Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 3, С. 50–61

УДК 517.9
DOI 10.23671/VNC.2019.3.36461

О МАТРИЧНОМ ОПЕРАТОРЕ РИМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

А. Э. Пасенчук[1], **В. В. Серегина**[2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105;
[2] Азово-черноморский инженерный институт,
Россия, 347740, Зерноград, ул. Ленина, 21
E-mail: pasenchuk@mail.ru, vic.victora@yandex.ru

Аннотация. В пространстве гладких на единичной окружности вектор-функций рассматривается матричный оператор линейного сопряжения, порождаемый краевой задачей Римана. Предполагается, что коэффициенты краевой задачи являются гладкими матрицами-функциями. Вводится и изучается понятие гладкой вырожденной факторизации типов «плюс» и «минус» гладкой матрицы-функции. В терминах вырожденных факторизаций даются необходимые и достаточные условия нетеровости рассматриваемого матричного оператора Римана в пространстве гладких вектор-функций. Для гладкой на окружности функции, имеющей не более чем конечное число нулей конечных порядков, вводится и изучается понятие сингулярного индекса, обобщающее понятие индекса невырожденной непрерывной функции. Для нетерового матричного оператора Римана получена формула для вычисления индекса этого оператора, совпадающая с общеизвестной аналогичной формулой в случае, когда коэффициенты оператора Римана невырождены.

Ключевые слова: оператор, Риман, нетеровость, гладкий, индекс, формула.

Mathematical Subject Classification (2010): 47B35.

Образец цитирования: *Пасенчук А. Э., Серегина В. В.* О матричном операторе Римана в пространстве гладких вектор-функций // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 50–61. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36461.

1. Введение

Будем пользоваться стандартными обозначениями $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ для множеств натуральных, целых, вещественных, комплексных чисел соответственно. Положим также

$$\mathbb{Z}_+ = \{j \in \mathbb{Z} : j \geqslant 0\}, \quad \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}_+, \quad \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$D^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad D^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, будем рассматривать декартову степень $\mathbb{C}^n$ как банахово пространство относительно покоординатных линейных операций и евклидовой нормы. Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная банахова алгебра. Через $M_n(\mathfrak{A})$ обозначим банахову алгебру матриц порядка n со стандартными операциями и некоторой матричной нормой. В частности, рассматривая $M_n(\mathbb{C})$, будем считать, что введена операторная норма.

Для банахова пространства B введем следующие линейные многообразия B-значных функций, определенных на Γ:

$$C^m(\Gamma, B) = \left\{ A(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \xi^j,\ a_j \in B : \sum_{j\in\mathbb{Z}} (|j|+1)^m \|a_j\| < \infty,\ \xi \in \Gamma \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+;$$

$$C^\infty(\Gamma, B) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+} C^m(\Gamma, B),$$

считая, что в этих множествах линейные операции определены поточечно. Хорошо известно, что $C^\infty(\Gamma, B)$ является счетно-нормированным пространством с определяющей системой полунорм

$$\|A(\xi)\|_m = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (|j|+1)^m \|a_j\|, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Введем в пространстве $C^\infty(\Gamma, B)$ операторы проектирования

$$P^\pm :\ P^\pm\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \xi^j\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\pm} a_j \xi^j$$

и положим

$$C_+^\infty(\Gamma, B) = P^+(C^\infty(\Gamma, B)), \quad \widetilde{C}_-^\infty(\Gamma, B) = P^-(C^\infty(\Gamma, B)), \quad C_-^\infty(\Gamma, B) = B \oplus \widetilde{C}_-^\infty(\Gamma, B).$$

В этой работе рассматривается оператор линейного сопряжения

$$R_{A,B} :\ C^\infty(\Gamma, C^n) \to C^\infty(\Gamma, C^n),\ R_{A,B} = A(\xi)P^+ + B(\xi)P^-,$$

в предположении, что $A(\xi), B(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(C))$. Уравнение $R_{A,B}\varphi = f$ принято называть задачей Римана в связи с тем, что впервые уравнение такого рода было приведено Б. Риманом (см. [1]). Задаче Римана и оператору $R_{A,B}$ посвящено большое число работ (см. [1–9, 12] и цитируемые там работы). Наиболее полные результаты относительно задачи Римана и соответствующего оператора были получены в банаховых пространствах гёльдеровых и суммируемых вектор-функций. В этих случаях для широкого класса коэффициентов $A(\xi)$, $B(\xi)$ была построена полная теория Нётера. Именно, показано, что необходимым и достаточным условием нётеровости оператора $R_{A,B}$ является невырожденность коэффициентов для всех $\xi \in \Gamma$. В терминах правой канонической факторизации матрицы-функции $A(\xi)B^{-1}(\xi)$ эффективно описаны ядро, коядро оператора $R_{A,B}$, построен обобщенный обратный оператор, найдена формула для индекса

$$\operatorname{ind} R_{A,B} = -\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma} \det A(\xi) + \operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma} \det B(\xi).$$

В пространстве гладких вектор-функций $C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ оператор Римана также рассматривался (см. [7, 10, 11] и цитируемые там работы). В результате был получен критерий нётеровости этого оператора. Оказалось, что нётеровы в пространствах гладких вектор-функций операторы Римана могут иметь коэффициенты с вырождениями на Γ специального типа. Точнее, оператор $R_{A,B}$ нётеров в пространстве $C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ тогда и только тогда, когда каждая из функций $\det A(\xi)$, $\det B(\xi)$ имеет на Γ разве лишь конечное число нулей конечных порядков. Однако удобной формулы для подсчета индекса, аналогичной приведенной выше, найдено не было. В предлагаемой работе получена такая формула для индекса оператора $R_{A,B} : C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$.

2. Вспомогательные результаты

Некоторые из приводимых ниже результатов известны или могут быть легко получены так же, как и в случаях пространств гёльдеровых или суммируемых вектор-функций. В связи с этим ниже мы приводим лишь доказательства нестандартных утверждений.

Вместе с оператором $R_{A,B}$ будем рассматривать пару операторов Тёплица

$$T_A^+ : \ C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n), \ T_A^+ = P^+ A(\xi) I,$$
$$T_B^- : \ C_-^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to C_-^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n), \ T_B^- = P^- B(\xi) I.$$

Лемма 1. *Пусть $A(\xi), B(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. Оператор $R_{A,B}$ нётеров тогда и только тогда, когда нетеров каждый из операторов T_A^+ и T_B^-. При выполнении этих условий*

$$\operatorname{ind} R_{A,B} = \operatorname{ind} T_A^+ + \operatorname{ind} T_B^-.$$

$\lhd$ Утверждение леммы является следствием того факта, что каждый из операторов $P^- A(\xi) P^+$, $P^+ B(\xi) P^-$ компактен в пространстве $C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ (см., например [7]), а оператор $P^+ A(\xi) P^+ + P^- B(\xi) P^-$ есть прямая сумма операторов T_A^+, T_B^-. $\rhd$

Следующее утверждение носит, по-существу, алгебраический характер. Мы формулируем его для оператора Теплица с гладким матричным символом, рассматриваемого в одном из пространств $C_\pm^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$.

Теорема 1. *Пусть $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. Оператор $T_A^\pm$ нётеров тогда и только тогда, когда в пространстве $C_\pm^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ нётеров оператор $\mathrm{T}_{\det A}^\pm$.*

$\lhd$ Рассмотрим квадратную матрицу порядка n, составленную из линейных ограниченных операторов, действующих в некотором топологическом пространстве. Будем считать, что элементы этой операторной матрицы коммутируют с точностью до компактных слагаемых. Тогда с точностью до компактных слагаемых для этой матрицы определены алгебраические дополнения, определитель, присоединенная матрица. Для операторной матрицы U через U^∇ обозначим определенную с точностью до компактного слагаемого присоединенную матрицу. Условимся писать $A = B (\operatorname{mod} K)$, если оператор $A - B$ компактен. Нетрудно видеть, что

$$(I+k)^\nabla = I (\operatorname{mod} K), \quad U^\nabla U = U U^\nabla = E_n \det U (\operatorname{mod} K),$$

где k — компактный оператор, а E_n — единичная матрица порядка n. Отметим также, что если элементы операторных матриц U, V попарно коммутируют по модулю компактных операторов, то $(UV)^\nabla = V^\nabla U^\nabla (\operatorname{mod} K)$.

Будем рассматривать оператор T_A^+ как операторную матрицу, элементами которой являются одномерные операторы Теплица с гладкими символами. Поскольку такие операторы коммутируют с точностью до компактного оператора, то ввиду сделанных замечаний имеем

$$(T_A^+)^\nabla T_A^+ = T_A^+ (T_A^+)^\nabla = E_n \mathrm{T}_{\det A(\xi)}^+ (\operatorname{mod} K).$$

Если предположить теперь, что оператор $\mathrm{T}_{\det A(\xi)}^+$ нётеров, а R — его регуляризатор, то, очевидно, операторы $(R E_n)(T_A^+)^\nabla$, $(T_A^+)^\nabla (R E_n)$ являются левым, правым регуляризаторами, соответственно, оператора T_A^+. Обратно, если оператор T_A^+ нетеров и Ω его регуляризатор, то $\Omega T_A^+ = T_A^+ \Omega = I (\operatorname{mod} K)$. Нетрудно убедиться в том, что элементы операторной матрицы Ω с точностью до компактного оператора попарно коммутируют и коммутируют в том же смысле с элементами T_A^+. Но, тогда в силу сделанных замечаний

$$(\Omega T_A^+)^\nabla = (T_A^+\Omega)^\nabla = I(\mathrm{mod}\, K) \quad \text{или} \quad (T_A^+)^\nabla\Omega^\nabla = \Omega^\nabla(T_A^+)^\nabla = I(\mathrm{mod}\, K).$$

Последнее означает, что оператор $(T_A^+)^\nabla$ нётеров и регуляризатором для него является оператор Ω^∇. Ввиду справедливости равенства $(T_A^+)^\nabla T_A^+ = T_A^+(T_A^+)^\nabla = E_n \mathrm{T}^+_{\det A(\xi)}(\mathrm{mod}\, K)$ оператор $E_n\mathrm{T}^+_{\det A(\xi)}$ является нетеровым как композиция нетеровых операторов. Последнее эквивалентно нётеровости оператора $T^\pm_{\det A}$. $\triangleright$

Определение 1. Будем говорить, что матрица-функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ допускает гладкую правую (левую) вырожденную факторизацию типа минус, если

$$A(\xi) = A^-(\xi)D(\xi)A^+(\xi) \quad (A(\xi) = A^+(\xi)D(\xi)A^-(\xi)),$$

где

1) $A^+(\xi) \in GC^\infty_+(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$;

2) $A^-(\xi) \in C^\infty_-(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, для любого $\xi_0 \in D^-$ матрица $A^-(\xi_0)$ обратима, и если $(A^-(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j\xi^{-j}, \xi \to \infty$, то найдутся $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ так, что $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$;

3) $D(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi^{\kappa_j}P_j$, причем $P_j = \mathrm{diag}(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, $\kappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1,2,\dots,n$.

Числа $\kappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1,2,\dots,n$, называются частными индексами соответствующей факторизации.

Тот факт, что матрица-функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ допускает гладкую правую вырожденную факторизацию типа минус будем обозначать $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^-(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$, $\bar\kappa = (\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_n)$. Число $\kappa_r^-(A) = \sum_{j=1}^n \kappa_j$ называть суммарным индексом правой вырожденной факторизации типа минус. Обозначения $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_l^-(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$, $\kappa_l^-(A)$ будем применять в случае гладкой левой вырожденной факторизации типа минус.

Определение 2. Будем говорить, что матрица-функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ допускает гладкую правую (левую) вырожденную факторизацию типа плюс, если

$$A(\xi) = A^-(\xi)D(\xi)A^+(\xi) \quad (A(\xi) = A^+(\xi)D(\xi)A^-(\xi)),$$

где

1) $A^-(\xi) \in GC^\infty_-(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$;

2) $A^+(\xi) \in C^\infty_+(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, для любого $\xi_0 \in D^+$ матрица $A^+(\xi_0)$ обратима, и если $(A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j\xi^{j}, \xi \to 0$, то найдутся $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ так, что $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$;

3) $D(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi^{\kappa_j}P_j$, причем $P_j = \mathrm{diag}(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, $\kappa_j \in \mathbb{Z}, j = 1,2,\dots,n$.

Числа $\kappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1,2,\dots,n$, называются частными индексами соответствующей факторизации.

Тот факт, что матрица-функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ допускает гладкую правую вырожденную факторизацию типа плюс будем записывать следующим образом: $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^+(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$, $\bar\kappa = (\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_n)$. Число $\kappa_r^+(A) = \sum_{j=1}^n \kappa_j$ называется суммарным индексом правой вырожденной факторизации типа плюс.

При $n = 1$ левые и правые гладкие вырожденные факторизации совпадают, поэтому в этом случае будем пользоваться обозначением $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(\kappa, C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$.

Из данных выше определений следует, что $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^-(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$ тогда и только тогда, когда $(A(\xi))^\tau \in \mathrm{Fact}_l^-(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$ и $A(\xi^{-1}) \in \mathrm{Fact}_l^+(-\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$.

Лемма 2. *Оператор* $T_D^+ : C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to \mathrm{C}_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ $(T_D^- : C_-^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to \mathrm{C}_-^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n))$, *где* $D(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi^{\kappa_j} P_j$, *нётеров и при этом имеют место равенства*

$$1)\ \dim\ker T_D^+ = -\sum_{\kappa_j<0} \kappa_j \quad \left(\dim\ker T_D^- = \sum_{\kappa_j>0} \kappa_j\right),$$

$$2)\ \dim\operatorname{coker} T_D^+ = \sum_{\kappa_j>0} \kappa_j \quad \left(\dim\operatorname{coker} T_D^- = -\sum_{\kappa_j<0} \kappa_j\right),$$

$$3)\ \operatorname{ind} T_D^+ = -\sum_{j=1}^n \kappa_j = -\kappa(D) \quad \left(\operatorname{ind} T_D^- = \sum_{j=1}^n \kappa_j = \kappa(D)\right).$$

Лемма 3. *Если* $A^+(\xi) \in GC_+^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ $(B^-(\xi) \in GC_-^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$, *то оператор* $T_{A^+}^+(T_{B^-}^-)$ *обратим и при этом*

$$\left(T_{A^+}^+\right)^{-1} = T_{(A^+)^{-1}}^+ \quad \left((T_{B^-}^-)^{-1} = T_{(B^-)^{-1}}^-\right).$$

Лемма 4. *Пусть* $A^-(\xi) \in C_-^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, *для любого* $\xi_0 \in D^-$ *матрица* $A^-(\xi_0)$ *обратима и если* $(A^-(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j \xi^{-j}$, $\xi \to \infty$ *и при этом* $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$ *для некоторых* $c > 0$ *и* $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, *тогда оператор* $T_{A^-}^+$ *обратим.*

$\lhd$ Поскольку для любого $\phi \in \mathbb{C}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, имеет место равенство

$$P^+(A^-(\xi))^{-1}\phi\xi^k = P^+\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j\phi\xi^{j-k}\right) = \sum_{j=0}^k B_j\phi\xi^{j-k},$$

то оператор $P^+(A^-(\xi))^{-1}P^+$ в силу линейности определен на всех многочленах с коэффициентами из $\mathbb{C}^n$. Кроме того, для каждого такого многочлена $\phi(\xi)$ справедливы легко проверяемые равенства

$$T_{A^-}^+ P^+(A^-(\xi))^{-1}\phi(\xi) = P^+(A^-(\xi))^{-1}T_{A^-}^+\phi(\xi) = \phi(\xi).$$

Таким образом, ввиду того, что множество многочленов с коэффициентами из $\mathbb{C}^n$ всюду плотно в $C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$, достаточно доказать, что оператор $P^+(A^-(\xi))^{-1}P^+ : C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ ограничен в пространстве $C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$.

Пусть $\varphi(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \varphi_k\xi^k \in C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$, тогда

$$P^+(A^-(\xi))^{-1}\varphi(\xi) = P^+\sum_{j\in Z_+} B_j\xi^{-j}\sum_{k\in Z_+}\varphi_k\xi^k = \sum_{j\in Z_+}\left(\sum_{k=j}^\infty B_{k-j}\varphi_k\right)\xi^j.$$

Отсюда получаем

$$\left\|P^+(A^-(\xi))^{-1}\varphi(\xi)\right\|_m = \sum_{j\in Z_+}(j+1)^m\left\|\sum_{k=j}^\infty B_{k-j}\varphi_k\right\| \leqslant \sum_{j\in Z_+}(j+1)^m\sum_{k=j}^\infty\|B_{k-j}\|\,\|\varphi_k\|$$

$$= \sum_{k\in Z_+}\|\varphi_k\|\sum_{j=0}^k(j+1)^m\|B_{k-j}\| \leqslant c\sum_{k\in Z_+}\|\varphi_k\|\sum_{j=0}^k(j+1)^m(k-j+1)^{m_0}$$

$$\leqslant c\sum_{k\in Z_+}(k+1)^{m+m_0+1}\|\varphi_k\| = \|\varphi(\xi)\|_{m+m_0+1}. \quad \rhd$$

Лемма 5. *Пусть $A^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, для любого $\xi_0 \in D^+$ матрица $A^+(\xi_0)$ обратима и если $(B^+(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j\xi^j$, $\xi \to 0$ и при этом $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$ для некоторых $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, тогда оператор $T^-_{A^+}$ обратим.*

Лемма 6. *Если $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^\pm(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$ $(\mathrm{Fact}_l^\pm(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))))$, то*

$$\det A(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm\big(\kappa_r^\pm(A), C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})\big)\ \big(\mathrm{Fact}^\pm\big(\kappa_l^\pm(A), C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})\big)\big).$$

$\lhd$ Предположим, для определенности, что $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^+(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$. Тогда $\det A(\xi) = \det A^-(\xi) \det D(\xi) \det A^+(\xi)$. При этом $\det A^-(\xi) \neq 0$, $\xi \in \overline{D^-}$ ввиду обратимости в $C_-^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ матрицы-функции $A^-(\xi)$. Ясно, что тогда $\det A^-(\xi) \in GC_-^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$. Кроме того, очевидно,

$$\det D(\xi) = \sum_{j=1}^n \kappa_j = \kappa_r^+(A).$$

В силу условия 2) определения вырожденной факторизации типа плюс $A^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, для любого $\xi_0 \in D^+$ матрица $A^+(\xi_0)$ обратима, и если

$$(A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j\xi^j, \quad \xi \to 0,$$

то $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$ для некоторых $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$. Из обратимости матрицы $A^+(\xi_0)$, $\xi_0 \in D^+$, следует, что $\det A^+(\xi) \neq 0$, $\xi \in D^+$. Кроме того, очевидно,

$$(\det A^+(\xi))^{-1} = \det(A^+(\xi))^{-1} = \det\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j\xi^j\right), \quad \xi \to 0.$$

Тогда по определению определителя

$$(\det A^+(\xi))^{-1} = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{s(\sigma_k)} \prod_{k=1}^n \sum_{l\in\mathbb{Z}_+} (B_l)_{k\sigma_k}\xi^l,$$

где через $(B)_{km}$ обозначены элементы матрицы B с номерами k, m, а через $s(\sigma_k)$ — четность перестановки $k \mapsto s(\sigma_k)$. Из последнего равенства следует, что

$$(\det A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} d_j\xi^j, \quad \text{где} \quad d_j = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_n=j} \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{s(\sigma_k)} \prod_{k=1}^n (B_{s_j})_{k\sigma_k}.$$

Какова бы ни была матричная операторная норма из неравенства $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$ следует, что $|(B_j)_{km}| \leqslant c(j+1)^{m_0}$ для любых k, m. Но тогда

$$|d_j| = \left| \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_n=j} \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{s(\sigma_k)} \prod_{k=1}^n (B_{s_j})_{k\sigma_k} \right|$$
$$\leqslant \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_n=j} \sum_{k=1}^{n!} \prod_{k=1}^n |(B_{s_j})_{k\sigma_k}| \leqslant c^n(n!+1)(j+1)^{nm_0}.$$

По определению это означает, что $\det A(\xi) \in \mathrm{Fact}^+(\kappa_r(A), C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$. $\rhd$

Лемма 7. *Если* $A(\xi) = A^-(\xi)D(\xi)A^+(\xi)(A(\xi) = A^+(\xi)D(\xi)A^-(\xi))$, *где* $A^\pm(\xi) \in C^\infty_\pm(\Gamma, \mathbb{C}^n)$, *то*

$$T_A^+ = T_{A^-}^+ T_D^+ T_{A^+}^+ \quad (T_A^- = T_{A^+}^- T_D^- T_{A^-}^-).$$

Следствие 1. *Если* $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^-(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$ $(B(\xi) \in \mathrm{Fact}_l^+(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))))$, *то оператор* T_A^+ (T_B^-) *нётеров и при этом*

$$\operatorname{ind} T_A^+ = -\kappa_r^-(A) = -\kappa^-(\det A) \quad \big(\operatorname{ind} T_B^- = \kappa_l^+(B) = \kappa^+(\det B)\big).$$

3. Гладкие факторизации, нётеровость, индекс

Теорема 2. *Матрица-функция* $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ *допускает одну из гладких вырожденных факторизаций тогда и только тогда, когда функция* $\det A(\xi)$ *имеет на* Γ *не более чем конечное число нулей конечных порядков.*

$\lhd$ Будем, для определенности рассматривать случай правой вырожденной факторизации типа плюс.

Необходимость. Если $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^+(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$, $\bar\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$, то из равенства $A(\xi) = A^-(\xi)D(\xi)A^+(\xi)$ в силу свойств определителя следует, что

$$\det A(\xi) = \det A^-(\xi)\xi^\kappa \det A^+(\xi), \quad \text{где} \quad \kappa = \sum_{j=1}^n \kappa_j = \kappa_r^+(A).$$

Согласно лемме 7 полученное равенство является гладкой вырожденной факторизацией типа плюс функции $\det A(\xi)$ с индексом факторизации $\kappa_r^+(A)$. Покажем, что из последнего условия вытекает, что $\det A(\xi)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков. Предположим противное, т. е. что $\det A(\xi) \in \mathrm{Fact}^+(\kappa, C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$, но имеет более чем конечное число нулей конечных порядков. Это означает, что либо $A(\xi)$ имеет нуль бесконечного порядка в некоторой точке $\xi_0 \in \Gamma$, либо — бесконечное число нулей. Поскольку в последнем случае точка сгущения нулей является нулем бесконечного порядка, то достаточно предполагать, что $A(\xi)$ имеет нуль бесконечного порядка в некоторой точке $\xi_0 \in \Gamma$. По определению вырожденной факторизации типа плюс $\det A^-(\xi) \in GC^\infty_-(\Gamma, \mathbb{C})$. Но тогда функция $\det A^+(\xi)$ обязана иметь в точке $\xi_0 \in \Gamma$ нуль бесконечного порядка. По определению нуля бесконечного порядка

$$\left(\frac{d^l(\det A^+(\xi))}{d\xi^l}\right)\bigg|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда $\det A^+(\xi) = (\xi - \xi_0)^l A_l^+(\xi)$, где $A_l^+(\xi) \in C^\infty_+(\Gamma, \mathbb{C})$, каково бы ни было $l \in \mathbb{Z}_+$. По определению вырожденной факторизации типа плюс

$$(\det A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} B_j \xi^j, \quad \xi \to 0,$$

и при этом $|B_j| < c(j+1)^{m_0}$ для некоторых $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, имеет место равенство

$$A_l^+(\xi)(\det A^+(\xi))^{-1} = (\xi - \xi_0)^{-l}, \quad \xi \to 0.$$

Поскольку $A_l^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$, а коэффициенты Фурье $(\det A^+(\xi))^{-1}$ растут не быстрее, чем $(j+1)^{m_0}$, где j — номер коэффициента, то и коэффициенты ряда Фурье функции $A_l^+(\xi)(\det A^+(\xi))^{-1}$ также растут не быстрее, чем $(j+1)^{m_0}$. С другой стороны,

$$(\xi - \xi_0)^{-l} = (-\xi_0)^{-l}\bigl(1 - \xi_0^{-1}\xi\bigr)^{-l} = (-\xi_0)^{-l}\sum_{j=0}^{\infty} C_{l+j-1}^{j}\xi_0^{-j}\xi^j,$$

и, следовательно,

$$A_l^+(\xi)(A^+(\xi))^{-1} = (-\xi_0)^{-l}\sum_{j=0}^{\infty} C_{l+j-1}^{j}\xi_0^{-j}\xi^j.$$

Таким образом, если

$$A_l^+(\xi)(\det A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\xi^j,$$

то

$$c_j = C_{l+j-1}^{j}\xi_0^{-j}(-\xi_0)^{-l}.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга, будем иметь

$$|c_j| \approx \frac{\exp(l-1)}{(l-1)^{l-1}\sqrt{2\pi(l-1)}}\, j^{l-1}.$$

Отметим, что в произведенных выкладках $l \in \mathbb{Z}_+$ — произвольно. Выбрав $l = m_0 + 2$, получим

$$|c_j| \approx \sigma_{m_0} j^{m_0+1}, \quad \sigma_{m_0} = \frac{\exp(m_0+1)}{(m_0+1)^{m_0+1}\sqrt{2\pi(m_0+1)}}.$$

Но последняя эквивалентность противоречит тому, что коэффициенты c_j должны расти не быстрее, чем $(j+1)^{m_0}$. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $\det A(\xi)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков. Пользуясь методом отщепления нулей (см. [1, 2, 7]), представим матрицу-функцию $A(\xi)$ в виде $A(\xi) = A_0(\xi)\Omega^+(\xi)$, где $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, $\Omega^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. При этом $\det A_0(\xi) \neq 0$, $\xi \in \Gamma$, а $\det \Omega^+(\xi) = \prod_k (\xi - z_k)^{n_k}$, где $\{z_k\}$ — множество всех нулей функции $\det A(\xi)$ на окружности Γ. Хорошо известно, что матрица-функция $A_0(\xi)$ допускает стандартную (невырожденную) правую факторизацию $A_0(\xi) = B^-(\xi)D(\xi)B^+(\xi)$. Полагая $A^-(\xi) = B^-(\xi)$, $A^+(\xi) = B^+(\xi)\Omega^+(\xi)$, получим правую вырожденную факторизацию типа плюс матрицы-функции $A(\xi)$. $\rhd$

Следствие 2. *Суммарные индексы правой и левой вырожденных гладких факторизаций матрицы-функции* $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ *одного типа совпадают и равны индексу факторизации того же типа функции* $\det A(\xi)$.

Теорема 3. *Пусть* $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. *Оператор* T_A^+ (T_A^-) *нётеров в пространстве* $C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ $(C_-^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n))$ *тогда и только тогда, когда матрица-функция* $A(\xi)$ *допускает правую (левую) гладкую вырожденную факторизацию типа минус (плюс) в алгебре* $C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. *При выполнении последнего условия*

$$\operatorname{ind} T_A^+ = -\kappa_r^-(A) \quad (\operatorname{ind} T_A^- = \kappa_l^+(A)).$$

$\lhd$ Достаточность теоремы вытекает из лемм 3–8. Необходимость является следствием теоремы Б. Зильбермана [12] и теоремы 1. $\rhd$

Следствие 3. *Пусть* $A(\xi), B(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ *и каждая из функций* $\det A(\xi)$, $\det B(\xi)$ *имеет на* Γ *не более чем конечное число нулей конечных порядков. Тогда*

$$\operatorname{ind} R_{A,B} = -\kappa^-(\det A) + \kappa^+(\det B).$$

Замечание 1. Достаточность теоремы 3 может быть доказана независимо от результата Б. Зильбермана, но более громоздко (см. [12]).

Определение 3. Сингулярным индексом функции $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$, имеющей конечное число нулей конечных кратностей, будем называть число

$$\kappa_c(A) = \frac{1}{\pi i}\, v.p. \int_\Gamma \frac{A'(\xi)}{A(\xi)}\, d\xi.$$

Пусть $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ и имеет на Γ конечное число нулей z_k порядков n_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, соответственно. Назовем число $n(A) = \sum_{k=1}^s n_k$ суммарным числом нулей этой функции.

Лемма 8. *Пусть* $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ *и* $n(A) < \infty$, *а*

$$A_0(\xi) = A(\xi) \prod_{k=1}^s (\xi - z_k)^{-n_k} \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}) \quad \left(A_1(\xi) = A(\xi) \prod_{k=1}^s \left(1 - z_k\xi^{-1}\right)^{-n_k} \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})\right)$$

и не обращается в нуль на Γ. *Тогда имеет место равенство*

$$\kappa_c(A) = n(A) + 2 \operatorname*{ind}_{\xi\in\Gamma} A_0(\xi) \quad \bigl(\kappa_c(A) = -n(A) + 2 \operatorname*{ind}_{\xi\in\Gamma} A_1(\xi)\bigr).$$

$\lhd$ Воспользуемся тем, что для невырождающейся, дифференцируемой на Γ функции

$$v.p.\, \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{A_0'(\xi)d\xi}{A_0(\xi)} = 2 \operatorname*{ind}_{\xi\in\Gamma} A_0(\xi)$$

и тем, что для фиксированного $z_k \in \Gamma$ справедливо равенство

$$v.p. \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z_k} = \pi i.$$

Тогда

$$\kappa_c(A) = \frac{1}{\pi i}\, v.p. \int_\Gamma \frac{A'(\xi)d\xi}{A(\xi)} = \frac{1}{\pi i}\, v.p. \int_\Gamma \frac{A_0'(\xi)d\xi}{A_0(\xi)} + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^s v.p. \int_\Gamma \frac{n_k d\xi}{\xi - z_k} = 2 \operatorname*{ind}_{\xi\in\Gamma} A_0(\xi) + n(A).$$

Доказательство второй формулы аналогично приведенному. $\rhd$

Нетрудно заметить, что если функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ имеет конечное число нулей конечных кратностей, то $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(\kappa^\pm, C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$ и при этом,

$$\kappa^+ = \operatorname{ind}_\xi A_0(\xi), \quad A_0(\xi) = A(\xi) \prod_{k=1}^s (\xi - \xi_k)^{-n_k},$$

$$\kappa^- = \operatorname{ind}_\xi A_1(\xi), \quad A_1(\xi) = A(\xi) \prod_{k=1}^s (1 - \xi_k\xi^{-1})^{-n_k}.$$

Принимая во внимание лемму 8, последним формулам можно придать следующий вид: $\kappa_c(A) = n(A) + 2\kappa^+$, $\kappa_c(A) = -n(A) + 2\kappa^-$. Таким образом, индексы вырожденной факторизации функции $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$, в случае ее существования, могут быть найдены следующим образом: $\kappa^\pm = \frac{1}{2}(\kappa_c(A) \mp n(A))$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 9. *Функция $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(\kappa^\pm, C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$ тогда и только тогда, когда эта функция имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков. При выполнении последнего условия индексы вырожденных факторизаций могут быть найдены по формулам*

$$\kappa^\pm = \frac{1}{2}\big(\kappa_c(A) \mp n(A)\big).$$

Теорема 4. *Пусть $A(\xi), B(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. Оператор $R_{A,B} : C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ нётеров тогда и только тогда, когда каждая из функций $\det A(\xi)$, $\det B(\xi)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков. При выполнении этих условий индекс оператора может быть найден по формуле*

$$\operatorname{ind} R_{A,B} = -\frac{1}{2}\big(\kappa_c(\det A) + n(\det A)\big) + \frac{1}{2}\big(\kappa_c(\det B) - n(\det B)\big).$$

Литература

1. *Gahov F. D.* Boundary Value Problems.—N. Y.: Dover, 1990.—561 p.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—599 с.
3. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений.—М.: Наука, 1970.—252 с.
4. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
5. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: Штиинца, 1973.—426 с.
6. *Симоненко И. Б.* Некоторые общие вопросы краевой задачи Римана // Изв. АН СССР.—1968.—Т. 32, № 5.—С. 1138–1146.
7. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Мир, 1979.—493 с.
8. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций.—М.: Высш. шк., 1991.—210 с.
9. *Волевич Л. З., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках.—М.: Наука, 1994.—336 с.
10. *Дыбин В. Б., Карапетянц Н. К.* Применение метода нормализации к одному классу бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Изв. вузов. Математика.—1967.—№ 10.—С. 39–49.
11. *Зильберман Б.* О сингулярных операторах в пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций // Мат. исследования.—Кишинев: Штиинца, 1971.—Т. 6, № 3.— С. 168–179.
12. *Пасенчук А. Э.* Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2013.—279 с.

Статья поступила 26 ноября 2018 г.

Пасенчук Александр Эдуардович
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105
E-mail: `pasenchuk@mail.ru`

Серегина Виктория Викторовна
Азово-черноморский инженерный институт,
доцент кафедры математики и механики
РОССИЯ, 347740, Зерноград, ул. Ленина, 21
E-mail: `vic.victora@yandex.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 3, P. 50–61

ABOUT RIEMANN MATRIX OPERATOR IN THE SPACE OF SMOOTH VECTOR FUNCTIONS

Pasenchuk, A. E.[1] and Seregina, V. V.[2]
[1] Southern Federal University,
105 Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don, 344006, Russia;
[2] Azov-Black Sea Engineering Institute,
21 Lenina Str., Zernograd, 347740, Russia
E-mail: pasenchuk@mail.ru, vic.victora@yandex.ru

Abstract. In the space of vector functions smooth on the unit circle, we consider the matrix operator of linear conjugation generated by the Riemann boundary-value problem. It is assumed that the coefficients of the boundary value problem are smooth matrix functions. The concept of smooth degenerate factorization of the plus and minus types of a smooth matrix function is introduced and studied. In terms of degenerate factorizations, we give necessary and sufficient conditions for the noethericity of the considered Riemann matrix operator in the space of smooth vector functions. For a function smooth on a circle having at most finitely many zeros of finite orders, the concept of a singular index is introduced and studied, generalizing the concept of the index of a non-degenerate continuous function. For the Noetherian matrix Riemann operator, a formula is obtained for calculating the index of this operator, which coincides with the well-known similar formula in the case where the coefficients of the Riemann operator are non-degenerate.

Key words: operator, Riemann, Noetherian, smooth, index, formula.

Mathematical Subject Classification (2010): 47B35.

For citation: *Pasenchuk, A. E. and Seregina, V. V.* About Riemann Matrix Operator in the Space of Smooth Vector Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 50–61 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36461.

References

1. *Gahov, F. D. Boundary Value Problems*, New York, Dover, 1990, 561 p.
2. *Muskhelishvili, N. I. Singuljarnye integral'nye uravneniya* [Singular Integral Equations], Moscow, Nauka, 1968, 599 p. (in Russian).
3. *Vekua, N. P. Sistemy singuljarnykh integral'nykh uravnenii* [Systems of Singular Integral Equations], Moscow, Nauka, 1970, 252 p. (in Russian).
4. *Gohberg, I. C. and Fel'dman, I. A. Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* [Convolution Equations and Projection Methods for their Solution], Moscow, Nauka, 1971, 352 p. (in Russian).
5. *Gohberg, I. C. and Krupnik, N. Ya. Vvedenie v teoriyu odnomernykh singulyarnykh integral'nykh operatorov* [Introduction to the Theory of One-Dimentional Singular Integral Operators], Kishinev, Shtiintsa, 1973, 426 p. (in Russian).
6. *Simonenko, I. B.* Some General Questions in the Theory of the Riemann Boundary Problem, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 5, p. 1091–1099. DOI: 10.1070/IM1968v002n05ABEH000706.
7. *Presdorf, Z. Nekotorye klassy singulyarnykh uravneniy* [Some Classes of Singular Equations], Moscow, Mir, 1979, 493 p. (in Russian).
8. *Soldatov, A. P. Odnomernye singulyarnye operatory i kraevye zadachi teorii funktsii* [One-Dimensional Singular operators and Boundary Value Problems of the Theory of Functions], Moscow, Vysshaya shkola, 1991, 210 p. (in Russian).
9. *Volevich, L. Z. and Gindikin, S. G. Obobshhennye funktsii i uravneniya v svertkakh* [Generalized Convolution Functions and Equations], Moscow, Nauka, 1994, 336 p. (in Russian).
10. *Dybin, V. B. and Karapetyants, N. K.* Application of the Normalization Method to a Class of Infinite Systems of Linear Algebraic Equations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1967, no. 10, p. 39–49. (in Russian).

11. *Zilberman, B.* On Singular Operators in Spaces of Infinitely Differentiable and Generalized Functions, *Matematicheskiye Issledovaniya*, Kishinev, Shtiinca, 1971, vol. 6, no. 3, p. 168–179. (in Russian).
12. *Pasenchuk, A. E Diskretnye operatory tipa svertki v klassakh posledovatel'nostei so stepennym kharakterom povedeniya na beskonechnosti* [Discrete Operators of Convolution Type in Classes of Sequences with Power-Law Behavior at Infinity], Rostov-on-Don, SFU, 2013, 279 p. (in Russian).

Received 26 November, 2018

Alexandr E. Pasenchuk,
Southern Federal University,
105 Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don, 344006, Russia,
Professor
E-mail: pasenchuk@mail.ru

Victoria V. Seregina
Azov-Black Sea Engineering Institute,
21 Lenina Str., Zernograd, 347740, Russia,
Associate Professor
E-mail: vic.victora@yandex.ru