*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 3, С. 24–30*

**УДК** 512.5
**DOI** 10.23671/VNC.2019.3.36458

# РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТРАНСВЕКЦИИ В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СЕТЕВОЙ ГРУППЕ

**С. Ю. Итарова**[1], **В. А. Койбаев**[1,2]

[1] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: sitarova1991@gmail.com, koibaev-K1@yandex.ru

**Аннотация.** Работа связана с изучением элементарных сетей (ковров) $\sigma = (\sigma_{ij})$ и элементарных сетевых групп $E(\sigma)$. А именно, приводится разложение элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. Наборы подмножеств (идеалов, аддитивных подгрупп и др.) $\sigma = \{\sigma_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ определенного ассоциативного кольца с условиями $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$, $1 \leqslant i, r, j \leqslant n$, возникали при решении различных задач. Такие наборы назывались коврами или сетями, а связанные с ними кольца и группы — ковровыми, сетевыми, обобщенными конгруэнц-подгруппами и др. Назовем элементарную сеть (сеть без диагонали) $\sigma$ *замкнутой* (*допустимой*), если подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Настоящая статья мотивирована вопросом В. М. Левчука (Коуровская тетрадь, вопрос 15.46) о том, что необходимым и достаточным условием допустимости (замкнутости) элементарной сети $\sigma$ является допустимость (замкнутость) всех пар $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$. Другими словами, включение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ в элементарную группу $E(\sigma)$ эквивалентно включению $t_{ij}(\alpha)$ в подгруппу $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ (для любых $i \neq j$). Тем самым становится актуальным разложение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. Рассматривается элементарная сеть порядка $n$ (элементарный ковер) $\sigma = (\sigma_{ij})$ аддитивных подгрупп коммутативного кольца (сеть без диагонали), связанная с $\sigma$ производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$, сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$, причем $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ и сеть $\Omega$ является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть $\sigma$. Пусть $R$ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, $n$ — натуральное число, $n \geqslant 2$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп $\sigma_{ij}$ кольца $R$ называется сетью (ковром) над кольцом $R$ порядка $n$, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов $i$, $r$, $j$. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер*). Получено разложение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ из $E(\sigma)$ в произведение $t_{ij}(\alpha) = ah$ двух матриц $a$ и $h$, где $a$ — элемент группы $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$, $h$ — элемент сетевой группы $G(\tau)$, где $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{ii} & \omega_{ij} \\ \omega_{ji} & \tau_{jj} \end{pmatrix}$, $\omega_{ii} \subseteq \tau_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$. В работе получены важные характеристики матриц $a$ и $h$, участвующих в разложении элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$.

**Ключевые слова:** сеть, ковер, элементарная сеть, сетевая группа, замкнутая сеть, производная сеть, элементарная сетевая группа, трансвекция.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 20G15.

**Образец цитирования:** *Итарова С. Ю., Койбаев В. А.* Разложение элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 24–30. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36458.

## 1. Введение

Работа связана с изучением элементарных сетей (ковров) $\sigma = (\sigma_{ij})$ и элементарных сетевых групп $E(\sigma)$. Точнее, приводится разложение элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть (элементарный ковер) аддитивных подгрупп $\sigma_{ij}$ кольца $R$ порядка $n$ [1, 2], [3, вопрос 15.46], $\omega = (\omega_{ij})$ —

производная сеть для $\sigma$, $\Omega = (\Omega_{ij})$ — сеть, ассоциированная с элементарной сетевой группой $E(\sigma)$, $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ [4, 5]. Получено разложение (теорема) элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ из $E(\sigma)$ в произведение двух матриц $t_{ij}(\alpha) = ah$, где $a$ — элемент группы $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$, а матрица $b$ — элемент сетевой группы $G(\tau)$, где $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{ii} & \omega_{ij} \\ \omega_{ji} & \tau_{jj} \end{pmatrix}$, $\omega_{ii} \subseteq \tau_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$. Уточняется результат [7], полученный ранее, о разложении элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе.

Наборы подмножеств (идеалов, аддитивных подгрупп и др.) $\sigma = (\sigma_{ij})$ ассоциативного кольца с условиями $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$, $1 \leqslant i, r, j \leqslant n$, возникали при решении различных задач. Такие наборы назывались сетями или коврами, а связанные с ними кольца и группы сетевыми или ковровыми, обобщенными конгруэнц-подгруппами и др. Назовем элементарную сеть $\sigma$ *замкнутой* (*допустимой*), если подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Настоящая статья мотивирована вопросом В. М. Левчука (Коуровская тетрадь, вопрос 15.46) о том, что необходимым и достаточным условием допустимости (замкнутости) элементарной сети $\sigma$ является допустимость (замкнутость) всех пар $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$. Другими словами, включение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ в элементарную группу $E(\sigma)$ эквивалентно включению $t_{ij}(\alpha)$ в подгруппу $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ (для любых $i \neq j$). Тем самым становится актуальным представление элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. В силу сформулированного результата одна из матриц разложения $t_{ij}(\alpha) = ah$ берется из группы $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$. Поэтому для исследования указанного вопроса В. М. Левчука необходимо получить исчерпывающие данные о второй матрице, которая согласно нашей теореме содержится в сетевой группе $G(\tau)$. В работе (теорема) получены важные характеристики матриц $a$ и $h$, участвующих в разложении.

Существенную роль в работе сыграло определение производной сети, а именно, циклический способ дополнения диагонали элементарной производной сети до полной сети, представленный в [6]. Отметим, что настоящая работа продолжает и уточняет исследования, начатые в [7].

В работе приняты следующие стандартные обозначения: $R$ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, $n$ — натуральное число, $n \geqslant 3$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом $R$ порядка $n$. Пусть $e$ — единичная матрица порядка $n$, $e_{ij}$ — матрица, у которой на позиции $(i, j)$ стоит 1, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ — элементарная трансвекция. Положим, далее, $t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A\}$.

Для элементарной сети (ковра) $\sigma$ мы рассматриваем элементарную сетевую группу $E(\sigma)$ и ее подгруппу $E_{ij}(\sigma)$, $i \neq j$:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\rangle, \quad E_{ij}(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle.$$

Далее, если $\sigma$ — (полная) сеть, то через $G(\sigma)$ обозначается сетевая группа [1].

## 2. Производная сеть

Основным содержанием раздела является изложение теоремы вложений, полученной в [6]. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца $R$ называется *сетью* (*ковром*) [1, 2] над кольцом $R$ порядка $n$, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов $i$, $r$, $j$. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер*) [1, 2], [3, вопрос 15.46]. Таким образом, элементарная сеть — это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца $R$, для которых $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел $i$, $r$, $j$.

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) $\sigma_{ii}$ кольца $R$ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть $\sigma$ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети. Хорошо известно (см., например, [1]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы $\sigma_{ii}$ определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}, \tag{1}$$

где суммирование берется по всем $k$, отличным от $i$.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом $R$ порядка $n \geqslant 3$. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп $\omega_{ij}$ кольца $R$, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где суммирование берется по всем $k$, отличным от $i$ и $j$. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел $i$, $r$, $j$, мы имеем $\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп $\omega_{ij}$ кольца $R$ является элементарной сетью. Элементарная сеть $\omega$ является дополняемой [6, предложение 1]. Дополним элементарную сеть $\omega$ до (полной) сети циклическим способом, предложенным в [6], полагая

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq s} \sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si},$$

где суммирование ведется по всем $1 \leqslant k \neq s \leqslant n$. Построенную сеть мы называем *производной сетью* (для элементарной сети $\sigma$).

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом $R$ порядка $n$. Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где

$$\gamma_{ij} = \Omega_{ij}\Omega_{ji} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m, \quad i \neq j.$$

Таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является *элементарной сетью*, причем дополняемой, т. е. справедливы включения $\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$ для любых $i \neq j$ [4, предложение 5]. В силу формулы (1) дополним элементарную сеть $\Omega$ до (полной) сети стандартным способом, положив $\Omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki}$, где суммирование берется по $k$, $k \neq i$. Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki} = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} \gamma_{ik}.$$

Сеть $\Omega$ называется *сетью*, ассоциированной с элементарной группой $E(\sigma)$.

**Предложение 1** [6, теорема 1]. *Элементарная сеть $\sigma$ индуцирует производную сеть $\omega$ и сеть $\Omega$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, при этом выполняются включения $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$, причем*

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$$

*для любых $r$, $i$, $j$. Далее, для любых попарно различных $i$, $r$, $j$ мы имеют место включения: $\Omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$.*

**Предложение 2** [7, предложение 2]**.** *Пусть $\sigma$ — элементарная сеть порядка $n$ над $R$, $\Omega$ — сеть, асссоциированная элементарной группой $E(\sigma)$. Если $a = (\delta_{ij} + a_{ij}) \in E(\sigma)$, то $a_{ij} \in \Omega_{ij}$.*

### 3. Теорема о разложении

На протяжении всего дальнейшего изложения мы предполагаем, что $n$ — натуральное и $n \geqslant 3$. Основным результатом раздела является разложение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$ в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. Для простоты, не умаляя общности, мы предполагаем, что $i = 2$, $j = 1$.

По данным сетям $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$, определенным для элементарной сети $\sigma$, мы построим новую сеть $\tau$ следующим образом. В элементарной сети $\Omega$ на позицию (1, 2) вместо $\Omega_{12}$ поставим $\omega_{12}$, а на позицию (2, 1) вместо $\Omega_{21}$ поставим $\omega_{21}$. Согласно предложению 1 таблица, полученная таким образом, будет элементарной сетью, причем она является дополняемой элементарной сетью. Дополним ее до (полной) сети следующим образом. А именно, положим $\tau_{ii} = \Omega_{ii}$, $i = 3, \ldots, n$,

$$\tau_{11} = \omega_{11} + \Omega_{13}\Omega_{31} + \ldots + \Omega_{1n}\Omega_{n1}, \quad \tau_{22} = \omega_{22} + \Omega_{23}\Omega_{32} + \ldots + \Omega_{2n}\Omega_{n2}.$$

Построенная сеть имеет вид

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \omega_{12} & \Omega_{13} & \ldots & \Omega_{1n} \\ \omega_{21} & \tau_{22} & \Omega_{23} & \ldots & \Omega_{2n} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} & \ldots & \Omega_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \Omega_{n3} & \ldots & \Omega_{nn} \end{pmatrix}.$$

В силу предложения 1 построенная таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является (полной) сетью.

**Лемма 1.** *Имеют место включения*

$$\tau_{11}\Omega_{12} \subseteq \omega_{12}, \quad \Omega_{12}\tau_{22} \subseteq \omega_{12}, \quad \tau_{22}\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}, \quad \Omega_{21}\tau_{11} \subseteq \omega_{21}, \tag{2}$$

$$\gamma_{12}\tau_{11} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}, \quad \gamma_{12}\tau_{22} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}. \tag{3}$$

$\lhd$ Доказательства формул (2) повторяют друг друга, поэтому мы воспроизводим одно из них. Докажем, например, включение $\tau_{22}\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}$. Для доказательства последнего включения достаточно показать, что $(\omega_{22})\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}$ и при $i \geqslant 3$ имеет место включение $\Omega_{2i}\Omega_{i2}\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}$. Оба этих включения вытекают непосредственно из предложения 1.

Докажем формулы (3). Докажем, например, включение $\gamma_{12}\tau_{22} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}$. Согласно предложению 1 ($\gamma_{12} = \Omega_{12}\Omega_{21}$) мы имеем $\Omega_{21}\Omega_{12}\omega_{22} \subseteq \Omega_{21}\omega_{12} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}$, далее,

$$\Omega_{21}\Omega_{12}\Omega_{2i}\Omega_{i2} \subseteq \Omega_{21}\omega_{1i}\Omega_{i2} \subseteq \Omega_{21}\omega_{12} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}, \quad i \geqslant 3. \rhd$$

Рассмотрим подгруппу

$$H = \big\langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : \ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n; \ \{i, j\} \neq \{1, 2\} \big\rangle,$$

порожденную подгруппами $t_{ij}(\sigma_{ij})$ на всех позициях, за исключением позиций $(1, 2)$ и $(2, 1)$. Очевидно, что $H \subseteq E(\tau) \subseteq G(\tau)$.

Следующее предложение доказывается простым «вытаскиванием» элементарных трансвекций $t_{12}(\xi)$, $\xi \in \sigma_{12}$, $t_{21}(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_{21}$.

**Предложение 3.** *Справедливо равенство $E(\sigma) = E_{12}(\sigma)H$, где $H \subseteq E(\tau) \subseteq G(\tau)$.*

**Предложение 4.** *Пусть* $t_{21}(\alpha) \in E(\sigma)$. *Тогда* $t_{21}(\alpha) = ah$, $a \in E_{12}(\sigma)$, $h \in G(\tau)$,

$$a = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{pmatrix}, e_{n-2}\right), \quad h = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1+h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & 1+h_{22} \end{pmatrix}, e_{n-2}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & 1+h_{22} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$a_{11} = h_{22}, \quad \alpha a_{12} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}, \quad a_{11}\alpha \in \omega_{21}, \quad \alpha - a_{21} \in \omega_{21}, \tag{5}$$

$$a_{ii}, h_{ii} \in \tau_{11} \cap \tau_{22} \cap \gamma_{12}, \quad \omega_{11} \cap \omega_{22}, \quad i, j = 1, 2. \tag{6}$$

$\lhd$ Согласно предложению 3 нам нужно доказать включения (5) и (6). Заметим в начале, что из $h, h^{-1} \in G(\tau)$ следует, что $h_{11}, h_{22} \in \tau_{11} \cap \tau_{22}$. Из включения $a \in E_{12}(\sigma)$ мы имеем $a_{11}, a_{22} \in \gamma_{12}$, $a_{21} \in \Omega_{21}$. Далее, согласно предложению 2 мы имеем $\alpha \in \Omega_{21}$.

Согласно предложению 3 имеем включение $E(\sigma) \subseteq E_{12}(\sigma)G(\tau)$. Следовательно, $t_{21}(\alpha) = ah$, $a \in E_{12}(\sigma)$, $h \in G(\tau)$.

Докажем включения (5). Из (4) следует равенство

$$\begin{pmatrix} 1+a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1+a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & 1+h_{22} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Отсюда, в частности, $a_{11} = h_{22}$, $a_{12} = -h_{12}$. Далее, имеем [2, лемма 1] $\tau_{22}\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}$, откуда $h_{22}\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}$, а потому $(a_{11} = h_{22})$ $a_{11}\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}$, следовательно, $(\alpha \in \Omega_{21})$ $a_{11}\alpha \in \omega_{21}$. В силу (7) мы имеем $-a_{21} + \alpha + \alpha a_{11} = h_{21} \in \omega_{21}$, но согласно доказанному $a_{11}\alpha \in \omega_{21}$, следовательно, $\alpha - a_{21} \in \omega_{21}$. Отметим, наконец, что включение $\alpha a_{12} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$ вытекает из предложения 1.

Докажем включения (6). Согласно замечанию, сделанному в начале доказательства теоремы, мы имеем включение $a_{11} = h_{22} \in \tau_{11} \cap \tau_{22} \cap \gamma_{12}$. Далее, из (7) $a_{22} - \alpha a_{12} = h_{11}$, но согласно доказанному $\alpha a_{12} \in \omega_{11} \cap \omega_{22} \subseteq \tau_{11} \cap \tau_{22}$. Согласно замечанию, сделанному в начале доказательства теоремы, $h_{11} \in \tau_{11} \cap \tau_{22}$, поэтому $a_{22} \in \tau_{11} \cap \tau_{22}$, но $a_{22} \in \gamma_{12}$, откуда $a_{22} \in \tau_{11} \cap \tau_{22} \cap \gamma_{12}$. С другой стороны, $\alpha a_{12} \in \Omega_{21}\omega_{12} \subseteq \Omega_{21}\Omega_{12} \subseteq \gamma_{12}$, поэтому $h_{11} \in \tau_{11} \cap \tau_{22} \cap \gamma_{12}$. Таким образом, мы показали, что $a_{ii}, h_{ii} \in \tau_{11} \cap \tau_{22} \cap \gamma_{12}$, $i = 1, 2$. Но теперь из последнего включения и (3) вытекает справедливость включений $a_{ii}a_{jj}, a_{ii}h_{jj}, h_{ii}h_{jj} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$, $i, j = 1, 2$. $\rhd$

**Теорема.** *Пусть* $n \geqslant 3$, $t_{21}(\alpha) \in E(\sigma)$. *Тогда* $t_{21}(\alpha) = ah$, $a \in E_{12}(\sigma)$, $h \in G(\tau)$. *Если*

$$a = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{pmatrix}, e_{n-2}\right), \quad h = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1+h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & 1+h_{22} \end{pmatrix}, e_{n-2}\right),$$

*и выполнено* (4), *то* $a_{ii}, h_{ii} \in \tau_{11} \cap \tau_{22} \cap \gamma_{12}$, $i = 1, 2$,

$$\alpha, a_{21} \in \Omega_{21}, \quad \alpha - a_{21} \in \omega_{21}, \quad a_{12}, h_{12} \in \omega_{12}, \quad h_{21} \in \omega_{21}, \tag{8}$$

$$a_{22} + a_{11}, \ a_{22} - h_{11}, \ a_{22} + h_{22}, \ h_{11} + h_{22}, \ h_{11} + a_{11} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}, \tag{9}$$

$\lhd$ Представление $t_{21}(\alpha) = ah$, $a \in E_{12}(\sigma)$, $h \in G(\tau)$ вытекает из предложения 4. Включения $a_{ii}, h_{ii} \in \tau_{11} \cap \tau_{22} \cap \gamma_{12}$, $i = 1, 2$, и включения (8) следуют также из предложения 4.

Докажем включения (9). Из (7) мы имеем $a_{22} - a_{12}\alpha = h_{11}$, откуда $a_{22} - h_{11} = a_{12}\alpha \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$ (см. предложение 4, формулу (5)). Далее, из (6) следует, что $a_{11}a_{22} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$, а из предложения 1 (так как $a_{21} \in \Omega_{21}$, $a_{12} \in \omega_{12}$) следует включение $a_{21}a_{12} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$. Но так как $\det(a) = 1$, то $a_{22} + a_{11} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$. Далее, $a_{11} = h_{22}$, поэтому $a_{22} + h_{22} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$. Аналогично, из того, что $\det(h) = 1$ и того, что $h_{11}h_{22} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$ следует включение $h_{11} + h_{22} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$. Наконец, из равенства $a_{11} = h_{22}$ мы имеем $h_{11} + a_{11} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}$. $\rhd$

## Литература


1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 17-е.—Новосибирск, 2010.
4. *Койбаев В. А.* Замкнутые сети в линейных группах // Вестн. СПбГУ. Сер. 1.—2013.—№ 1.—С. 25–33.
5. *Койбаева В. А., Нужин Я. Н.* Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. матем.—2013.—Т. 18, № 1.—С. 75–84.
6. *Джусоева Н. А., Итарова С. Ю., Койбаев В. А.* О вложении элементарной сети в промежуток сетей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения проф. Мишеля Деза (Тула, 13–18 мая 2019 г.).—2019.—С. 73–74.
7. *Дряева Р. Ю., Койбаев В. А.* Разложение элементарной трансвекции в элементарной группе // Вопросы теории представлений алгебр и групп. 28, Зап. научн. сем. ПОМИ.—2015.—Т. 435.—С. 33–41.


*Статья поступила 26 марта 2019 г.*

Итарова Светлана Юрьевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
*аспирант кафедры алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: sitarova1991@gmail.com

Койбаев Владимир Амурханович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН
*ведущий научный сотрудник отдела функц. анализа*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
*заведующий кафедрой алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru
http://orcid.org//0000-0002-5142-2612

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 3, P. 24–30*

# DECOMPOSITION OF ELEMENTARY TRANSVECTION IN ELEMENTARY NET GROUP

Itapova, S. Y.[1] and Koibaev, V. A.[1,2]
[1] North-Ossetian State University,
46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: sitarova1991@gmail.com, koibaev-K1@yandex.ru

**Abstract.** The paper deals with the study of elementary nets (carpets) $\sigma = (\sigma_{ij})$ and elementary net groups $E(\sigma)$. Namely, decomposition of an elementary transvection in elementary net group $E(\sigma)$ is given. The colections of subsets (ideals, additive subgroups and etc.) $\sigma = \{\sigma_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ of an associative ring with the conditions $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$, $1 \leqslant i, r, j \leqslant n$, arose in a different situations. Such collections are called carpets or nets and a rings, while the associated groups are called carpet (net, congruence, etc.) subgroups. An elementary net (a net without diagonal) $\sigma$ is *closed* (*admissible*) if the subgroup $E(\sigma)$ does not contain new elementary transvections. The study was motivated by the question of V. M. Levchuk (The Kourovka notebook, question 15.46) whether or not a necessary and sufficient condition for the admissibility (closure) of the elementary net $\sigma$ is the admissibility (closure) of all pairs $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$. In other words, the inclusion of an elementary transvection $t_{ij}(\alpha)$ in the elementary group $E(\sigma)$ is equivalent to the inclusion of $t_{ij}(\alpha)$ in the subgroup $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ (for any $i \neq j$). Thus, the decomposition of elementary transvection $t_{ij}(\alpha)$ in the elementary net group $E(\sigma)$ becomes relevant. We consider an elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ (elementary carpet) of the additive subgroups of a commutative ring of order $n$, a derived net $\omega = (\omega_{ij})$ depending on the net $\sigma$, the net $\Omega = (\Omega_{ij})$ associated with the elementary group $E(\sigma)$, where $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ and the net $\Omega$ is the least (complemented) net among all the nets which contain the elementary net $\sigma$. Let $R$ be a commutative unital ring and $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. A set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of additive subgroups $\sigma_{ij}$ of the ring $R$ is said to be a net or a carpet over the ring $R$ of order $n$ if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all $i$, $r$, $j$. A net without diagonal is said to be *elementary net* or *elementary carpet*. We prove that every elementary transvection $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$ can be decomposed $t_{ij}(\alpha) = ah$ into a product of two matrices $a$ and $h$, where $a$ is a member of the group $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$, $h$ is a member of the net group $G(\tau)$, where $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{ii} & \omega_{ij} \\ \omega_{ji} & \tau_{jj} \end{pmatrix}$, $\omega_{ii} \subseteq \tau_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$. Important characteristics of matrices $a$ and $h$ involved in the decomposition of elementary transvection $t_{ij}(\alpha)$ were also obtained in the paper.

**Key words:** nets, carpets, elementary net, net group, closed net, derivative net, elementary net group, transvections.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 20G15.

**For citation:** *Itapova, S. Y., Koibaev, V. A.* Decomposition of Elementary Transvection in Elementary Net Group, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 24–30 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36458.

## References

1. *Borevich, Z. I.* Subgroups of Linear Groups Rich in Transvections, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, no. 2, pp. 928–934. DOI: 10.1007/BF01089083.
2. *Levchuk, V. M.* A Note to L. Dickson's Theorem, *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1983, vol. 22, no. 4, pp. 421–434 (in Russian).
3. *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, issue 17, Novosibirsk, Russ. Acad. of Sciences, Siberian Div., Inst. of Mathematics, 2010 (in Russian). DOI: 10.3103/s1063454113010056.
4. *Koibaev, V. A.* Closed Nets in Linear Groups, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2013, vol. 46, no. 1, pp. 14–21. DOI: 10.3103/S1063454113010056.
5. *Koibaev, V. A. and Nuzhin, Y. N.* Subgroups of the Chevalley Groups and Lie Rings Definable by a Collection of Additive Subgroups of the Initial Ring, *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 201, no. 4, pp. 458–464. DOI: 10.1007/s10958-014-2006-9.
6. *Dzhusoeva, N. A., Itarova, S. Y. and Koibaev, V. A.* On the Embedding an Elementary Net Into a Gap of Nets, *XVI International Conference «Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems, Applications and Problems of History» dedicated to the 80th anniversary of the birth of Prof. Michel Desa* (*May 13–18, 2019, Tula*), 2019, pp. 73–74. (in Russian).
7. *Dryaeva, R. Y. and Koibaev, V. A.* Decomposition of Elementary Transvection in Elementary Group, *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 219, no. 4, pp. 513–518. DOI: 10.1007/s10958-016-3123-4.

*Received 26 March, 2019*

Svetlana Y. Itarova
North-Ossetian State University,
46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
*Graduate Student*
E-mail: `sitarova1991@gmail.com`

Vladimir A. Koibaev
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
*Leading Researcher*;
North-Ossetian State University,
46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
*Professor, Head of Department*
E-mail: `koibaev-K1@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612