} t^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}dt\right) \\ &\leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}} - \left(x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}}\right] \\ &\leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{1}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$J_{31}^2 \leqslant c(\alpha,\lambda)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\theta_n}{2}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}t^{\alpha-r}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}}{\left[\theta_n\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)\right]^{\frac{1}{4}}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}} n^{-\frac{3}{4}} \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\theta_n}{2}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{\delta}{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}} n^{-\frac{3}{4}} \int\limits_{\frac{\theta_n}{2}}^{\frac{3\theta_n}{2}} \frac{dt}{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{\frac{1}{4}}} \leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}, \tag{40}$$

$$J_{31}^3 \leqslant c(\alpha,\lambda)x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}t^{\alpha-r}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)n^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)n^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_{\frac{3\theta_n}{2}-\delta}^{\infty} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{4}}\,dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}. \tag{41}$$

Из (39)–(41) выводим

$$J_{31} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}. \tag{42}$$

Перейдем к оценке величины J_{32}, для этого представим ее в виде

$$J_{32} \leqslant J_{32}^1 + J_{32}^2 + J_{32}^3,$$

в котором

$$J_{32}^1 \leqslant c(\alpha,\lambda)nx^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}} \frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{t-x}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \int\limits_{x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}} \frac{t^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{t-x}\,dt \tag{43}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)\int\limits_{x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{2x}\frac{dt}{t-x} + c(\alpha,\lambda)x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\int\limits_{2x}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}} t^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{3}{2}}\,dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\ln\sqrt{\frac{\theta_n}{x}},$$

$$
\begin{gathered}
J_{32}^2 \leqslant c(\alpha,\lambda) n x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \theta_n^{-\frac{3}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}}{t-x}\left[\theta_n\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)\right]^{-\frac{1}{4}} \\
\leqslant c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{4}} \int\limits_{\frac{\theta_n}{r2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{\frac{3\theta_n}{2}} \left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{-\frac{1}{4}}\frac{dt}{t-x} = c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{4}} \\
\times\left[\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}}\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}-t+\theta_n\right)^{-\frac{1}{4}}\frac{dt}{t-x}+\int\limits_{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}}^{\frac{3\theta_n}{2}}\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{-\frac{1}{4}}\frac{dt}{t-x}\right] \\
\leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(\frac{x}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x},
\end{gathered}
\tag{44}
$$

$$
\begin{gathered}
J_{32}^3 \leqslant c(\alpha,\lambda) n x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{4}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}}{t-x} \\
\leqslant c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} e^{-\frac{t}{4}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)e^{-\frac{3n}{2}}.
\end{gathered}
\tag{45}
$$

Из (43)–(45) получаем оценку

$$
J_{32} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln\sqrt{\frac{\theta_n}{x}}+\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(\frac{x}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x}\right].
\tag{46}
$$

Аналогично оценим величину J_{33}. С этой целью представим ее в виде $J_{33} \leqslant J_{33}^1+J_{33}^2+J_{33}^3$, где

$$
\begin{gathered}
J_{33}^1 \leqslant c(\alpha,\lambda,r) n x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{3}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}t^{\alpha-r}}{t-x} \\
\leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r-\alpha}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}} \frac{t^{\frac{\alpha-r}{2}}}{t-x} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\int\limits_{x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{2x}\frac{dt}{t-x} \\
+c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{2x-\delta}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}} t^{\frac{\alpha-r}{2}-1}\,dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln\sqrt{x\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right],
\end{gathered}
\tag{47}
$$

$$J_{33}^2 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}}t^{\alpha-r}\left(\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\right)^{\frac14}}{t-x}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\theta_n}} \left(\frac{\theta_n^{\frac13}+\theta_n-t}{t}\right)^{\frac14}\frac{1}{t-x}$$

$$+\ c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \theta_n<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{\left(\theta_n^{\frac13}+t-\theta_n\right)^{\frac14}}{t^{\frac54}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x}\right). \qquad (48)$$

$$J_{33}^3 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)nx^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac14}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} \frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{t}{4}}}{t-x}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)n^{\frac34}x^{\frac{r-\alpha}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac54}e^{-\frac{t}{4}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)e^{-\frac{3n}{2}}. \qquad (49)$$

Из (47)–(49) получаем

$$J_{33} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln\sqrt{x\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x}\right)\right]. \qquad (50)$$

В свою очередь из (38), (42), (46) и (50) выводим оценку

$$J_3 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln\sqrt{x\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x}\right)\right]$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln(1+nx)+\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right]. \qquad (51)$$

Собирая оценки (27), (37) и (51), мы получаем следующее неравенство:

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln(1+nx)+\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right].$$

Тем самым оценка (11) доказана. ▷

Литература

1. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные многочлены дискретной переменной.—М.: Наука, 1985. 216 с.
2. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках.—Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.—255 с.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2.—М.: Наука, 1966.—297 с.

4. *Гаджиева З. Д.* Смешанные ряды по полиномам Мейкснера: Дисс. ... к.ф.-м.н.—Саратов: Саратовский гос. ун-т, 2004.
5. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам // Дагестанские электронные мат. изв.—2015.—Вып. 3.—С. 1–254.
6. *Шарапудинов И. И.* Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные мат. изв.—2015.—Вып. 4.—С. 32–74.
7. *Гаджимирзаев Р. М.* Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16, вып. 4.—С. 388–395.
8. *Гаджимирзаев Р. М.* Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й международной Саратовской Зимней школы.—2016.—С. 102–104.

Статья поступила 17 января 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 21–36

APPROXIMATION PROPERTIES SPECIAL SERIES BY MEIXNER POLYNOMIALS

Gadzhimirzaev R. M.[1]

[1] Daghestan Scientific Centre of RAS,
45 M. Gadjieva st., Makhachkala 367025, Russia
E-mail: ramis3004@gmail.com

Abstract. In this article the new special series in the modified Meixner polynomials $M^\alpha_{n,N}(x) = M^\alpha_n(Nx)$ are constructed. For $\alpha > -1$, these polynomials constitute an orthogonal system with a weight-function $\rho(Nx)$ on a uniform grid $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, where $\delta = 1/N$, $N > 0$. Special series in Meixner polynomials $M^\alpha_{n,N}(x)$ appeared as a natural (and alternative to Fourier–Meixner series) apparatus for the simultaneous approximation of a discrete function f given on a uniform grid Ω_δ and its finite differences $\Delta^\nu_\delta f$. The main attention is paid to the study of the approximative properties of the partial sums of the series under consideration. In particular, a pointwise estimate for the Lebesgue function of mentioned partial sums is obtained. It should also be noted that new special series, unlike Fourier–Meixner series, have the property that their partial sums coincide with the values of the original function in the points $0, \delta, \ldots, (r-1)\delta$.

Key words: Meixner polynomials, approximative properties, Fourier series, special series, Lebesgue function.

Mathematical Subject Classification (2000): 41A10.

References

1. *Nikiforov A. F., Suslov S. K., Uvarov V. B. Klassicheskie ortogonalnye mnogochleny diskretnoj peremennoj* [Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable], Moscow, Nauka, 1985, 216 p. (in Russian).
2. *Sharapudinov I. I. Mnogochleny, ortogonalnye na setkah* [Polynomials Orthogonal on Grids], Mahachkala, Izd-vo DGPU, 1997, 255 p. (in Russian).
3. *Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions*, Vol. 2, N. Y.–Toronto–London, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953.
4. *Gadzhieva Z. D. Mixed Series by Meixner Polynomials. PhD thesis*, Saratov, Saratov State. Univ., 2004 (in Russian).
5. *Sharapudinov I. I.* Mixed Series by Classical Orthogonal Polynomials, *Dagestanskie ehlektronnye matematicheskie izvestiya* [Dagestan Electronic Mathematical Reports], 2015, no. 3, pp. 1–254 (in Russian). DOI: 10.31029/demr.3.1.

6. *Sharapudinov I. I.* Some Special Series by General Laguerre Polynomials and Fourier Series by Laguerre Polynomials, Orthogonal in Sobolev Sense, *Dagestanskie ehlektronnye matematicheskie izvestiya* [Dagestan Electronic Mathematical Reports], 2015, no. 4, pp. 32–74 (in Russian). DOI: 10.31029/demr.4.4.
7. *Gadzhimirzaev R. M.* The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-Type Inner Product, *Izv. Sarat. Un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.], 2016, Vol. 16, no. 4, pp. 388–395 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.
8. *Gadzhimirzaev R. M.* The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-Type Inner Product, *Sovremennye problemy teorii funkcij i ih prilozheniya: Materialy 18-j mezhdunarodnoj Saratovskoj Zimnej Shkoly* [XVIII International Saratov Winter School «Modern Problems of Function Theory and Their Applications»], 2016, p. 102–104 (in Russian).

Received January 17, 2017