Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 2, С. 67–84

УДК 517.968
DOI 10.23671/VNC.2019.2.32118

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БУССИНЕСКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Т. К. Юлдашев[1]

[1] Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева,
Россия, 660014, Красноярск, пр. им. газеты Красноярский рабочий, 31

E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Аннотация. Рассматривается в трехмерной области линейное интегро-дифференциальное уравнение типа Буссинеска четвертого порядка с коэффициентом восстановления и вырожденным ядром. Решение этого интегро-дифференциального уравнения рассматривается в классе непрерывно-дифференцируемых функций. Сначала изучаются вопросы классической разрешимости нелокальной прямой краевой задачи для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения Буссинеска с параметром при интегральном члене. Используются метод разделения переменных и метод вырожденного ядра. Получается счетная система алгебраических уравнений. Решение этой алгебраической системы уравнений для регулярных значений спектрального параметра при интегральном члене заданного уравнения позволяет построить решение нелокальной прямой краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в виде ряда Фурье. Устанавливается критерий однозначной разрешимости прямой краевой задачи при фиксированных значениях функции восстановления. С помощью неравенство Коши — Буняковского и неравенство Бесселя доказывается абсолютная и равномерная сходимость полученного ряда Фурье. Для решения прямой краевой задачи также доказывается непрерывность всех производных, входящих в заданное уравнение. Далее, с помощью дополнительного интегрального условия однозначно определяется функция восстановления в виде ряда Фурье. Устанавливается критерий непрерывности производных второго порядка от функции восстановления по пространственным переменным. Исходя из найденных значений функции восстановления однозначно определяется и основная искомая функция как решение обратной задачи для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения. Кроме того, изучается устойчивость решения интегро-дифференциального уравнения по функции восстановления.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Буссинеска, уравнение четвертого порядка, вырожденное ядро, интегральное условие, однозначная разрешимость.

Mathematical Subject Classification (2010): 35A02, 35M10, 35S05.

Образец цитирования: *Юлдашев Т. К.* Определение коэффициента в нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 67–84. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32118.

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных, краевых и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория смешанных и краевых задач, в силу ее прикладной важности, в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений.

Исследования многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек описываются дифференциальными уравнениями в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например, [1–4]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, дополнительной информацией, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [5, 6].

Метод разделения переменных при исследовании дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных применяется в работах многих авторов, в частности в [7–9].

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной теории дифференциальных уравнений. К обратным задачам относят задачи определения физических свойств объектов, например: плотность, коэффициент теплопроводности, упругие модули в зависимости от координат или в виде функций других параметров. Заметим, что без умения решать прямые задачи невозможно исследовать обратные. Линейные обратные задачи рассматривались во многих работах, в частности в [10–16]. В настоящее время совершенствуется и методика решения обратных задач.

В настоящей работе изучается однозначная разрешимость нелокальной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка с вырожденным ядром. Итак, в области $\Omega = \{(t,x,y) : \; 0 < t < T, \, 0 < x, y < l\}$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$U_{tt}(t,x,y) - \big(U_{ttxx}(t,x,y) + U_{ttyy}(t,x,y)\big) - \big(U_{xx}(t,x,y) + U_{yy}(t,x,y)\big) \\ + \nu \int\limits_0^T K(t,s)\big(U_{xx}(s,x,y) + U_{yy}(s,x,y)\big)\, ds = \alpha(t)\beta(x,y), \tag{3.1}$$

где T и l — заданные положительные действительные числа, ν — действительный спектральный параметр,

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s), \quad a_i(t), b_i(s) \in C^2[0;T], \; a_i(t) \neq 0, \; t \in [0;T];$$
$$\alpha(t) \in C^2[0;T], \quad \alpha(t) \neq 0, \quad t \in [0;T].$$

Здесь предполагается, что система функций $\{a_i(t)\}$ и система функций $\{b_i(s)\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, являются линейно независимыми.

Данное уравнение принадлежит псевдогиперболическому типу и называется также интегро-дифференциальным уравнением типа Буссинеска. В случае, когда $\nu = 0$, соответствующее дифференциальное уравнение Буссинска описывает движения волн в стратифицированной жидкости. Гравитационные волны в жидкости со стратифицированной плотностью представляют большой интерес в метеорологии и океанографии [3, с. 404, 405].

Задача. Найти в области Ω пару функций

$$U(t,x,y) \in C\big(\overline{\Omega}\big) \cap C^1\big(\Omega'\big) \cap C^2(\Omega) \cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega) \cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega), \tag{3.2}$$

$$\beta(x,y) \in C^2\big\{0 < x, y < l\big\}, \tag{3.3}$$

удовлетворяющую уравнению (3.1) и следующим условиям:

$$U(0,x,y)=U(T,x,y),\quad 0\leqslant x,y\leqslant l, \tag{3.4}$$

$$\int\limits_0^T U(t,x,y)\,dt=\varphi(x,y),\quad 0\leqslant x,y\leqslant l, \tag{3.5}$$

$$U(t,0,y)=U(t,l,y)=U(t,x,0)=U(t,x,l)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.6}$$

$$\int\limits_0^T \Theta(t)U(t,x,y)\,dt=\psi(x,y),\quad 0\leqslant x,y\leqslant l, \tag{3.7}$$

где $C^r(\Omega)$ — класс функций $U(t,x,y)$, имеющих непрерывные производные $\frac{\partial^r}{\partial t^r}U(t,x,y)$, $\frac{\partial^r}{\partial x^r}U(t,x,y)$, $\frac{\partial^r}{\partial y^r}U(t,x,y)$ в области Ω; $C^{r+s+0}_{t,x,y}(\Omega)$ — класс функций $U(t,x,y)$, имеющих непрерывную производную $\frac{\partial^{r+s}}{\partial t^r\partial x^s}U(t,x,y)$ в области Ω; $C^{r+0+s}_{t,x,y}(\Omega)$ — класс функций $U(t,x,y)$, имеющих непрерывную производную $\frac{\partial^{r+s}}{\partial t^r\partial y^s}U(t,x,y)$ в области Ω; r и s — натуральные числа; функция $\Theta(t)\in C[0,T]$ не обращается в нуль на отрезке $[0,T]$; $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции;

$$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=0,$$

$$\Omega'=\Omega\cup\{x=0\}\cup\{x=l\}\cup\{y=0\}\cup\{y=l\},$$
$$\overline{\Omega}=\bigl\{(t,x,y)\bigm|0\leqslant t\leqslant T,\,0\leqslant x,y\leqslant l\bigr\}.$$

2. Формальное решение прямой краевой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6)

Нетривиальное решение уравнения (3.1) в области Ω разыскивается в виде следующего ряда Фурье:

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{3.8}$$

где

$$u_{n,m}(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l U(t,x,y)\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy,\quad n,m=1,2,\ldots \tag{3.9}$$

Предполагается, что и функция $\beta(x,y)$ разлагается в ряд Фурье:

$$\beta(x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\beta_{n,m}\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{3.10}$$

где

$$\beta_{n,m}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l \beta(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy,\quad n,m=1,2,\ldots \tag{3.11}$$

Подставляя ряды (3.8) и (3.10) в уравнение (3.1), получаем

$$u''_{n,m}(t)+\lambda^2_{n,m}\,u_{n,m}(t)=\nu\lambda^2_{n,m}\int\limits_0^T\sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s)u_{n,m}(s)\,ds+\alpha(t)\beta_{n,m}, \tag{3.12}$$

где

$$\lambda_{n,m}^2 = \frac{\mu_{n,m}^2}{1+\mu_{n,m}^2}, \quad \mu_{n,m} = \frac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}.$$

С помощью обозначения

$$\tau_{in,m} = \int\limits_0^T b_i(s) u_{n,m}(s)\, ds \tag{3.13}$$

уравнения (3.12) перепишутся в следующем виде:

$$u''_{n,m}(t) + \lambda_{n,m}^2\, u_{n,m}(t) = \nu\lambda_{n,m}^2 \sum_{i=1}^k a_i(t)\tau_{in,m} + \alpha(t)\beta_{n,m}. \tag{3.14}$$

Дифференциальные уравнения (3.14) решаются методом вариации произвольных постоянных:

$$u_{n,m}(t) = c_{n,m}\cos\lambda_{n,m}\, t + d_{n,m}\sin\lambda_{n,m}\, t + \eta_{n,m}(t), \tag{3.15}$$

где

$$\eta_{n,m}(t) = \nu\lambda_{n,m}\sum_{i=1}^k \tau_{in,m}\int\limits_0^t \sin\lambda_{n,m}(t-s)a_i(s)\, ds + \frac{\beta_{n,m}}{\lambda_{n,m}}\int\limits_0^t \sin\lambda_{n,m}(t-s)\alpha(s)\, ds.$$

Условие (3.4) с учетом формулы (3.9) принимает следующий вид:

$$u_{n,m}(0) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l U(0,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dy\,dx$$

$$= \frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l U(T,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dy\,dx = u_{n,m}(T). \tag{3.16}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$ в (3.15) воспользуемся условием (3.16). Тогда получаем

$$u_{n,m}(t) = d_{n,m}\left[\sin\lambda_{n,m}\, t + \frac{\sin\lambda_{n,m}T}{1-\cos\lambda_{n,m}T}\cos\lambda_{n,m}\, t\right] + \xi_{n,m}(t), \tag{3.17}$$

где

$$\xi_{n,m}(t) = \frac{\eta_{n,m}(T)}{1-\cos\lambda_{n,m}T}\,\cos\lambda_{n,m}t + \eta_{n,m}(t).$$

Теперь воспользуемся интегральным условием (3.5) и формулой (3.9):

$$\int\limits_0^T u_{n,m}(t)\,dt = \frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\int\limits_0^T U(t,x,y)\,dt\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dy\,dx$$

$$= \frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l \varphi(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dy\,dx = \varphi_{n,m}. \tag{3.18}$$

Тогда из (3.17) и (3.18) получаем

$$\varphi_{n,m} = \int_0^T u_{n,m}(t)\,dt = d_{n,m}\int_0^T \left[\sin\lambda_{n,m}t + \frac{\sin\lambda_{n,m}T}{1-\cos\lambda_{n,m}T}\cos\lambda_{n,m}t\right]dt + \gamma_{n,m}$$
$$= \frac{d_{n,m}}{\lambda_{n,m}}\left[1-\cos\lambda_{n,m}T + \frac{\sin^2\lambda_{n,m}T}{1-\cos\lambda_{n,m}T}\right] + \gamma_{n,m}, \qquad (3.19)$$

где

$$\gamma_{n,m} = \int_0^T \xi_{n,m}(t)\,dt.$$

Итак, для определения неизвестных коэффициентов $d_{n,m}$ требуем выполнения следующего условия:

$$\sigma_{n,m}(T) = 1-\cos\lambda_{n,m}T \neq 0. \qquad (3.20)$$

Из (3.19) находим

$$d_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}}{2}(\varphi_{n,m}-\gamma_{n,m}). \qquad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в формулу (3.17), получаем

$$u_{n,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}}{2}(\varphi_{n,m}-\gamma_{n,m})\delta_{0n,m}(t) + \xi_{n,m}(t)$$

или

$$u_{n,m}(t) = \varphi_{n,m}B_{n,m}(t) + \nu\sum_{i=1}^{k}\tau_{in,m}D_{in,m}(t) + \beta_{n,m}E_{n,m}(t), \qquad (3.22)$$

где

$$B_{n,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}}{2}\delta_{0n,m}(t), \quad \delta_{0n,m}(t) = \sin\lambda_{n,m}t + \frac{\sin\lambda_{n,m}T}{\sigma_{n,m}(T)}\cos\lambda_{n,m}t,$$

$$D_{in,m}(t) = h_{in,m}(T)\delta_{2n,m}(t) + h_{in,m}(t) - \frac{\lambda_{n,m}}{2}\delta_{0n,m}(t)\int_0^T h_{in,m}(t)\,dt,$$

$$E_{n,m}(t) = \delta_{1n,m}(T)\delta_{2n,m}(t) + \delta_{1n,m}(t) - \frac{\lambda_{n,m}}{2}\delta_{0n,m}(t)\int_0^T \delta_{1n,m}(t)\,dt,$$

$$h_{in,m}(t) = \lambda_{n,m}\int_0^t \sin\lambda_{n,m}(t-s)\,a_i(s)\,ds, \quad i=1,2,\ldots,k,$$

$$\delta_{1n,m}(t) = \frac{1}{\lambda_{n,m}}\int_0^t \sin\lambda_{n,m}(t-s)\,\alpha(s)\,ds, \quad \lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu_{n,m}^2}{1+\mu_{n,m}^2}}, \quad \mu_{n,m} = \frac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2},$$

$$\delta_{2n,m}(t) = \frac{1}{\sigma_{n,m}(T)}\left[\cos\lambda_{n,m}t - \frac{\delta_{0n,m}(t)}{2}\sin\lambda_{n,m}T\right].$$

Подставляя (3.22) в (3.13), получаем счетную систему алгебраических уравнений (ССАУ):

$$\tau_{in,m} + \nu \sum_{j=1}^{k} \tau_{jn,m} \, H_{ijn,m} = \Psi_{in,m}, \tag{3.23}$$

где

$$\begin{gathered} H_{ijn,m} = -\int_0^T b_i(s) \, D_{jn,m}(s) \, ds, \\ \Psi_{in,m} = \int_0^T b_i(s) \big[\varphi_{n,m} \, B_{n,m}(s) + \beta_{n,m} \, E_{n,m}(s)\big] \, ds. \end{gathered} \tag{3.24}$$

ССАУ (3.23) однозначно разрешима при любых конечных $\Psi_{in,m}$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta_{n,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \nu H_{12n,m} & \ldots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & 1+\nu H_{22n,m} & \ldots & \nu H_{2kn,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu H_{k1n,m} & \nu H_{k2n,m} & \ldots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.25}$$

Определитель $\Delta_{n,m}(\nu)$ в (3.25) есть многочлен относительно ν степени не выше k. Уравнение $\Delta_{n,m}(\nu) = 0$ имеет не более, чем k различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (3.1). Для других значений ν условие (3.25) выполняется. Для таких регулярных значений ν система (3.23) имеет единственное решение при любой конечной ненулевой правой части. Поэтому при выполнении условия (3.25) имеется однозначная разрешимость поставленной нелокальной обратной задачи.

Решения ССАУ (3.23) записываются в виде

$$\tau_{in,m} = \frac{\Delta_{in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.26}$$

где

$$\Delta_{in,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \ldots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \ldots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & \ldots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \ldots & \nu H_{2kn,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu H_{k1n,m} & \ldots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{kn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \ldots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_{in,m}(\nu)$ находятся $\Psi_{in,m}$. В свою очередь, в составе $\Psi_{in,m}$ находятся неизвестные величины $\beta_{n,m}$. В самом деле, эти неизвестные величины находились в правой части ССАУ (3.23). Чтобы вывести их из знака определителя выражение в (3.24) запишем в следующем виде:

$$\Psi_{in,m} = \varphi_{n,m} \Psi_{1in,m} + \beta_{n,m} \Psi_{2in,m},$$

где

$$\Psi_{1in,m} = \int_0^T b_i(s) \, B_{n,m}(s) \, ds, \quad \Psi_{2in,m} = \int_0^T b_i(s) \, E_{n,m}(s) \, ds.$$

В этом случае, согласно свойствам определителей имеем

$$\Delta_{in,m}(\nu) = \varphi_{n,m}\,\Delta_{1in,m}(\nu) + \beta_{n,m}\,\Delta_{2in,m}(\nu),$$

где

$$\Delta_{jin,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \dots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{j1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & \dots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{j2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu H_{k1n,m} & \dots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{jkn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix},$$

$$j = 1, 2.$$

Тогда формула (3.26) записывается в виде

$$\tau_{in,m} = \varphi_{n,m}\,\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} + \beta_{n,m}\,\frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{3.27}$$

Подставляя (3.27) в (3.22), получаем

$$u_{n,m}(t) = \varphi_{n,m}\,F_{n,m}(t) + \beta_{n,m}\,M_{n,m}(t), \tag{3.28}$$

где

$$F_{n,m}(t) = B_{n,m}(t) + \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\,D_{in,m}(t),$$

$$M_{n,m}(t) = E_{n,m}(t) + \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\,D_{in,m}(t).$$

Теперь (3.28) подставляем в ряд Фурье (3.8):

$$U(t,x,y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\varphi_{n,m}\,F_{n,m}(t) + \beta_{n,m}\,M_{n,m}(t)\right] \sin\frac{\pi n}{l}\,x\, \sin\frac{\pi m}{l}\,y. \tag{3.29}$$

3. Обоснование разрешимости прямой краевой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6)

Предположим, что $\beta(x,y)$ — заданная гладкая функция. Рассмотрим случай, когда нарушается условие (3.20). Пусть $\sigma_{n,m}(T) = 1 - \cos\lambda_{n,m}T = 0$ при некоторых T. Это условие эквивалентно равенству

$$\cos\lambda_{n,m}\,T = 1, \tag{3.30}$$

где

$$\lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu_{n,m}^2}{1+\mu_{n,m}^2}}, \quad \mu_{n,m} = \frac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}.$$

Уравнение (3.30) имеет решения

$$T_k = \frac{2\pi k}{\lambda_{n,m}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Другие значения $0 < T$, для которых условие (3.20) выполняется, называются регулярными. Для регулярных значений T имеет место формула (3.29). Поэтому при выполнении условия (3.20) решение прямой краевой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) в области Ω представляется в виде ряда (3.29).

Покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x,y)$ и $\beta(x,y)$ ряд (3.29) сходится абсолютно и равномерно. Здесь при любых n, m и регулярных значениях T справедливы оценки

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left|u_{n,m}(t)\right| \leqslant C_1 \left[\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}|\right], \tag{3.31}$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left|u''_{n,m}(t)\right| \leqslant C_1 \left[\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}|\right], \tag{3.32}$$

где $0 < C_1 = \mathrm{const}$.

Действительно, для регулярных значений T справедливы соотношения

$$0 < \left|\sigma_{n,m}(T)\right| = \left|1 - \cos\lambda_{n,m}T\right| \leqslant 2, \quad 0 < \lambda_{n,m} < 1 \text{ и } \lambda_{n,m} \to 1 \text{ при } n,m \to \infty.$$

Для гладких функций $F_{n,m}(t)$ и $M_{n,m}(t)$ из (3.28) выполняются следующие условия:

$$C_{11} = \max\left\{\max_{t\in[0,T]} \left|F_{n,m}(t)\right|;\ \max_{t\in[0,T]} \left|M_{n,m}(t)\right|\right\} < \infty,$$

$$C_{12} = \max\left\{\max_{t\in[0,T]} \left|F''_{n,m}(t)\right|;\ \max_{t\in[0,T]} \left|M''_{n,m}(t)\right|\right\} < \infty.$$

Поэтому из (3.28) получаем

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{\infty} |u_{n,m}(t)| &\leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[|F_{n,m}(t)|\,|\varphi_{n,m}| + |M_{n,m}(t)|\,|\beta_{n,m}|\right] \\ &\leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t\in[0,T]} |F_{n,m}(t)|\,|\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t\in[0,T]} |M_{n,m}(t)|\,|\beta_{n,m}| \\ &\leqslant C_{11}\left[\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}|\right].\end{aligned}$$

Дифференцируя выражение (3.28) два раза, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{\infty} \left|u''_{n,m}(t)\right| &\leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t\in[0,T]} \left|F''_{n,m}(t)\right| \left|\varphi_{n,m}\right| + \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t\in[0,T]} \left|M''_{n,m}(t)\right| \left|\beta_{n,m}\right| \\ &\leqslant C_{12}\left[\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}|\right].\end{aligned}$$

Отсюда следуют оценки (3.31) и (3.32), где $C_1 = \max\{C_{11}; C_{12}\}$.

Условие А. Пусть функция $\varphi(x,y) \in C^2\big([0;l]\times[0;l]\big)$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\varphi(0,y) = \varphi(l,y) = \varphi(x,0) = \varphi(x,l) = 0,$$

$$\varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=\varphi_{xx}(x,0)=\varphi_{xx}(x,l)=0,$$

$$\varphi_{yy}(0,y)=\varphi_{yy}(l,y)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,l)=0.$$

Тогда путем интегрирования по частям три раза по переменной x интеграла (3.18) получаем, что

$$\varphi_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\varphi'''_{n,m}}{n^3}, \tag{3.33}$$

где

$$\varphi'''_{n,m}=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l\varphi_{xxx}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy. \tag{3.34}$$

Аналогично путем интегрирования по частям три раза по переменной y интеграла (3.34) получаем

$$\varphi'''_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\varphi^{VI}_{n,m}}{m^3}, \tag{3.35}$$

где

$$\varphi^{VI}_{n,m}=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l\varphi_{xxxyyy}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy. \tag{3.36}$$

Из (3.33) и (3.35) получаем, что

$$\varphi_{n,m}=\left(\frac{l}{\pi}\right)^6\frac{\varphi^{VI}_{n,m}}{n^3m^3}. \tag{3.37}$$

С помощью неравенства Бесселя для двойного интеграла (3.36) получаем оценку

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi^{VI}_{n,m}\right]^2&=\frac{4}{l^2}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\int_0^l\int_0^l\varphi_{xxxyyy}(x,y)\,\vartheta_{n,m}(x,y)\,dx\,dy\right]^2\\&\leqslant\frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{xxxyyy}(x,y)\right]^2dx\,dy<\infty,\end{aligned} \tag{3.38}$$

где

$$\vartheta_{n,m}(x,y)=\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y.$$

Условие Б. Пусть функция $\beta(x,y)\in C^2\big([0;l]\times[0;l]\big)$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\beta(0,y)=\beta(l,y)=\beta(x,0)=\beta(x,l)=0,$$

$$\beta_{xx}(0,y)=\beta_{xx}(l,y)=\beta_{xx}(x,0)=\beta_{xx}(x,l)=0,$$

$$\beta_{yy}(0,y)=\beta_{yy}(l,y)=\beta_{yy}(x,0)=\beta_{yy}(x,l)=0.$$

Тогда путем интегрирования по частям три раза по переменной x интеграла (3.11) получаем, что

$$\beta_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\beta'''_{n,m}}{n^3}, \tag{3.39}$$

где

$$\beta'''_{n,m} = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \int\limits_0^l \beta_{xxx}(x,y) \sin \frac{\pi n}{l} x \, \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy. \tag{3.40}$$

Аналогично трижды интегрируя по частям по переменной y интеграл (3.40), получаем

$$\beta'''_{n,m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\beta^{VI}_{n,m}}{m^3}, \tag{3.41}$$

где

$$\beta^{VI}_{n,m} = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \int\limits_0^l \beta_{xxxyyy}(x,y) \sin \frac{\pi n}{l} x \, \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy. \tag{3.42}$$

Из (3.39) и (3.41) получаем, что

$$\beta_{n,m} = \left(\frac{l}{\pi}\right)^6 \frac{\beta^{VI}_{n,m}}{n^3 m^3}. \tag{3.43}$$

С помощью неравенства Бесселя для двойного интеграла (3.42) получаем оценку

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\beta^{VI}_{n,m}\right]^2 = \frac{4}{l^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\int\limits_0^l \int\limits_0^l \beta_{xxxyyy}(x,y) \, \vartheta_{n,m}(x,y) \, dx \, dy\right]^2$$
$$\leqslant \frac{4}{l^2} \int\limits_0^l \int\limits_0^l \left[\beta_{xxxyyy}(x,y)\right]^2 dx \, dy < \infty. \tag{3.44}$$

Учитывая формулы (3.31), (3.37), (3.38), (3.43) и (3.44) и применяя неравенство Гёльдера, для ряда (3.29) получаем

$$\left|U(t,x,y)\right| \leqslant \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left|u_{n,m}(t)\right| \left|\sin \frac{\pi n}{l} x\right| \left|\sin \frac{\pi m}{l} y\right|$$
$$\leqslant \frac{2C_1}{l} \left[\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}|\right] = \gamma_1 \left[\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m^3} \left|\varphi^{VI}_{n,m}\right| + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m^3} \left|\beta^{VI}_{n,m}\right|\right]$$
$$\leqslant \gamma_1 \left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^6}} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left|\varphi^{VI}_{n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^6}} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left|\beta^{VI}_{n,m}\right|^2}\right]$$
$$\leqslant \frac{2\gamma_1}{l} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^6}} \left[\sqrt{\int\limits_0^l \int\limits_0^l \left[\varphi_{xxxyyy}(x,y)\right]^2 dxdy} + \sqrt{\int\limits_0^l \int\limits_0^l \left[\beta_{xxxyyy}(x,y)\right]^2 dxdy}\right] < \infty, \tag{3.45}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{2C_1}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^6.$$

Из (3.45) следует, что ряд (3.29) абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{\Omega}$.

Для функции (3.29) покажем непрерывность всех производных, входящих в уравнение (3.1). Функцию (3.29) формально продифференцируем нужное число раз:

$$U_{tt}(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}\,F''_{n,m}(t)+\beta_{n,m}M''_{n,m}(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{3.46}$$

$$U_{xx}(t,x,y)=-\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}\,F_{n,m}(t)+\beta_{n,m}M_{n,m}(t)\right]\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{3.47}$$

$$U_{yy}(t,x,y)=-\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}\,F_{n,m}(t)+\beta_{n,m}\,M_{n,m}(t)\right]\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{3.48}$$

$$U_{ttxx}(t,x,y)=-\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}\,F''_{n,m}(t)+\beta_{n,m}\,M''_{n,m}(t)\right]\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{3.49}$$

$$U_{ttyy}(t,x,y)=-\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}F''_{n,m}(t)+\beta_{n,m}M''_{n,m}(t)\right]\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y. \tag{3.50}$$

С учетом оценок (3.32), (3.37), (3.38), (3.43), (3.44) и неравенства Гёльдера, для ряда (3.46) аналогично (3.45) получаем

$$\begin{gathered}\left|U_{tt}(t,x,y)\right|\leqslant\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|u''_{n,m}(t)\right|\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right|\\ \leqslant\frac{2C_1}{l}\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}|\varphi_{n,m}|+\sum_{n,m=1}^{\infty}|\beta_{n,m}|\right]=\gamma_1\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^3m^3}\left|\varphi_{n,m}^{VI}\right|+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^3m^3}\left|\beta_{n,m}^{VI}\right|\right]\\ \leqslant\frac{2\gamma_1}{l}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^6m^6}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{xxxyyy}(x,y)\right]^2dxdy}+\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{xxxyyy}(x,y)\right]^2dxdy}\right]<\infty.\end{gathered} \tag{3.51}$$

Аналогично для рядов (3.47) и (3.48) получаем

$$\begin{gathered}\left|U_{xx}(t,x,y)\right|\leqslant\frac{2\pi^2}{l^3}\sum_{n,m=1}^{\infty}n^2\left|u_{n,m}(t)\right|\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right|\\ \leqslant\gamma_2\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}n^2\left|\varphi_{n,m}\right|+\sum_{n,m=1}^{\infty}n^2\left|\beta_{n,m}\right|\right]=\gamma_2\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{nm^3}\left|\varphi_{n,m}^{VI}\right|+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{nm^3}\left|\beta_{n,m}^{VI}\right|\right]\\ \leqslant\frac{2\gamma_2}{l}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2m^6}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{xxxyyy}(x,y)\right]^2dxdy}+\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{xxxyyy}(x,y)\right]^2dxdy}\right]<\infty,\end{gathered} \tag{3.52}$$

$$\left|U_{yy}(t,x,y)\right| \leqslant \frac{2\pi^2}{l^3}\sum_{n,m=1}^{\infty} m^2\left|u_{n,m}(t)\right|\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right|$$

$$\leqslant \gamma_2\left[\sum_{n,m=1}^{\infty} m^2\left|\varphi_{n,m}\right| + \sum_{n,m=1}^{\infty} m^2\left|\beta_{n,m}\right|\right] = \gamma_2\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 m}\left|\varphi_{n,m}^{VI}\right| + \sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 m}\left|\beta_{n,m}^{VI}\right|\right]$$

$$\leqslant \frac{2\gamma_2}{l}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^6 m^2}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{xxxyyy}(x,y)\right]^2 dxdy} + \sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{xxxyyy}(x,y)\right]^2 dxdy}\right] < \infty, \tag{3.53}$$

где

$$\gamma_2 = \frac{2C_1 l^3}{\pi^4}.$$

Точно также и для рядов (3.49) и (3.50) аналогично (3.51)–(3.53) легко показать, что

$$\left|U_{ttxx}(t,x,y)\right| < \infty, \quad \left|U_{ttyy}(t,x,y)\right| < \infty.$$

Таким образом, в области Ω функция $U(t,x,y)$, определяемая рядом (3.29), удовлетворяет условиям (3.2) прямой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6). Следовательно, каждое нетривиальное решение прямой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6), удовлетворяющее условиям задачи (3.2), представляется в виде ряда Фурье (3.29) (см. [17, гл. 6]).

Для установления единственности решения покажем, что при однородном интегральном условии

$$\int_0^T U(t,x,y)dt = 0, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant l,$$

и нулевой правой части прямая краевая задача (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) имеет только тривиальное решение. С этой целью предположим, что $\varphi(x,y) \equiv 0$, $\beta(x,y) \equiv 0$. Тогда $\varphi_{n,m} \equiv 0$, $\beta_{n,m} \equiv 0$ и из формул (3.8) и (3.28) следует, что

$$\int_0^l\int_0^l U(t,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy = 0, \quad n,m = 1,2,\ldots$$

Отсюда, в силу полноты систем собственных функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}$, $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi m}{l}y\right\}$ в $L_2[0,l]$, заключаем, что $U(t,x,y) \equiv 0$ для всех $x, y \in [0,l]$ и $t \in [0,T]$.

Следовательно, если выполняются условия (3.20) и (3.25), то для прямой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) существует решение и это решение единственно в области Ω.

4. Обратная задача (3.1)–(3.7)

Определим коэффициент восстановления $\beta(x,y)$. С этой целью воспользуемся условием (3.7). Тогда из (3.28) получаем

$$\psi_{n,m} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l \psi(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy$$
$$= \frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\int\limits_0^T \Theta(t)U(t,x,y)\,dt\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy$$
$$= \int\limits_0^T \Theta(t)\,u_{n,m}(t)\,dt = \varphi_{n,m}\,\chi_{1n,m} + \beta_{n,m}\,\chi_{2n,m},$$

где

$$\chi_{1n,m} = \int\limits_0^T \Theta(t)\,F_{n,m}(t)\,dt, \quad \chi_{2n,m} = \int\limits_0^T \Theta(t)\,M_{n,m}(t)\,dt.$$

Отсюда определяем, что

$$\beta_{n,m} = \frac{\psi_{n,m} - \varphi_{n,m}\,\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}. \tag{3.54}$$

Покажем, что в (3.54) $\chi_{2n,m} \neq 0$. С этой целью предположим

$$\chi_{2n,m} = \int\limits_0^T \Theta(t)\,M_{n,m}(t)\,dt = 0. \tag{3.55}$$

Применяем теорему о среднем (см. [18, с. 419, теорема 3]). По условию постановки задачи $\Theta(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. Тогда из (3.55) получаем, что

$$\int\limits_0^T M_{n,m}(t)dt = 0.$$

Анализ функции $M_{n,m}(t)$ показывает, что это возможно, если справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_0^T \sin\lambda_{n,m}(T-t)\,\alpha(t)\,dt = 0. \tag{3.56}$$

Применяем теорему о среднем (см. [18, с. 419, теорема 3]) к равенству (3.56). По условию постановки задачи $\alpha(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. Тогда из (3.56) получаем, что

$$\int\limits_0^T \sin\lambda_{n,m}(T-t)\,dt = 0.$$

Вычисляя этот интеграл, приходим к тригонометрическому уравнению $\cos\lambda_{n,m}T = \frac{1}{\lambda_{n,m}}$. Поскольку $0 < \lambda_{n,m} < 1$, то данное тригонометрическое уравнение не имеет решения. Отсюда заключаем, что наше допущение (3.55) не верно. Следовательно, $\chi_{2n,m} \neq 0$.

В силу достаточной гладкости функций $\psi(x,y)$ и $\varphi(x,y)$, покажем, что следующий ряд сходится абсолютно и равномерно:

$$\beta(x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\psi_{n,m} - \varphi_{n,m}\,\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y. \tag{3.57}$$

Условие B. Пусть функция $\psi(x,y) \in C^2\big([0;l]\times[0;l]\big)$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\psi(0,y) = \psi(l,y) = \psi(x,0) = \psi(x,l) = 0,$$
$$\psi_{xx}(0,y) = \psi_{xx}(l,y) = \psi_{xx}(x,0) = \psi_{xx}(x,l) = 0,$$
$$\psi_{yy}(0,y) = \psi_{yy}(l,y) = \psi_{yy}(x,0) = \psi_{yy}(x,l) = 0.$$

Тогда трижды интегрируя по частям по переменной x интеграл

$$\psi_{n,m} = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \psi(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy$$

получаем, что

$$\psi_{n,m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\psi'''_{n,m}}{n^3}, \tag{3.58}$$

где

$$\psi'''_{n,m} = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \psi_{xxx}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy. \tag{3.59}$$

Аналогично трижды интегрируя по частям по переменной y интеграл (3.59), получаем

$$\psi'''_{n,m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\psi^{VI}_{n,m}}{m^3}, \tag{3.60}$$

где

$$\psi^{VI}_{n,m} = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \psi_{xxxyyy}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy. \tag{3.61}$$

Из (3.58) и (3.60) получаем, что

$$\psi_{n,m} = \left(\frac{l}{\pi}\right)^6\frac{\psi^{VI}_{n,m}}{n^3m^3}. \tag{3.62}$$

С помощью неравенства Бесселя для двойного интеграла (3.61) получаем оценку

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\psi^{VI}_{n,m}\right]^2 \leqslant \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \left[\psi_{xxxyyy}(x,y)\right]^2 dx\,dy < \infty. \tag{3.63}$$

Учитывая формулы (3.31), (3.37), (3.38), (3.62) и (3.63) и применяя неравенство Гёльдера, для ряда (3.57) получим

$$
\begin{aligned}
\big|\beta(x,y)\big| &\leqslant \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\psi_{n,m}|+|\varphi_{n,m}|\,|\chi_{1n,m}|\big)\,\big|\chi_{2,n,m}\big|^{-1}\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right| \\
&\leqslant \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(|\psi_{n,m}|+C_{1,1}|\varphi_{n,m}|\int_0^T\big|\Theta(t)\big|\,dt\right)\left(C_{1,1}\int_0^T\big|\Theta(t)\big|\,dt\right)^{-1} \\
&\leqslant \frac{2}{C_{2,1}l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\psi_{n,m}|+C_{2,1}|\varphi_{n,m}|\big) \\
&\leqslant \frac{2}{C_{2,1}l}\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^3m^3}\left|\psi_{n,m}^{VI}\right|+C_{2,1}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^3m^3}\left|\varphi_{n,m}^{VI}\right|\right] \\
&\leqslant \frac{2l^2}{C_{2,1}\pi^3}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^6m^6}}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\psi_{n,m}^{VI}\right]^2}+C_{2,1}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}^{VI}\right]^2}\right] \\
&\leqslant \gamma_3\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^6m^6}}\left[\sqrt{\int_0^l\!\!\int_0^l\big[\psi_{xxxyyy}(x,y)\big]^2dxdy}+C_{2,1}\sqrt{\int_0^l\!\!\int_0^l\big[\varphi_{xxxyyy}(x,y)\big]^2dxdy}\right]<\infty,
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

где

$$
\gamma_3=\frac{2\,l^5}{C_{2,1}\,\pi^6},\qquad C_{2,1}\geqslant C_{1,1}\int_0^T\big|\Theta(t)\big|\,dt.
$$

Из оценки (3.64) следует, что ряд (3.57) сходится абсолютно и равномерно в области $\{0<x,y<l\}$.

Аналогично доказывается сходимость следующих рядов:

$$
\beta_{xx}(x,y)=-\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\psi_{n,m}-\varphi_{n,m}\,\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y,
$$

$$
\beta_{yy}(x,y)=-\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\psi_{n,m}-\varphi_{n,m}\,\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y.
$$

Подставляя (3.54) в (3.29), окончательно определим основную неизвестную функцию $U(t,x,y)$:

$$
U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}\left(F_{n,m}(t)-M_{n,m}(t)\frac{\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}\right)+\psi_{n,m}\frac{M_{n,m}(t)}{\chi_{2n,m}}\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y.
\tag{3.65}
$$

Для ряда (3.65) нетрудно доказать справедливость оценок, которые выше доказаны для случая ряда (3.29). При этом ряды, полученные путем почленного дифференцирования ряда (3.65) по всем переменным, будут сходиться абсолютно и равномерно.

Теперь покажем, что решение интегро-дифференциального уравнения (3.1) $U(t,x,y)$ устойчиво по функции восстановления $\beta(x,y)$. Пусть $U_1(t,x,y)$ и $U_2(t,x,y)$ — два различных решения краевой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6), соответствующие двум различным значениям функции восстановления $\beta_1(x,y)$ и $\beta_2(x,y)$, соответственно.

Положим, что

$$\left|\beta_{1n,m}-\beta_{2n,m}\right|<\delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — достаточно малые величины, что ряд $\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}$ сходится.

Тогда с учетом этого, в силу условий теоремы, из (3.29) имеем

$$\left|U_1(t,x,y)-U_2(t,x,y)\right|\leqslant\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\max_{t\in[0;T]}\left|M_{n,m}(t)\right|\left|\beta_{1n,m}-\beta_{2n,m}\right|<\frac{2C_{11}}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m},$$

где $C_{11}\geqslant\max_{t\in[0;T]}|M_{n,m}(t)|$.

Отсюда окончательно получаем утверждения об устойчивости решения интегро-дифференциального уравнения (3.1) по функции восстановления, если положим

$$\varepsilon=\frac{2C_{11}}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}.$$

Таким образом нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия A и Б. Тогда прямая задача* (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) *однозначно разрешима в области* Ω *при регулярных значениях* ν *и* T, *для которых выполняются условия* (3.20) *и* (3.25). *Это решение* $U(t,x,y)$ *определяется рядом* (3.29). *Кроме того, возможно почленное дифференцирование ряда* (3.29) *по всем переменным и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно.*

Пусть выполняются условия A, Б и В. Тогда функции $U(t,x,y)$ *и* $\beta(x,y)$, *которые являются решением обратной задачи* (1)–(7), *однозначно определяются из формул* (3.57) *и* (3.65). *При этом решение* $U(t,x,y)$ *интегро-дифференциального уравнения* (3.1) *устойчиво по функции восстановления* $\beta(x,y)$.

Литература

1. *Ахтямов А. М., Аюпова А. Р.* О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журн. Средневолж. мат. о-ва.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 37–42.
2. *Турбин М. В.* Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель — Балкли // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2013.—№ 2.—С. 246–257.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977.—624 с.
4. *Benney D. J., Luke J. C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys.—1964.—Vol. 43.—P. 309–313. DOI: 10.1002/sapm1964431309.
5. *Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Мат. моделирование.—2000.—Т. 12, № 1.—С. 94–103.
6. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени // Изв. вузов. Математика.—2012.—№ 10.—С. 32–44.
7. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 2 (92).—С. 97–154.
8. *Лажетич Н.* О существовании классического решения смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Диф. уравнения.—1998.—Т. 34, № 5.—С. 682–694.
9. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанном задаче для уравнений в частных производных.—М.: МГУ, 1991.—112 с.
10. *Кононенко Л. И.* Прямая и обратная задачи для сингулярной системы с медленными и быстрыми переменными в химической кинетике // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 1.—С. 39–46. DOI: 10.23671/VNC.2015.1.7291.
11. *Костин А. Б.* Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Мат. сб.—2013.—Т. 204, № 10.—С. 3–46. DOI: 10.4213/sm8104.

12. *Прилепко А. И., Ткаченко Д. С.* Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2003.—Т. 43, № 4.—С. 562–570.
13. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика.—2012.—№ 2 (18).—С. 56–62.
14. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2012.—№ 3 (28).—С. 17–29. DOI: 10.14498/vsgtu1041.
15. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер.—2013.—№ 9/1 (110).—С. 58–66.
16. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 2.—С. 76–85. DOI: 10.23671/VNC.2016.2.5921.
17. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики.—М.: Высшая школа, 1964.—560 с.
18. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Том 1.—М.: Наука, 1990.—528 с.

Статья поступила 17 ноября 2016 г.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Сибирский государственный аэрокосмический
университет имени академика М. Ф. Решетнева,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 660014, Красноярск, пр. им. газеты Красноярский рабочий, 31
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 2, P. 67–84

A COEFFICIENT DETERMINATION IN NONLOCAL PROBLEM FOR BOUSSINESQ TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEGENERATE KERNEL

Yuldashev, T. K.[1]

[1] Siberian State Aerospace University,
31 Krasnoyarskiy Rabochiy Ave., Krasnoyarsk 660014, Russia
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Abstract. In the three-dimensional domain a Boussinesq type linear integro-differential equation of the fourth order with a restore coefficient and a degenerate kernel is considered. The solution of this integro-differential equation is considered in the class of continuously differentiable functions. First, we study the classical solvability of a nonlocal direct boundary value problem for the considered Boussinesq integro-differential equation with a parameter in the integral term. The method of separation of variables and the method of a degenerate kernels are used. A countable system of algebraic equations is obtained. The solution of this algebraic system of equations for regular values of the spectral parameter in the integral term of a given equation allows us to construct a solution of a non-local direct boundary value problem for an integro-differential equation in the form of a Fourier series. A criterion for the unique solvability of a direct boundary value problem is established for fixed values of the restore function. Using the Cauchy–Bunyakovsky inequality and the Bessel inequality, we prove the absolute and uniform convergence of the obtained Fourier series. The continuity of all the derivatives of the solution of the direct boundary value problem for a given equation is also proved. Further, with the help of an additional integral condition, the restore function is uniquely determined in the form of a Fourier series. The criterion of continuity of second order derivatives of the restore function with respect to space variables is established. Based on the found values of the restore function, the main unknown function is uniquely determined as a solution to the inverse problem for the considering integro-differential equation. In addition, the stability with respect to restore function of the solution of an integro-differential equation is studied.

Key words: Boussinesq type integro-differential equation, fourth-order equation, degenerate kernel, integral conditions, one valued solvability.

Mathematical Subject Classification (2010): 35A02, 35M10, 35S05.

For citation: *Yuldashev, T. K.* A Coefficient Determination in Nonlocal Problem for Boussinesq Type Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 67–84 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32118.

References

1. *Akhtyamov, A. M. and Ayupova, A. R.* On Solving the Problem of Diagnosing Defects in a Small Cavity in the Rod, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 37–42 (in Russian).
2. *Turbin, M. V.* Investigation of Initial-Boundary Valye Problem for the Herschel-Bulkley Mathematical Fluid Model, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 246–257 (in Russian).
3. *Whitham, G. B. Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, 1974.
4. *Benney, D. J. and Luke, J. C.* Interactions of Permanent Waves of Finite Amplitude, *J. Math. Phys.*, 1964, vol. 43, pp. 309–313. DOI: 10.1002/sapm1964431309.
5. *Gordeziani, D. G. and Avalishvili, G. A.* On the Constructing of Solutions of the Nonlocal Initial Boundary Value Problems for One-Dimensional Medium Oscillation Equations, *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103 (in Russian).
6. *Pul'kina, L. S.* A Nonlocal Problem for a Hyperbolic Equation with Integral Conditions of the 1st Kind with Time-Dependent Kernels, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 26–37. DOI: 10.3103/s1066369x12100039.
7. *Il'in, V. A.* The Solvability of Mixed Problems for Hyperbolic and Parabolic Equations, *Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142. DOI: 10.1070/rm1960v015n02abeh004217.
8. *Lazhetich, N. L.* On the Existence of a Classical Solution of a Mixed Problem for a Second-Order One-Dimensional Hyperbolic Equation, *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 5, pp. 683–695.
9. *Chernyatin, V. A. Obosnovanie Metoda Fur'e v Smeshannom Zadache dlya Uravneniy v Chastnykh Proizvodnykh*, Moscow, Moscow State University, 1991, 112 p. (in Russian).
10. *Kononenko, L. I.* Direct and Inverse Problems for a Singular System with Slow and Fast Variables in Chemical Kinetics, *Vladikavkaz Math. J.*, 2015, vol. 17, no. 1, pp. 39–46 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2015.1.7291.
11. *Kostin, A. B.* The Inverse Problem of Recovering the Source in a Parabolic Equation Under a Condition of Nonlocal Observation, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 10, pp. 1391–1434. DOI: 10.1070/SM2013v204n10ABEH004344.
12. *Prilepko, A. I. and Tkachenko, D. S.* Properties of Solutions of a Parabolic Equation and the Uniqueness of the Solution of the Inverse Source Problem with Integral Overdetermination, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 4, pp. 537–546.
13. *Yuldashev, T. K.* On the Inverse Problem for the quasilinear Partial Differential Equation of the First Order, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2012, no. 2 (18), pp. 56–62 (in Russian).
14. *Yuldashev, T. K.* Inverse Problem for Nonlinear Partial Differential Equation with High Order Pseudoparabolic Operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3 (28), pp. 17–29 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1041.
15. *Yuldashev, T. K.* Inverse Problem for a Nonlinear Integral and Differential Equation of the Third Order, *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2013, no. 9/1 (110), pp. 58–66 (in Russian).
16. *Yuldashev, T. K.* Inverse Problem for a Third Order Fredholm Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel, *Vladikavkaz Math. J.*, 2016, vol. 18, no. 2, pp. 76–85 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2016.2.5921.
17. *Polozhiy, G. N. Uravneniya Matematicheskoy Fiziki*, Moscow, Vysshaya Shkola, 1964, 560 p. (in Russian).
18. *Nikol'skiy, S. M. Kurs Matematicheskogo Analiza. Vol. 1*, Moscow, Nauka, 1990, 528 p. (in Russian).

Received November 17, 2016

Tursun K. Yuldashev
Siberian State Aerospace University,
31 Krasnoyarskiy Rabochiy Ave., Krasnoyarsk 660014, Russia,
Associate Professor of Higher Mathematics Department
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`