Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 3, С. 31–49

УДК 51-72
DOI 10.23671/VNC.2019.3.36460

ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЛАПЛАСА И УСТОЙЧИВОСТЬ ОТКРЫТЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

К. И. Ильин[1], **А. Б. Моргулис**[2,3], **Черныш А. С.**[3]

[1] Йоркский университет,
Великобритания, Хеслингтон, Йорк YO10 5DD;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
[3] Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича ЮФУ,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

E-mail: `konstantin.ilin@york.ac.uk`, `morgulisandrey@gmail.com`,
`aleksei.0.chernysh@gmail.com`

Аннотация. Изучаются спектры краевых задач возникающих при линеаризации уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости на стационарных решениях, описывающих течения, в которых жидкость поступает в область течения и выводится из нее через определенные части границы. Такие течения естественно называть открытыми. Спектры таких течений относительно мало изучены, по сравнению со случаем полностью непроницаемых границ или условий периодичности. В этой статье мы указываем класс открытых течений, спектры которых состоят из «нулей» некоторой целой операторнозначной функции, представленной операторным интегралом Лапласа. Вопрос о расположении спектра таких течений сводится, следовательно, к своего рода операторнозначной проблеме Рауса — Гурвица для этого интеграла. В ряде интересных частных случаев эту операторную функцию удается выразить как мультипликаторное преобразование рядов Фурье, и тогда проблема Рауса — Гурвица становится скалярной, и более того, ее удается решить с помощью теоремы Пойа о нулях интегралов Лапласа. На этой основе мы доказываем принадлежность открытой левой полуплоскости спектров ряда конкретных течений, для которых такие доказательства не были известны.

Ключевые слова: уравнение Эйлера, идеальная несжимаемая жидкость, устойчивость, спектр, целые функции, проблема Рауса — Гурвица.

Mathematical Subject Classification (2010): 76B47, 76E09, 30D20.

Образец цитирования: *Ильин К. И., Моргулис А. Б., Черныш А. С.* Проблема Рауса — Гурвица для оператор-функций и устойчивость открытых течений идеальной несжимаемой жидкости // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 31–49. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36460.

1. Введение

Пусть в некоторой области эвклидова пространства (для начала, конечномерного) задано векторное поле $Q = Q(x)$, и это векторное поле имеет равновесие $y : Q(y) = 0$. Эволюция малых возмущений такого равновесия описывается линейным уравнением $\dot{z} = Q'(y)z$, где $Q'(y)$ — дифференциал поля Q в равновесии y. Собственным числам λ оператора $Q'(y)$ соответствуют собственные моды малых возмущений вида $z(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}b$, где b — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ: $Q'(y)b = \lambda b$, $b \neq 0$; соответственно, числа $\mathrm{e}^{\lambda t}$ будут собственными для оператора $\exp(tQ'(y))$. Классический результат ляпуновской теории устойчивости — принцип линеаризации — гласит, что равновесие y асимптотически устойчиво, если все собственные числа λ принадлежат полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ и неустойчиво, если найдется хотя бы одно собственное число $\lambda: \ \mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

В прикладных задачах, как правило, исследуются не изолированные равновесия, а семейства равновесий, зависящие от физических параметров системы. Поскольку собственные значения линеаризованной системы меняются вместе с равновесием, возможно так называемое возникновение неустойчивости, т. е. появление экспоненциально растущих мод вследствие пересечения мнимой оси ветвью (или сразу несколькими ветвями) собственных значений при плавном изменении параметров семейства. Если такое пересечение происходит в ненулевой точке мнимой оси, говорят о колебательной неустойчивости, иначе — о монотонной.

Возникновение неустойчивости — прекурсор изменения динамики нелинейной системы вследствии локальных бифуркаций, т. е. ответвления вторичного режима движения от семейства равновесий. Если нет дополнительных вырождений, и неустойчивость монотонная, то ответвляются равновесия, если колебательная — предельные циклы (бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа) [1]; в случае дополнительного вырождения, такого, например, как кратность нейтрального спектра, имеют место более сложные бифуркации, см. [2].

Эволюционные уравнения с частными производными часто рассматривают как бесконечномерные ОДУ. Такой подход широко используется в математической физике, и, в частности, в механике сплошной среды. Равновесиям бесконечномерных ОДУ могут соответствовать, например, стационарные течения жидкости или напряженно-деформированные состояния упругих тел. Спектры малых возмущений таких равновесий представляют интерес как сами по себе, так и в связи с возникновением неустойчивости и нелинейными динамическими явлениями, сопровождающими ее. При этом методы теории устойчивости и бифуркаций часто применяются эвристически, хотя во многих важных частных случаях их удается обосновать [3–5].

В настоящем сообщении речь идет о спектрах малых возмущений стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости. Такие спектры изучались многими авторами, см. [6, 7] и ссылки в этих работах. Особенность рассматриваемых нами течений в том, что они *открыты*, т. е. граница области течения содержит проницаемые части, через которые жидкость подается в область течения (вход) и выводится из нее (выход). Такие течения относительно мало изучены. Тем не менее известно, что устройство их спектров может существенно отличаться от того, что наблюдается в случае непроницаемых границ, или условий пространственной периодичности. Например, в случае непроницаемых границ, идеальная жидкость представляет собой гамильтонову систему [8]; соответственно, спектр стационарных течений, выступающих в роли равновесий, симметричен относительно мнимой оси, причем имеется как точечный, так и непрерывный спектр (возможно, неустойчивый!). В случае открытого течения спектр может потерять симметрию относительно мнимой оси, может стать чисто точечным, расположиться в левой полуплоскости, и даже исчезнуть совсем [9, 10].

В этой статье мы приводим новые примеры конкретных открытых течений, спектры которых располагаются в открытой левой полуплоскости. Доказательства этого не были известны, несмотря на элементарность этих течений. (Здесь мы имеем в виду рассмотрения качественного характера, не связанные с приближенными вычислениями и т. д.). Упомянутые примеры мы рассматриваем в контексте более общего результата; именно, мы указываем класс открытых течений, спектры которых представляют собой «нули» некоторой целой операторнозначной функции. Вопрос об устойчивости всех собственных мод таких течений сводится, следовательно, к своего рода операторнозначной проблеме Рауса — Гурвица. Во многих важных частных случаях эту операторную функцию удается выразить как мультипликаторное преобразование рядов Фурье, и тогда проблема Рауса — Гурвица становится скалярной. Хотя общее решение последней известно [11], его применение к решению конкретных задач часто затруднительно. В нашем случае, к счастью, работает более простое достаточное условие: теорема Пойа о нулях интегралов Лапласа [12].

Исследованные нами классы течений отличаются от открытых течений, рассмотренных в [9, 10], и топологическим типом рассматриваемых областей течения, и граничными условиями, которыми снабжаются уравнения движения жидкости. Оба отличия существенны: во-первых, стационарные течения, которые мы рассматриваем здесь, не всегда совместны с граничными условиями рассмотренными в [9, 10]; во-вторых, те граничные условия, которые мы рассматриваем здесь, несовместны с методами работ [9, 10].

2. Постановка начально-краевых задач

Уравнения движения идеальной несжимаемой и однородной жидкости — уравнения Эйлера — имеют вид

$$\mathbf{v}_t + \omega \times \mathbf{v} = -\nabla H; \quad H = P + \mathbf{v}^2/2; \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

Здесь векторное поле $\mathbf{v}$ (скорость течения) и скалярное поле P (давление) неизвестны, и должны быть определены в каждый момент времени в каждой точке области, занятой жидкостью (область течения). Давление, как и *функция Бернулли* $H = P + \mathbf{v}^2/2$, определяются с точностью до постоянной. В наших рассмотрениях область течения $D \subset \mathbb{R}^3$ (или $D \subset \mathbb{R}^2$) задана, неизменна, ограничена, и, во всяком случае, кусочно гладкая. Орт *внешней* нормали к $S = \partial D$ обозначается $\mathbf{n}$.

Уравнение (1) записано *в форме Громеки — Ламба.* Эквивалентная форма уравнения Эйлера

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla P, \tag{2}$$

где через $(\mathbf{v}, \nabla)$ обозначена ковариантная производная вдоль поля $\mathbf{v}$, индуцированная стандартной римановой метрикой на $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$. В декартовых координатах, $((\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v})_i = v_j v_{i x_j}$ (где по повторяющимся индексам i, j производится суммирование, а индексы x_j обозначают частные производные по одноименным координатам). Уравнение в форме (2) получается из (1) преобразованием

$$\omega \times \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^2/2 = (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}.$$

При каждом t имеет место разбиение $S = S^+(t) \cup S^-(t) \cup S^0(t)$ (с точностью до множества $(n-1)$-мерной меры нуль), где $S^+(t) = \{x \in S : \mathbf{v}(x,t) \cdot \mathbf{n} < 0\}$ — вход потока (сквозь него жидкость втекает), $S^-(t) = \{x \in S : \mathbf{v}(x,t) \cdot \mathbf{n} > 0\}$ — выход, и $S^0(t) = \{x \in S : \mathbf{v}(x,t) \cdot \mathbf{n} = 0\}$ — непроницаемая стенка. По определению, в открытом течении вход и выход не пусты.

Если поставлено граничное условие

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \gamma(x,t), \;\; x \in S = \partial D; \quad \int\limits_S \gamma \, ds = 0, \;\; t \geqslant 0, \tag{3}$$

где γ — заданная функция, то вход и выход известны. Если $\gamma \equiv 0$ так, что $S^0 = S$ для всех t, то достаточно поставить начальное условие, и полученная начально-краевая задача будет корректна. Ей посвящена обширная литература, см. ссылки в [13].

Граничное условие (3) с $\gamma \not\equiv 0$ приводит к открытым течениям. При этом, однако, корректная постановка начально-краевой задачи для уравнений Эйлера требует дополнительного граничного условия. Выбор такого условия не прост. Вероятно, его всегда следует ставить на входе; по крайней мере, известно несколько способов сделать это. Можно, например, задать тангенциальный вихрь так, что

$$\mathbf{n} \times (\omega - \omega^{+}) = 0 \text{ на } S^{+}, \tag{4}$$

где ω^{+} — заданное векторное поле на S^{+}. Первоначально это условие предложил В. И. Юдович для плоской задачи протекания, где $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$, $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \omega\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3,$ — орты декартовой системы координат, причем орт $\mathbf{e}_3$ ортогонален плоскости течения Ox_1x_2, $\omega = v_{x_2} - u_{x_1}$ — скаляр [14]. В таком случае условие (4) принимает вид $\omega - \omega^{+} = 0$ на S^{+}, при заданной скалярной функции ω^{+}. В. И. Юдович установил, что классическое решение существует, единственно и неограниченно продолжаемо по времени при любых данных, удовлетворяющих ряду условий регулярности, включавших, помимо естественных требований гладкости, предположение о том, что вход, выход и непроницаемые стенки суть объединения компонент связности границы. Позже эти условия были ослаблены [15, 16].

А. В. Кажихов распространил граничное условие Юдовича на трехмерный случай [17], а также показал, что вместо (4) можно поставить условие

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{+}) = 0 \text{ на } S^{+}, \tag{5}$$

где $\mathbf{v}^{+}$ — заданное векторное поле на S^{+}, т. е. вместо вихря на входе можно задавать тангенциальную скорость (см. [18]). Отметим, что для двумерной задачи Кажихова неограниченная продолжаемость решения не установлена, и примеры коллапса также неизвестны. Для трехмерных задач та же проблема существует при всех типах граничных условий, включая и полностью непроницаемые стенки, и условия пространственной периодичности.

Условие Кажихова на входе (5) возникает при рассмотрении открытых течений вязкой несжимаемой жидкости в пределе исчезающей вязкости, если при ненулевой вязкости полный вектор скорости задается как на входе, так и на выходе потока [19, 20]. Такие граничные условия в первом приближении описывают подачу/забор вязкой жидкости через пористые стенки [21].

С целью описания движения материальных частиц потока жидкости, рассматриваемого в заданной области D при $t > 0$, поставим задачу Коши

$$\partial_s X = \mathbf{v}(X, s); \quad X|_{s=t} = x, \tag{6}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ — поле скорости течения. Предположим, что $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^1(\overline{D \times \{t > 0\}})$. Найдутся $\tau_1 = \tau_1(x,t) \in (0,t)$ и $\tau_2 = \tau_2(x,t) > t$ такие, что решение $X = X(s,x,t)$ определено для всех $s \in (\tau_1(x,t), \tau_2(x,t))$. Отображение X определено для произвольной векторной функции $\mathbf{v}$. Если известно, что эта функция — решение уравнений гидродинамики (1), то отображение (6) параметризует путь материальной частицы жидкости, находящейся в момент времени $t > 0$ в точке $x \in D$. Этот путь — характеристика уравнений (1).

3. Функционалы Ляпунова

Пусть $\mathrm{W} : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ — функционал на фазовом пространстве $\mathbb{Y}$ некоторой динамической системы $\mathscr{S}_t : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$, $t \geqslant 0$; пусть $x \in \mathbb{Y}$, положим $w_x(t) = \mathrm{W}(\mathscr{S}_t x)$. Существование такого функционала W, что w_x монотонна (и не постоянна) для всех x из «достаточно представительного» множества $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ — существенное проявление неконсервативности системы $\mathscr{S}_t$. Допуская некоторую вольность речи, будем называть такие W функционалами Ляпунова (классичекую теорию см. в [22]). Приведем примеры задач Кажихова и Юдовича, допускающих функционалы Ляпунова.

Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{U}$ — постоянные векторы, положим $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{U}$. Поле $\boldsymbol{V}$ — поле скорости твердотельного движения жидкости, т. е. движения без деформации. Рассмотрим задачу Кажихова (3), (5) с $\gamma = \boldsymbol{V} \cdot \mathbf{n}$ и $\mathbf{v}^+ = \boldsymbol{V}$, и пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\cdot, t)$ — ее решение. В данном случае уравнения движения удобно взять в форме (2). Непосредственно проверяется тождество

$$\frac{d}{dt} \int\limits_D (\mathbf{v} - \boldsymbol{V})^2 \, dx = - \int\limits_{S^-} \gamma \, (\mathbf{v} - \boldsymbol{V})^2 \, dS \leqslant 0.$$

Таким образом, имеем убывающий положительный функционал Ляпунова

$$\mathbf{v} \mapsto \int\limits_D (\mathbf{v} - \boldsymbol{V})^2 \, dx. \tag{7}$$

Рассмотрим плоскую задачу Юдовича. Как уже говорилось, в этом случае $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ можно отождествить со скаляром ω. Пусть γ задана произвольно, но $\omega^+ = \Omega \equiv \mathrm{const}$. Пусть $f = f(r) > 0$ при $r \neq 0$, $f(0) = 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \int\limits_D f(\omega - \Omega) \, dx = - \int\limits_{S^-} f(\omega - \Omega) \gamma \, ds \leqslant 0.$$

Тождество следует непосредственно из уравнения вихря, которое получается применением rot к (1). Следовательно, в данном случае есть целое семейство положительных невозрастающих функционалов Ляпунова

$$\omega \mapsto \int\limits_D f(\omega - \Omega) \, dx, \quad \omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}, \tag{8}$$

где функция f играет роль параметра семейства. На самом деле, функционалы Ляпунова существуют при довольно широких классах граничных условий (4) [9, 10].

Теперь рассмотрим плоскую задачу Юдовича (4), (5) в неодносвязной области. Пусть γ задана так, что вход содержит замкнутый контур c. Тогда

$$\frac{d}{dt} \oint\limits_c \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = - \int\limits_c \omega^+ \gamma \, ds, \tag{9}$$

где ω^+ и γ заданы. Тождество (9) проверяется непосредственным интегрированием уравнений (1). Таким образом, вдув завихренной жидкости генерирует, вообще говоря, линейный рост циркуляции вокруг входа, т. е. система имеет линейно растущий функционал Ляпунова

$$\mathbf{v} \mapsto \oint\limits_c \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}. \tag{10}$$

В частности, пусть ω^+, γ не зависят от времени и придают ненулевое значение правой части тождества (9). При таких данных задача Юдовича (4), (5) в неодносвязной области не имеет стационарных решений. Если при этом $\omega^+ = \Omega \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то сосуществуют возрастающий (по абсолютной величине) функционал Ляпунова (10), и убывающий положительный функционал Ляпунова (8).

4. Мотивирующий пример

Рассмотрим плоскую задачу Кажихова в полосе $D = \{(x, y),\ 0 < x < 1\}$ с условием 2ℓ-периодичности по y и с граничными условиями

$$\mathbf{v}|_{x=0} = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x|_{x=1} = 1, \tag{11}$$

где $\mathbf{e}_x$ — орт оси Ox. Таким образом, $S^+ = \{x = 0\}$, $S^+ = \{x = 1\}$, $S^0 = \varnothing$. При граничном условии (11) есть стационарное решение $\mathbf{V} = \mathbf{e}_x$, $H = \mathrm{const}$. Спектр малых возмущений этого решения определяется задачей на собственные значения для линеаризованных уравнений (1), причем линеаризация производится на стационарном решении $\mathbf{e}_x$:

$$\lambda u = -h_x, \quad \lambda v + \omega = -h_y, \tag{12}$$

$$v_x - u_y = \omega, \quad u_x + v_y = 0, \tag{13}$$

$$u|_{x=0} = v|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \tag{14}$$

где функции u, v, h неизвестны. Исключаем h из уравнений (12) и приходим к уравнению

$$\lambda\omega + \omega_x = 0.$$

Его решение $\omega = \omega^+(y)e^{-\lambda x}$, где функция ω^+ произвольна. Подставляем ω во второе уравнение в (12), полагаем $x = 0$ и, с учетом граничных условий (14), находим $\omega^+ = -h_y(0, y)$. Теперь восстановим скорость (u, v) по вихрю и дивергенции. С этой целью вводим функцию тока $\psi = \psi(x, y)$, полагая $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. Данная подстановка разрешает уравнение неразрывности (второе в (13)), а первое принимает вид

$$-\Delta\psi = \omega = -\mathrm{e}^\lambda \otimes \chi_y, \tag{15}$$

где введены обозначения: $\chi(y) = h(0, y)$, $\mathrm{e}^\lambda = e^{-\lambda x}$. Решение данного уравнения должно быть определено в полосе D, 2ℓ-периодично по y и удовлетворять краевым условиям

$$\psi_x|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=1} = 0. \tag{16}$$

Данные граничные условия эквивалентны второму и третьему граничному условию в (11), с учетом того, что функция тока определена с точностью до аддитивной постоянной. Полагаем $\psi = -\mathrm{G}(\mathrm{e}^\lambda \otimes \chi_y)$, где $\mathrm{G} : \omega \mapsto \varphi$ — оператор Грина смешанной задачи для уравнения Пуассона $-\Delta\psi = \omega$ в полосе D с условием периодичности $\varphi(x, y+2\ell) = \varphi(x, y)$ и с граничными условиями (16). Найденное выражение ψ подставляем в первое из граничных условий (14) и находим

$$\partial_y|_{x=0} G(\mathrm{e}^\lambda \otimes \chi_y) = 0.$$

Определяем оператор $\mathrm{K}(\lambda) : \chi \mapsto \partial_y|_{x=0} G(\mathrm{e}^\lambda \otimes \chi_y)$. Тогда $\chi \in \ker \mathrm{K}(\lambda)$ определяет собственную моду

$$u = \partial_y \mathrm{G}\bigl(\chi_y \otimes \mathrm{e}^\lambda\bigr), \quad v = -\partial_x \mathrm{G}\bigl(\chi_y \otimes \mathrm{e}^\lambda\bigr), \quad h(x, y) = \chi(y) - \lambda \int\limits_0^x u(y, s)\,ds.$$

Выражаем оператор $\mathrm{K}(\lambda)$ явно. Разлагаем χ в ряд Фурье и находим, что искомые решения — единичные гармоники $\mathrm{e}^{i\beta}$, $\beta \in \alpha\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, где $\alpha = \pi/\ell$, при этом $\mathrm{K}(\lambda)$ действует как мультипликаторное преобразование: $\mathrm{K}(\lambda)\mathrm{e}^{i\beta} = \kappa(\lambda, \beta)\mathrm{e}^{i\beta}$,

$$\kappa(\lambda, \beta) = \beta^2 \int\limits_0^1 g_\beta(0, \xi) e^{-\lambda\xi}\, d\xi, \quad \beta \in \alpha\mathbb{Z} \setminus \{0\},\ \alpha = \frac{\pi}{\ell},$$

где g_β — функция Грина задачи

$$-w''(y) + \beta^2 w = f(y), \quad y \in (0,1), \quad w'(0) = w(1) = 0.$$

Функция g_β имеет вид

$$g_\beta(x,\xi) = \frac{1}{|\beta| \operatorname{ch} \beta} \begin{cases} \operatorname{sh} |\beta|(1-\xi) \operatorname{ch} \beta x, & x < \xi; \\ \operatorname{sh} |\beta|(1-x) \operatorname{ch} \beta \xi, & x > \xi. \end{cases}$$

Итак, мультипликатор $\kappa(\lambda, \beta)$ имеет вид

$$\frac{|\beta| e^{-\lambda}}{\operatorname{ch} \beta} \int\limits_0^1 \operatorname{sh}(|\beta|\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau, \quad \beta \in \alpha\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \;\; \alpha = \frac{\pi}{\ell}. \tag{17}$$

Нули этих интегралов на плоскости λ — искомые собственные значения. Нетрудно видеть, что применима теорема Пойа о нулях интегралов Лапласа, и она показывает, что все нули интегралов (17) лежат в левой полуплоскости при всех $\alpha \neq 0$.

Замечание 1. Вывод о принадлежности собственных значений открытой левой полуплоскости согласуется с существованием функционала Ляпунова (7). Однако, существование функционала Ляпунова (7) само по себе влечет лишь принадлежность собственных значений *замкнутой* левой полуплоскости.

Замечание 2. Оператор $K(\lambda)$ ограничен, например, в пространстве $\widetilde{\mathrm{L}_2}$, состоящем из квадратично-суммируемых 2ℓ-периодических функций с нулевым средним.

Замечание 3. Задача Юдовича в полосе D также имеет стационарное решение $\mathbf{V} = \mathbf{e}_x$, $H = \mathrm{const}$ при граничных условиях

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x|_{x=0} = 1, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x|_{x=1} = 1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}|_{x=0} = 0.$$

Собственные моды малых колебаний в этом случае — решения спектральной задачи, состоящей из уравнений (12), (13) и граничных условий

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \omega|_{x=0} = 0.$$

Но при таких граничных условиях задача имеет только одно собственное значение: $\lambda = 0$, и ему соответствует собственная мода $u = 0$, $v = \mathrm{const}$, $h = 0$.

В дальнейшем мы сосредоточим усилия на граничном условии Кажихова и в определенной степени обобщим анализ рассмотренного выше примера на более широкие классы течений.

5. Гармонические течения

Определение 1. Поле $\boldsymbol{V}$ назовем *гармоническим* в области D, если $\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = 0$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0$ в D.

Гармонические поля, определенные в достаточно регулярной области и касательные к ее границе, образуют конечномерное линейное пространство, размерность которого равна одномерному числу Бетти данной области. Определение 1 не предполагает, что гармоническое поле касается границы области.

Любое гармоническое в D поле удовлетворяет уравнениям Эйлера (1) с $H = \mathrm{const}$.

Определение 2. Область $D \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей S назовем *кольцевой*, если верно одно из двух: или многообразие с краем $D \cup S$ гомеоморфно прямому произведению единичного отрезка на окружность, или на $D \cup S$ действует дискретная подгруппа группы сдвигов плоскости, изоморфная $\mathbb{Z}$, причем пространство ее орбит гомеоморфно прямому произведению единичного отрезка на окружность.

Определение 3. Область $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей S назовем *кольцевой*, если верно одно из двух: или многообразие с краем $D \cup S$ гомеоморфно прямому произведению единичного отрезка на двумерное замкнутое ориентируемое мноообразие, или на $D \cup S$ действует дискретная подгруппа группы сдвигов пространства $\mathbb{R}^3$, изоморфная $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}^2$, причем пространство ее орбит гомеоморфно прямому произведению единичного отрезка на 2-тор.

Например, к числу плоских кольцевых областей относятся: собственно кольцо $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$, а также зазор между прямыми; к числу трехмерных — зазоры между сферами, торами, цилиндрами и плоскостями.

Если в кольцевой области действует дискретная группа сдвигов (это может быть зазор между цилиндрами, прямыми или плоскостями), то все рассматриваемые в такой области поля по умолчанию считаются периодическими.

Пусть D — кольцевая область. Непосредственно из определений 2 и 3 следует, что $\partial D = S_1 \cup S_2$, где S_1 и S_2 — непересекающиеся связные гладкие поверхности, гомеоморфные друг другу, и любой замкнутый путь в D стягиваем к (гомологичен) некоторому пути на S_1.

Из равенства (9) следует, что задача Юдовича в плоской кольцевой области не имеет стационарных решений при граничных данных общего положения. В исключительных случаях стационарное решение все же существует, например, при нулевой завихренности, заданной на входе (и при произвольно заданной нормальной скорости). Однако, в этом случае существует бесконечно много гармонических решений. С целью снятия указанного вырождения обратимся к граничным условиям Кажихова (3), (5). При этом, по умолчанию, считаем, что на $S = \partial D$ задана нормальная скорость γ, не зависящая от времени, и такая, что $S_1 = S^+$ и $S_2 = S^-$. Предполагаем, что тангенциальная скорость $\mathbf{v}^+$ в условии (5) также не зависит от времени и задана так, что задача имеет гармоническое решение $\boldsymbol{V}$. Это решение единственно в классе гармонических полей. В самом деле, граничное условие (5) определяет, в частности, циркуляции поля вокруг всех граничных контуров, принадлежащих входу, и потому — вокруг любого замкнутого пути в D (это следует из определения кольцевой области).

Пусть $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x) \in \mathrm{C}^1(\bar{D})$ — векторное поле на области D, X — эволюционное семейство задачи Коши (6), где $\mathbf{v} = \boldsymbol{V}$.

Определение 4. Будем говорить, что векторное поле $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x) \in \mathrm{C}^1(\bar{D})$ безотрывно в $D \cup S$, если в $D \cup S$ определена положительная и ограниченная функция t^+ такая, что для любого $x \in D \cup S$

$$X\big(\max(t - t^+(x), 0), x, \max(t, t^+(x))\big) \stackrel{\text{def}}{=} a^+(x) \in S^+. \tag{18}$$

Образ точки $x \in D \cup S$ при отображении $x \mapsto a^+(x)$ назовем местом рождения материальной частицы (находящейся в момент времени в точке x).

Так как задача Коши (6) в данном случае решается для автономного ОДУ $X_s = \boldsymbol{V}(X)$,

$$a^+(x) = X\big(\max(t - t_+(x), 0), x, \max(t, t^+(x))\big) = X(0, x, t^+(x)).$$

При этом, независимо от выбора $t > t_+(x)$, отображение $s \mapsto X(s, x, t)$, $s \in (t - t^+(x), t)$, параметризует отрезок ℓ_x линии тока (т. е. траектории поля $\boldsymbol{V}$ или траектории материальной частицы соответствующего течения), соединяющий точку x со входом. Поэтому отображение $x \mapsto a^+(x)$ — не что иное, как проекция $D \to S^+$ вдоль линий тока течения $\boldsymbol{V}$.

Пример 1. Пусть $D = \{(x, y) : 0 < y < 1\}$. Выберем функцию $U \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ и определим векторное поле $\mathbf{V} : (x, y) \mapsto (U(y), 0)$. Поле $\mathbf{V}$ — стационарное решение уравнений (1). Соответствующее ему течение называют *сдвиговым*. Рассмотрим такое течение в полосе D. Пусть $U(y) > 0$ для любого $y \in \mathbb{R}$. Тогда $S^- = \{x = 0\}$, $S^+ = \{x = 1\}$, $S^0 = \varnothing$,

$$X(s, x, y, t) = \bigl(x - (t - s)U(y), y\bigr), \quad t^+(x, y) = x/U(y), \; a^+(x, y) = (0, y).$$

Если $\inf_{\mathbb{R}} U(y) > 0$, то поле $\mathbf{V}$ безотрывно, при этом $\sup t^+ = t_* = \sup_{\mathbb{R}} U^{-1}(y)$. Безотрывное поле $\mathbf{V}$ порождает течение, полностью обновляющее состав материальных частиц за интервал времени длины t_*; в частности, при $t > t_*$ поток полностью состоит из частиц, прошедших через вход.

Пусть D — кольцевая область. Рассмотрим задачу Кажихова в D и предположим, что данные в ее граничных условиях (3), (5) таковы, что она имеет гармоническое решение $\boldsymbol{V}$, причем $S_1 = S^+$ и $S_2 = S^-$. Линеаризуем задачу вблизи $\boldsymbol{V}$. Точечный спектр $\Lambda(\boldsymbol{V})$ оператора линеаризации состоит из собственных значений λ следующей краевой задачи

$$\lambda \mathbf{v} + \omega \times \boldsymbol{V} = -\nabla h; \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{19}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } S^+, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ на } S, \tag{20}$$

где h — возмущение функции Бернулли $H = P + \boldsymbol{V}^2/2$.

Определение 5. Пусть $\tilde{\mathrm{L}}_2(S^+)$ — пространство квадратично-суммируемых функций на S^+ с нулевым средним, $\mathscr{B}^+$ — пространство ограниченных операторов в $\tilde{\mathrm{L}}_2(S^+)$.

Теорема 1. *Пусть поле $\boldsymbol{V}$ в кольцевой области D гармоническое и безотрывное. Тогда найдется целая функция $\mathrm{K}_+ : \lambda \mapsto \mathrm{K}_+(\lambda) \in \mathscr{B}^+$ такая, что*

$$\Lambda(\boldsymbol{V}) = \{\lambda : \ker \mathrm{K}_+(\lambda) \neq \{0\}\},$$

причем функцию K_+ можно выразить через основное течение явно, с точностью до восстановления соленоидального поля в D по его вихрю при граничных условиях $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ на S^-, $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0$ на S^+.

Лемма 1. *В кольцевой области D рассмотрим краевую задачу*

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega, \; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } D; \; \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } S_1, \; \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } S_2, \tag{21}$$

где ω — гладкое поле такое, что $\operatorname{div} \omega = 0$ в D и $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$ на S_1. Тогда имеется ровно одно гладкое решение $\mathbf{v}$.

$\lhd$ В силу граничного условия на S_1, любое решение задачи (21) имеет нулевую циркуляцию вокруг любого лежащего на S_1 замкнутого пути. Следовательно, решение $\mathbf{u}$ однородной задачи (21) имеет нулевую циркуляцию вокруг любого замкнутого пути в D (так как D — кольцевая область), и потому потенциально, т. е. $\mathbf{u} = \nabla \phi$, где ϕ — однозначная скалярная функция. Тогда $\Delta \phi = 0$ в D, $d\phi/dn = 0$ на S_2, $\phi \equiv \mathrm{const}$ на S_1; отсюда $\phi \equiv \mathrm{const}$ и $\mathbf{u} \equiv 0$ в D. Обратимся к построению решения. Будем, не нарушая общности, считать, что S_1 лежит внутри S_2. Продолжим поле ω до поля $\tilde{\omega}$ на $\mathbb{R}^3$, полагая $\tilde{\omega} = 0$ внутри S_1 и $\tilde{\omega} = \nabla \psi$ во внешности S_2, где $\Delta \psi = 0$, $d\psi/dn = \omega \cdot \mathbf{n}$ на S_2, и

$\psi(x) = o(1)$, $|x| \to \infty$. Поле $\tilde{\omega}$ имеет тангенциальный разрыв на S_2, но остается соленоидальным на $\mathbb{R}^3$ в обобщенном смысле, и хорошо затухает на бесконечности. Положим $G_0 = (4\pi|x|)^{-1}$, $\mathbf{b} = G_0 * \tilde{\omega}$, где $*$ — знак свертки. Заметим, что $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{b} = \tilde{\omega}$ в $\mathbb{R}^3$, в частности, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{b} = \omega$ в D. Так как $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$ на S_1 и D — кольцевая область, найдется гармоническое и тангенциальное к S поле $\mathbf{h}$ такое, что $\mathbf{b}_0 = \operatorname{rot}\mathbf{b} + \mathbf{h}$ имеет нулевые циркуляции вокруг любого замкнутого пути на S_1 так, что найдется скалярная функция $\phi_0 :\ (\mathbf{b}_0 - \nabla\phi_0) \times \mathbf{n} = 0$ на S_1. Наконец, положим $\mathbf{v} = \mathbf{b}_0 + \nabla\phi$, $\Delta\phi = 0$ в D, $\phi = -\phi_0$ на S_1 и $d\phi/dn = -\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{n}$ на S_2. $\triangleright$

$\triangleleft$ Доказательство теоремы 1. Коммутатор

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}$$

векторных полей $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ выражается в виде

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\operatorname{div}\mathbf{b})\mathbf{a} + (\operatorname{div}\mathbf{a})\mathbf{b}. \tag{22}$$

Отсюда, применив rot к (19), выводим уравнение вихря

$$\lambda\omega + [\omega, \boldsymbol{V}] = 0. \tag{23}$$

Данное уравнение интегрируется вдоль характеристик, так что

$$\partial_s \left(\mathrm{e}^{\lambda s} \left(X'(s,x,t) \right)^{-1} \boldsymbol{\omega}\,(y) \right) = 0, \quad y = X(s,x,t),\ s \in (t - t^+(x), t), \tag{24}$$

где $x \in D$ и $t > t^+(x)$ произвольны, $X'(s,x,t)$ — дифференциал отображения $x \mapsto X(s,x,t)$ в точке x. Таким образом, точка x задает линию тока ℓ_x поля $\boldsymbol{V}$ (т. е. траекторию материальной частицы соответствующего течения жидкости), которая сталкивается со входом в месте рождения материальной частицы, координата которого $a^+(x)$ определена в (18). В силу (24)

$$X'(s,x,t)\boldsymbol{\omega}\,(x) = \mathrm{e}^{\lambda(s-t)}\boldsymbol{\omega}(y), \quad y = X(s,x,t),\ s \in (t - t^+(x), t),$$

а отсюда, устремив $s \to t - t^+(x)$, найдем

$$\omega(x) = \mathrm{e}^{-\lambda t^+(x)} \mathscr{X}^+(x)\omega^+(a^+(x)), \quad x \in D, \tag{25}$$

где ω^+ — след ω на S^+, и введено обозначение

$$\mathscr{X}^+(x) = X'(t^+(x), a^+(x), 0). \tag{26}$$

Итак, решение ω уравнения (23) в D определено своим следом $\boldsymbol{\omega}^+$ на S^+. Однако, построенное таким образом поле ω не обязано быть представимо в виде ротора какого бы то ни было поля в D. Чтобы такое представление имело место, достаточно равенства $\operatorname{div}\omega = 0$ и равенства нулю потоков поля ω через каждую компоненту границы S. Так как граница кольцевой области имеет ровно две компоненты, достаточно удостовериться в равенстве нулю дивергенции и одного из потоков решения $\boldsymbol{\omega}$. С этой целью проектируем уравнение (19) на касательные плоскости к входу и находим

$$\omega^+ = -\gamma^{-1}\mathbf{n} \times \nabla h, \qquad \gamma = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}. \tag{27}$$

Выбираем $\boldsymbol{\omega}^+$ в формуле (25) в соответствии с (27). Тогда $\boldsymbol{\omega}^+ \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ на S^+, и его поток через S^+ равен нулю. Заметим, что равенство $\boldsymbol{\omega}^+ \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ согласует наш выбор

$\boldsymbol{\omega}^+$ с граничным условием (20). Действительно, нормальная компонента вихря $\mathrm{rot}_n\mathbf{v}$ на S не содержит нормальных производных поля $\mathbf{v}$ и не зависит от его нормальной компоненты, а касательная компонента поля $\mathbf{v}$ на S^+ равна нулю.

Полагаем $\rho = \mathrm{div}\,\omega$. Уравнение (23) в силу тождества (22) записываем так

$$\lambda\boldsymbol{\omega} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}) + \rho\boldsymbol{V} = 0. \tag{28}$$

Взяв дивергенцию уравнения (28), находим

$$\lambda\rho + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho = 0.$$

Интегрируем это уравнение вдоль характеристик и находим, что $\rho \equiv 0$ при условии $\rho^+ \equiv 0$, где ρ^+ — след ρ на S^+. Проектируем (28) на нормаль к S^+, принимаем во внимание (27) и заключаем, что

$$\rho^+ = \gamma^{-1}\mathrm{rot}_n((\gamma^{-1}\mathbf{n}\times\nabla h)\times\boldsymbol{V})\big|_{S^+} = \gamma^{-1}\mathrm{rot}_n(\nabla h)\,|_{S^+} \equiv 0. \tag{29}$$

На самом деле тождество (29) выполняется для произвольной функции h, так как поле

$$(\gamma^{-1}\mathbf{n}\times\nabla h)\times\boldsymbol{V} - \nabla h$$

нормально к S^+ даже при произвольной h.

Пусть χ — скалярная функция на S^+ с нулевым средним и $\lambda\in\mathbb{C}$. Определим оператор

$$\mathrm{K}_+(\lambda) : \chi \mapsto \mathbf{n}\cdot(\mathrm{GL}_+(\lambda)\chi)|_{S^+}\,, \tag{30}$$

где оператор $\mathrm{L}_+(\lambda) : \chi\mapsto\omega$ определен в (25)–(27), где в (27) следует положить $h=\chi$, а через G обозначен оператор восстановления векторного поля по вихрю, описанный в лемме 1. Заметим, что образ K_+ состоит из функций с нулевым средним, так как по построению $\mathbf{n}\cdot(\mathrm{GL}_+(\lambda)\chi) = 0$ на S^- и поле $\mathrm{GL}_+(\lambda)\chi$ имеет нулевую дивергенцию. Итак, каждому ненулевому $\chi_\lambda\in\ker\mathrm{K}_+(\lambda)$ соответствует собственное поле $\mathbf{v}_\lambda = \mathrm{GL}_+\chi_\lambda$ задачи (19), (20), что и требовалось. $\triangleright$

Замечание 4. Если χ_λ изменить на постоянную, то поле $\mathbf{v}_\lambda$ не изменится. Поэтому исключение тождественных функций из области определения K_+ не приводит к потере собственных полей.

Замечание 5. Функцию χ можно интерпретировать как след возмущения h функции Бернулли или давления на входе. Эти возмущения на входе совпадают в силу граничного условия (20). Поэтому подчинение χ требованию нулевого среднего на входе согласуется с тем, что функция Бернулли, равно как и давление, определены с точностью до произвольной постоянной. В частности, нулевое среднее χ на входе, с учетом граничного условия (20), можно трактовать как сохранение среднего давления на входе при возмущении потока.

Замечание 6. Мы опускаем детальное доказательство ограниченности $\mathrm{K}(\lambda)$.

6. Течения в зазоре между цилиндрами

Пусть D — зазор между круговыми коаксиальными цилиндрами радиусов 1 и $a>1$, r, θ, z — цилиндрические координаты в D, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ — орты координатных направлений. В D рассмотрим задачу Кажихова со следующими данными:

$$\gamma|_{r=1} = -1; \quad \gamma|_{r=a} = 1/a, \tag{31}$$

так что $S^+ = \{r = 1\}$, $S^- = \{r = a\}$ и

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \Gamma \mathbf{e}_\theta)|_{S^+} = 0, \tag{32}$$

где $\Gamma \in \mathbb{R}$ — параметр, определяющий циркуляцию потока вокруг входа (она равна $2\pi\Gamma$). Вдоль оси z — условия периодичности с периодом 2ℓ. Данная задача имеет гармоническое решение

$$\boldsymbol{V} = r^{-1}(\mathbf{e}_r + \Gamma \mathbf{e}_\theta). \tag{33}$$

Нетрудно убедиться, что оно безотрывно. Рассмотрим линеаризацию возле поля (33). Введем гармоники

$$\mathrm{b}_{n\alpha} = \exp\, i(n\theta + \alpha z), \quad n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \alpha_0\mathbb{Z},\ \alpha_0 = \pi/\ell,\ n^2 + \alpha^2 \neq 0.$$

Ввиду симметрии задачи, $\mathrm{K}_+(\lambda)$ представляет собой мультипликаторное преобразование рядов Фурье, так что

$$\mathrm{K}_+(\lambda) : \mathrm{b}_{n\alpha} \mapsto \kappa_{\Gamma,a}(n, \alpha, \lambda)\mathrm{b}_{n\alpha},$$

а потому точечный спектр $\Lambda(\boldsymbol{V})$ совпадает с объединением множеств нулей всех мультипликаторов $\kappa_{\Gamma,a}(n, \alpha, \lambda,)$, $n^2 + \alpha^2 \neq 0$, на плоскости комплексной переменной λ.

Вычисляем оператор $\mathrm{L}_+(\lambda)$. Полагаем $\mathbf{v} = \mathrm{b}_{n\alpha}\widehat{\mathbf{v}}(r)$, $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{b}_{n\alpha}\widehat{\boldsymbol{\omega}}(r)$, где

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \xi \mathbf{e}_r + \eta \mathbf{e}_\theta + \zeta \mathbf{e}_z, \quad \widehat{\mathbf{v}} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta + w\mathbf{e}_z;$$

при этом граничные условия (20) примут вид

$$u(1) = v(1) = w(1) = 0; \quad u(a) = 0. \tag{34}$$

В соответствии с (27), $\boldsymbol{\omega}^+ = ib_{n\alpha}(\alpha\mathbf{e}_\theta - n\mathbf{e}_z)$, так что уравнение (23) (записанное с учетом (22)), граничные условия на S^+ и условие $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0$ примут вид

$$\lambda\xi - inr^{-2}(\eta - \Gamma\xi) - i\alpha r^{-1}\zeta = 0; \quad \xi|_{r=1} = 0; \tag{35}$$

$$\lambda\eta - i\alpha\Gamma r^{-1}\zeta + \left(r^{-1}(\eta - \Gamma\xi)\right)_r = 0; \quad \eta|_{r=1} = i\alpha; \tag{36}$$

$$\lambda\zeta + r^{-1}\zeta_r + i\beta r^{-2}\zeta = 0; \quad \zeta|_{r=1} = -in; \tag{37}$$

$$r^{-1}\left((r\xi)_r + in\eta\right) + i\alpha\zeta = 0. \tag{38}$$

С помощью (38) исключим η, ζ из (35). Получим

$$r\lambda\xi + \xi_r + r^{-1}(in\Gamma + 1)\xi = 0, \quad \xi(1) = 0.$$

Отсюда следует, что $\xi \equiv 0$. В таком случае уравнения (36), (37) и (38) зависимы, и легко интегрируются, так что

$$\zeta = -in\mathscr{E}(r); \quad \eta = i\alpha r\mathscr{E}(r); \quad \mathscr{E}(r) = \mathscr{E}(r, \lambda, n\Gamma) = r^{-in\Gamma}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda(r^2-1)}{2}}. \tag{39}$$

Вычисляем оператор $\mathrm{GL}_+(\lambda)$. Восстанавливаем скорость по найденному вихрю, с учетом граничных условий (34). Получаем

$$w(r) = \int\limits_1^r (i\alpha u - \eta)\, ds; \quad rv(r) = \int\limits_1^r (s\zeta + inu)\, ds.$$

Подставив эти выражения в условие $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ и положив

$$\phi(r)=\int\limits_1^r u(s)\,ds,$$

получим неоднородную краевую задачу для уравнения Бесселя — Макдональда:

$$r^2\phi_{rr}+r\phi_r-(n^2+\alpha^2r^2)\phi=-r^2F_{n,\alpha};\quad \phi(1)=0,\ \phi_r(a)=0,$$

$$\text{где } F_{n,\alpha}(r,\lambda,n\Gamma)=\big((n/r)^2+\alpha^2\big)\int\limits_1^r \mathscr{E}(s,\lambda,n\Gamma)\,s\,ds.$$

Теперь $\kappa_{n,\alpha}(\lambda,\Gamma,a)=u(1)=\phi_r(1)$. Более явно,

$$\kappa_{n,\alpha}(\lambda,\Gamma,a)=K^{-1}_{\alpha,n,a}(1)\int\limits_1^a K_{\alpha,n,a}(s)F_{n,\alpha}(s,\lambda,n\Gamma)\,s\,ds, \tag{40}$$

где $K_{\alpha,n,a}$ — решение задачи Коши

$$r^2K_{rr}+rK_r-(n^2+r^2\alpha^2)K=0;\quad K(a)=1;\ K_r(a)=0. \tag{41}$$

Введем обозначение

$$\beta=n\Gamma. \tag{42}$$

Запишем мультипликатор (40) в форме интеграла Лапласа:

$$\kappa_{n,\alpha}(\lambda,\beta,a)=-K^{-1}_{\alpha,n,a}(1)\int\limits_1^a r^{-i\beta}\mathrm{e}^{-\lambda(r^2-1)/2}K'_{\alpha,n,a}(r)r^2dr, \tag{43}$$

где $'$ обозначает производную по r. Преобразование (40) в (43) сводится к интегрированию правой части (40) «по частям» с учетом уравнения и данных задачи Коши (41).

Обозначим через $\Lambda_{n,\alpha,\beta,a}$ множество нулей интегралов Лапласа (43) на плоскости комплексного параметра λ. Из сказанного выше вытекает

Лемма 2. *Пусть* $a>1$, $D=\{(r,\theta,z):\ 1<r<a\}$, $\Lambda_{\Gamma,a}$ *— точечный спектр задачи* (19)–(20) *в* D, *где* $\boldsymbol{V}$ *— поле* (33). *Тогда*

$$\Lambda_{\Gamma,a}=\bigcup_{\substack{\alpha\in\alpha_0\mathbb{Z},\ \beta=n\Gamma,\\ n\in\mathbb{Z},\ n^2+\alpha^2\neq0}}\Lambda_{n,\alpha,\beta,a}.$$

В силу леммы 2, *вопрос о расположении спектра поля* (33) *относительно мнимой оси сводится к проблеме Рауса — Гурвица для интегралов Лапласа* (43).

Лемма 3.

$$\Lambda_{n,\alpha,0,a}\subset\{\lambda:\ \operatorname{Re}\lambda<0\}\quad(\forall\, n\in\mathbb{Z},\ \alpha\in\mathbb{R}).$$

$\lhd$ Доказательство состоит в применении теоремы Пойа о нулях интегралов Лапласа (см. [12]) к интегралам вида

$$\int\limits_1^a \mathrm{e}^{-\lambda(r^2-1)/2}\,(-rK_r)\,r\,dr,\quad K=K_{\alpha,n,a}.$$

С целью сделать это, убедимся, что для любого $r \in (1, a)$

$$\text{(i) } K_r(r) < 0; \qquad \text{(ii) } (rK_r(r))_r > 0.$$

В силу задачи Коши (41),

$$\int\limits_s^a (\alpha^2 r + n^2/r) K^2 dr = -K(s)K_r(s) - \int\limits_s^a K_r^2 r\, dr \quad (\forall\, s:\ 1 \leqslant s < a).$$

Следовательно, $K(s)K_r(s) \neq 0$ при $s \in [1, a)$. Отсюда следуют утверждения (i)–(ii), с учетом уравнения и начальных условий задачи Коши (41). $\rhd$

Непосредственно из лемм 2 и 3 следует теорема 2.

Теорема 2. *Пусть в условиях леммы* 2 $\Lambda_{\Gamma,a} \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} \neq \varnothing$. *Тогда* $\beta = n\Gamma \neq 0$.

Таким образом, теорема 2 утверждает, во-первых, что потенциальное течение ($\Gamma = 0$, поток радиален) не имеет ни нейтральных, ни неустойчивых мод вида $\widehat{\mathbf{v}}\,(r)\mathrm{e}^{(t\lambda + i(\alpha z + \theta n))}$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $\alpha^2 + n^2 \neq 0$, и, во-вторых, вращательно-симметричные моды ($n = 0$) не могут быть ни нейтральными, ни неустойчивыми.

Утверждение теоремы 2 верно и в том случае, если в основном течении источник заменить на сток, т. е. положить

$$\boldsymbol{V} = r^{-1}(-\mathbf{e}_r + \Gamma \mathbf{e}_\theta).$$

В таком случае вход и выход потока меняются местами: $S^- = \{r = 1\}$ и $S^+ = \{r = a\}$. Соответствующая линеаризованная задача будет состоять из уравнения (19) и граничных условий

$$u(a) = v(a) = w(a) = 0; \quad u(1) = 0.$$

Если $\lambda \in \Lambda_{n,\alpha,\beta,a}$, то малое возмущение давления на входе имеет вид $\exp(\lambda t + in\theta + i\alpha z)$ (это вытекает из сказанного на стр. 41). Однако, течение (33) в зазоре между цилиндрами допускает малые возмущения, сохраняющие давление на входе. Такие возмущения обращаются в нуль за конечное время. В самом деле, линеаризуем уравнение Эйлера на потоке (33) и будем разыскивать малые возмущения, представимые в виде $\mathbf{v} = v(r,t)\mathbf{e}_\theta + w(r,t)\mathbf{e}_z$, $p = p(r,t)$ (p — возмущение давления). Придем к системе

$$\tfrac{2\Gamma v}{r^2} = p_r, \quad (rv)_t + \tfrac{(rv)_r}{r} = 0, \quad w_t + \tfrac{w_r}{r} = 0, \quad t > 0,\ r \in (1, a), \tag{44}$$

$$v|_{r=1} = 0, \quad w|_{r=1} = 0, \quad p|_{r=1} = 0, \tag{45}$$

где основное течение — источник. В случае стока граничные условия нужно перенести в точку a. Граничное условие для p вытекает из сохранения среднего давления на входе. В любом случае система (44)–(45) интегрируется явно и любое ее решение обращается в нуль для всех $r \in (1, a)$ при любом $t > (a^2 - 1)/2$. Отсюда, в частности, следует неполнота системы спектральных проекторов, соответствующих дискретному спектру $\Lambda_{a,\Gamma}$.

7. Течения в зазоре между сферами

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений Эйлера (1) в сферическом слое $D = \{1 < |x| < a\}$, $a > 1$, с граничными условиями Кажихова (3), (5), где $\gamma = \mp 1$ при $r = 1$ и $\gamma = \pm a^{-2}$ при $r = a$, и $\mathbf{v}^+ = 0$. Данная задача вращательно-инвариантна, и при каждом выборе знаков имеем вращательно-инвариантные решения

$$\mathbf{V} = \pm\mathbf{e}_r/r^2, \quad H = 0. \tag{46}$$

Если в (46) выбран знак «+», то $S^+ = \{x \in S : r = 1\}$, иначе $S^+ = \{x \in S : r = a\}$.

Пусть S^+ — сфера меньшего радиуса. Вычисляем оператор $\mathrm{L}_+(\lambda)$. С этой целью переходим к сферическим координатам

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta,$$

и пусть $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ — соответствующие орты. Полагаем

$$\boldsymbol{\omega} = \xi\mathbf{e_r} + \eta\mathbf{e}_\theta + \zeta\mathbf{e}_\phi$$

и приходим к задаче Коши

$$\lambda\xi - \frac{1}{r^3\sin\theta}\big\{(\eta\sin\theta)_\theta + \zeta_\phi\big\} = 0, \quad \xi|_{S^+} = 0, \tag{47}$$

$$\lambda\eta + \frac{1}{r^3}\{r\eta_r - \eta\} = 0, \quad \eta|_{S^+} = \frac{\chi_\phi}{\sin\theta}, \tag{48}$$

$$\lambda\zeta + \frac{1}{r^3}\{r\zeta_r - \zeta\} = 0, \quad \zeta|_{S^+} = -\chi_\theta. \tag{49}$$

Решив задачу (47)–(49), с учетом граничных условий, найдем

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{\mathscr{E}(\lambda, r)\chi_\phi}{\sin\theta}, \quad \zeta = -\mathscr{E}(\lambda, r)\chi_\theta, \quad \mathscr{E}(\lambda, r) = re^{-\frac{\lambda(r^3-1)}{3}}. \tag{50}$$

Вычисляем оператор $\mathrm{GL}_+(\lambda)$. Имеем

$$(w\sin\theta)_\theta = v_\phi, \quad \frac{u_\phi}{\sin\theta} - (rw)_r = \frac{r\mathscr{E}\chi_\phi}{\sin\theta}, \quad (rv)_r - u_\theta = -r\mathscr{E}\chi_\theta. \tag{51}$$

Интегрируем второе равенство в (51) с учетом граничных условий. Находим

$$w = \tfrac{\Phi_\phi - \mathscr{E}_1\chi_\phi}{r\sin\theta}, \quad v = \tfrac{1}{r}(\Phi_\theta - \mathscr{E}_1\chi_\theta), \tag{52}$$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \int_1^r u\, dr, \quad \mathscr{E}_1(\lambda, r) = \int_1^r \mathscr{E}(\lambda, s)s\, ds. \tag{53}$$

Заметим, что первое уравнение в (51) следует из выражений (52). Подставляем эти выражения в уравнение $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и находим

$$\Delta\Phi + \mathscr{E}_1(\lambda, r)r^{-2}\Delta_+\chi = 0, \tag{54}$$

где $\Delta_+ f = -\frac{1}{\sin\theta}(f_\theta\sin\theta)_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}f_{\phi\phi}$ — оператор Бельтрами на сфере. Полагаем $\chi = \mathrm{b}_m$, $\Phi = \widehat{\Phi}(r)\mathrm{b}_m$, где b_m — собственная функция оператора Бельтрами, соответствующая собственному значению $\mu_m = m(m+1)$, $m \in \mathbb{N}$, и приходим к краевой задаче

$$\left(r^2\widehat{\Phi}'_m\right)' - \mu_m\,(\widehat{\Phi}_m - \mathscr{E}_1(\lambda, r)) = 0, \tag{55}$$

$$\widehat{\Phi}'_m(1) = 0, \quad \widehat{\Phi}_m(1) = 0, \quad \widehat{\Phi}'_m(a) = 0. \tag{56}$$

Итак,

$$\mathrm{K}_+(\lambda)\mathrm{b}_m = u|_{r=1} = \widehat{\Phi}'_m(1)\mathrm{b}_m \quad (\forall\, b_m \in \mathrm{H}_m),$$

где H_m — собственное подпространство оператора Бельтрами на сфере, соответствующее собственному числу $\mu_m = m(m+1)$, $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, мультипликатором служит $\kappa_m(\lambda, a) = \widehat{\Phi}'_m(1)$, где $\widehat{\Phi}_m$ — решение задачи (55)–(56). Записываем это решение с помощью функции Грина и находим

$$\kappa_m(\lambda, a) = \frac{\mu_m}{K_{m,a}(1)} \int_1^a K_{m,a}(r)\mathscr{E}_1(\lambda, r)\, dr, \tag{57}$$

где $K_{m,a}$ — решение однородного уравнения (55), удовлетворяющее условиям $K_{m,a}(a) = 1$, $K'_{m,a}(a) = 0$. Выражаем $\mu_m K_{m,a}$ из указанного уравнения, интегрируем по частям и получаем интеграл

$$\kappa_m(\lambda, a) = -\frac{1}{K_{m,a}(1)} \int_1^a K'_{m,a}(r)\mathscr{E}(\lambda, r) r^3 dr = 0. \tag{58}$$

Данный интеграл приводим к интегралу Лапласа, к которому применяем теорему Пойа, и устанавливаем, что все его нули — в открытой левой полуплоскости. Точно также разбираем случай, когда вход потока расположен на сфере радиуса a.

Подведем итог.

Теорема 3. *Пусть* $D = \{x : 1 < |x| < a\} \subset \mathbb{R}^3$ *и* Λ_a *— точечный спектр задачи* (19)–(20) *в* D, *где* $\mathbf{V} = \pm|x|^{-3}x$. *Тогда* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ *для любых* $\lambda \in \Lambda_a$ *и* $a \in (1, \infty)$.

Литература

1. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.—М.: Мир., 1983.—301 с.
2. *Арнольд В. И. и др.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.—1986.—Т. 5.—С. 5–218.
3. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1984.—192 с.
4. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // Прикл. матем. и мех.—1971.—Т. 35, №. 4.—С. 638–655.
5. *Haragus M., Iooss G.* Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems.—London: Springer, 2010. DOI: 10.1007/978-0-85729-112-7.
6. *Дикий Л. А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы.—Гидрометеоиздат, 1976.
7. *Shvydkoy R., Latushkin Y.* Operator algebras and the Fredholm spectrum of advective equations of linear hydrodynamics // J. Func. Anal.—2009.—Vol. 257, № 10.—P. 3309–3328. DOI: 10.1016/j.jfa.2009.06.006.
8. *Arnold V.* Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits // Annales de l'institut Fourier.—1966.—Vol. 16, № 1.—P. 319–361. DOI: 10.5802/aif.233.
9. *Morgulis A. B., Yudovich V. I.* Arnold's method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.—2002.—Vol. 12, № 2.—P. 356–371. DOI: 10.1063/1.1480443.
10. *Моргулис А. Б.* Вариационные принципы и устойчивость открытых течений идеальной несжимаемой жидкости // Сиб. электр. мат. изв.—2017.—Т. 14.—С. 218-251.
11. *Островский И. В.* Исследования М. Г. Крейна по теории целых и мероморфных функций и их дальнейшее развитие // Укр. мат. журн.—1994.—Т. 46, № 1–2.—С. 87–99.
12. *Седлецкий А. М.* О нулях преобразований Лапласа // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, № 6.—С. 883–892.
13. *Chemin J. Y.* Fluides Parfaits Incompressibles.—Paris, 1995.—Ser. Astérisque. Vol. 230
14. *Юдович В. И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Мат. сб.—1964.—Т. 64 (106), № 4.—С. 562–588.
15. *Алексеев Г. В.* О разрешимости неоднородной краевой задачи для двумерных нестационарных уравнений динамики идеальной жидкости // Динамика сплошной среды.—1976.—Т. 24.—С. 15–35.

16. *Bardos C.* Existence et unicite de la solution de l'equation d'Euler en dimension deux // J. Math. Anal. Appl.—1972.—Vol. 40, № 3.—P. 769–790.
17. *Кажихов А. В.* Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости // Прикл. матем. и мех.—1980.—Т. 44, вып. 5.—С. 947–949.
18. *Антонцев С., Кажихов А., Монахов В.* Краевые задачи механики неоднородной жидкости.—Новосибирск: Наука, 1983.—320 с.
19. *Temam R., Wang X.* Boundary layers associated with incompressible Navier–Stokes equations: the non-characteristic boundary case // J. Differential Equations.—2002.—Vol. 179, № 2.—P. 647–686. DOI: 10.1006/jdeq.2001.4038.
20. *Ilin K.* Viscous boundary layers in flows through a domain with permeable boundary // European J. of Mechanics-B/Fluids.—2008.—Vol. 27, № 5.—P. 514–538. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2007.10.003.
21. *Beavers G. S., Joseph D. D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. of Fluid Mech.—1967.—Vol. 30, № 1.—P. 197–207. DOI: 10.1017/S0022112067001375.
22. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения.—М.: Наука, 1990.—176 с.

Статья поступила 6 мая 2019 г.

Ильин Константин Иванович
Йоркский университет, *лектор*
Великобритания, Хеслингтон, Йорк YO10 5DD
E-mail: `konstantin.ilin@york.ac.uk`
https://orcid.org/0000-0003-2770-3489;

Моргулис Андрей Борисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела диф. уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета,
профессор кафедры вычислительной математики и мат. физики
РОССИЯ, 344099, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `morgulisandrey@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-8575-4917;

Черныш Алексей Сергеевич
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета,
аспирант кафедры вычислительной математики и мат. физики
РОССИЯ, 344099, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `aleksei.0.chernysh@gmail.com`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 3, P. 31–49

OPERATOR-VALUED LAPLACE'S INTEGRALS AND STABILITY OF THE OPEN FLOWS OF INVISCID INCOMPRESSIBLE FLUID

Ilin, K. I.[1], Morgulis, A. B.[2,3] and Chernish, A. S.[3]
[1] The University of York, Heslington, York YO10 5DD, UK;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[3] I. I. Vorovich Institute of Mathematics,
Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia
E-mail: `konstantin.ilin@york.ac.uk`, `morgulisandrey@gmail.com`,
`aleksei.0.chernysh@gmail.com`

Abstract. We study the spectra of boundary value problems arising upon the linearization of the Euler equations of an ideal incompressible fluid near stationary solutions, describing the flows in which the fluid is entering the flow region and leaving it through some parts of the boundary. It is natural to refer to such flows as the open ones. The spectra of open flows have been explored in less details than in the case of completely impermeable boundaries or conditions of periodicity. In this paper, we discover a class of open flows the spectra of which consists of 'zeros' of an entire operator-valued function represented by kind of Laplace's integral. The localizing of the spectra of such flows reduces, therefore, to an operator-valued Routh–Hurwitz's problem for this integral. In a number of interesting special cases, this operator function can be expressed as a multiplier transformation of Fourier series, and then the above Routh–Hurwitz's problem turns to be scalar, and moreover, it can be solved with the help of Polias' theorem on zeros of the Laplace integrals. On this base, we proved the localization of the spectra inside the open left complex half-plane for a number of specific flows for which such proofs have not been known earlier.

Key words: Euler equations, inviscid incompressible fluid, stability, spectra, entire functions, Routh-Gurwitz's problem.

Mathematical Subject Classification (2010): 76B47, 76E09, 30D20.

For citation: Ilin, K. I., Morgulis, A. B. and Chernish, A. S. Operator-Valued Laplace's Integrals and Stability of the Open Flows of Inviscid Incompressible Fluid, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 31–49 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36460.

References

1. *Iooss, G. and Joseph, D. D. Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer Science & Business Media, 2012.
2. *Arnold, V. I. et al. Dynamical Systems V: Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*, Springer Science & Business Media, 2013, vol. 5.
3. *Yudovich, V. I. The Linearization Method in Hydrodynamical Stability Theory*, Transl. of Math. Monogr., vol. 74, American Math. Soc., Providence, RI, 1989, iv+170 pp.
4. *Yudovich, V. I.* The Onset of Auto-Oscillations in a Fluid, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1971, vol. 35, no. 4, pp. 587–603.
5. *Haragus, M. and Iooss, G. Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, London, Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-0-85729-112-7.
6. *Dikiy, L. A. Hydrodynamic Stability and Atmosphere Dynamics*, Gidrometeoizdat, Leningrad, 1976 (in Russian).
7. *Shvydkoy, R. and Latushkin, Y.* Operator Algebras and the Fredholm Spectrum of Advective Equations of Linear Hydrodynamics, *Journal of Functional Analysis*, 2009, vol. 257, no. 10, pp. 3309–3328.
8. *Arnold, V.* Sur la Geometrie Differentielle des Groupes de Lie de Dimension Infinie et ses Applications a l'Hydrodynamique des Fluides Parfaits, *Annales de l'institut Fourier*, 1966, vol. 16, no. 1, pp. 319–361. DOI: 10.5802/aif.233.
9. *Morgulis, A. B. and Yudovich, V. I.* Arnold's Method for Asymptotic Stability of Steady Inviscid Incompressible Flow Through a Fixed Domain with Permeable Boundary, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2002, vol. 12, no. 2, pp. 356–371. DOI: 10.1063/1.1480443.
10. *Morgulis, A. B.* Variational Principles and Stability of the Inviscid Open Flows, *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2017, vol. 14, pp. 218–251 (in Russian).
11. *Ostrovskii, I. V.* M. G. Krein's Investigations in the Theory of Entire and Meromorphic Functions and their Further Development, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1994, vol. 46, no. 1–2, pp. 87–100. DOI: 10.1007/BF01057003.
12. *Sedletskii, A. M.* On the Zeros of Laplace Transforms, *Mathematical Notes*, 2004, vol. 76, no. 5–6, pp. 824–833. DOI: 10.1023/B:MATN.0000049682.65990.e7.
13. *Chemin, J. Y. Fluides Parfaits Incompressibles*, Paris, 1995. Ser. Astérisque, vol. 230.
14. *Yudovich, V. I.* A Two-Dimensional Non-Stationary Problem on the Flow of an Ideal Incompressible Fluid Through a Given Region, *Matematicheskii sbornik* (N.S.) [Sbornik: Mathematics], 1964, vol. 64, no. 106, pp. 562–588 (in Russian).
15. *Alekseev, G. V.* On Solvability of the Nonhomogeneous Boundary Value Problem for Two-Dimensional Nonsteady Equations of Ideal Fluid Dynamics, *Dinamika Sploshnoy Sredy*, 1976, vol. 24, pp. 15–35 (in Russian).
16. *Bardos, C.* Existence et Unicite de la Solution de l'Equation d'Euler en Dimension Deux, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1972, vol. 40, no. 3, pp. 769–790.
17. *Kazhikhov, A. V.* Note on the Formulation of the Problem of Flow Through a Bounded Region Using Equations of Perfect Fluid, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1980, vol. 44, no. 5, pp. 672–674.

18. *Antontsev, S. N., Kazhikhov, A. V. and Monakhov, V. N. Boundary-Value Problems in the Mechanics of Nonuniform Fluids*, Amsterdam, Studies in Mathematics and its Applications, 1990.
19. *Temam, R. and Wang, X.* Boundary Layers Associated with Incompressible Navier–Stokes Equations: the Noncharacteristic Boundary Case, *Journal of Differential Equations*, 2002, vol. 179, no. 2, pp. 647–686. DOI: 10.1006/jdeq.2001.4038.
20. *Ilin, K.* Viscous Boundary Layers in Flows Through a Domain with Permeable Boundary, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 2008, vol. 27, no. 5, pp. 514–538. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2007.10.003.
21. *Beavers, G. S. and Joseph, D. D.* Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall, *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 30, no 1, pp. 197–207. DOI: 10.1017/S0022112067001375.
22. *Chetaev N. G. The Stability of Motion*, Pergamon Press, 1961.

Received 6 May, 2019

Konstantin Ilin
The University of York,
Heslington, York YO10 5DD, United Kingdom,
Lecturer
E-mail: `konstantin.ilin@york.ac.uk`
https://orcid.org/0000-0003-2770-3489

Andrey Morgulis
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher at the Division of Differential Equation;
I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia,
Professor
E-mail: `morgulisandrey@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-8575-4917

Alexey Chernish
I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia,
Ph.D. Student
E-mail: `aleksei.0.chernysh@gmail.com`