Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 1, С. 13–32

УДК 517.944
DOI 10.23671/VNC.2020.1.57535

СКОРОСТЬ УБЫВАНИЯ МАССЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДВАЖДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С АБСОРБЦИЕЙ

З. В. Бесаева[1], **А. Ф. Тедеев**[2]

[1]Юго-Осетинский государственный университет им. А. А. Тибилова,
Республика Южная Осетия, 100001, Цхинвал, ул. Путина, 8;
[2]Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: besaeva.85@mail.ru, a_tedeev@yahoo.com

Аннотация. В работе изучается задача Коши для широкого класса квазилнейных параболических уравнений второго порядка с неоднородной плотностью и абсорбцией. Хорошо известно, что для рассматриваемого класса задач без абсорбции и при условии, что плотность стремится к нулю не слишком быстро, имеет место закон сохранения тотальной массы. Однако этот факт не всегда имеет место при наличии абсорбции. В данной работе найдены точные условия на характер нелинейности и поведения неоднородной плотности на бесконечности, которые гарантируют стремление к нулю тотальной массы решения при неограниченном возрастании времени. Другими словами, найден критерий стабилизации к нулю тотальной массы решения в терминах критических показателей. С помощью полученных результатов и локальных оценок типа Нэша — Мозера выводятся точные оценки решения в равномерной метрике.

Ключевые слова: задача Коши, вырождающиеся параболические уравнения, неоднородная плотность, абсорбция, критические показатели.

Mathematical Subject Classification (2010): 35K92, 35B33, 35E15.

Образец цитирования: *Бесаева З. В., Тедеев А. Ф.* Скорость убывания массы решения задачи Коши дважды нелинейного параболического уравнения с абсорбцией // Владикавк. мат. журн.— 2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 13–32. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57535.

1. Введение

В данной работе рассматривается задачи Коши для решения квазилинейных вырождающихся параболических уравнений вида

$$\rho(|x|)u_t - \operatorname{div}\vec{A}(x,t,u,\nabla u) + g(x,t,u) = 0, \tag{1.1}$$

$(x,t) \in s : \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$, удовлетворяющих начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \quad \rho(s) > 0,\ 0 < s < \infty, \quad u_0(x) \geqslant 0,\ \rho u_0(x) \in L_1\big(\mathbb{R}^N\big). \tag{1.2}$$

На протяжении всей работы предполагается выполнение следующих условий. Вектор-функция $\vec{A}(x,t,u,\xi) = (A_1(x,t,u,\xi),\dots,A_N(x,t,u,\xi))\colon \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ и $g(x,t,u)$:

$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условию Каратеодори, т. е. измеримы по переменным $(x,t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ и непрерывны соответственно по переменным $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$. Функция $\rho(s)$: $\mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$ непрерывна монотонно убывающая функция по $s \in [0,\infty]$. Кроме того, предполагается выполнение следующих структурных условий: существуют положительные постоянные μ_1 и μ_2 такие, что

$$\vec{A}(x,t,u,\xi)\xi \geqslant \mu_1|\xi|^p\,|u|^{m-1}, \tag{1.3}$$

$$\bigl|\vec{A}(x,t,u,\xi)\bigr| \leqslant \mu_2|\xi|^{p-1}\,|u|^{m-1}, \tag{1.4}$$

$$\mu_2|u|^q \geqslant \operatorname{sign} u, \quad g(x,t,u) \geqslant \mu_1|u|^q. \tag{1.5}$$

Кроме того, выполнено условия монотонности: для любых двух векторов $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_N)$ и $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_N)$, для любого $u \in \mathbb{R}$, т. е. для $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ выполнены неравенства

$$\bigl(\vec{A}(x,t,u,\xi) - \vec{A}(x,t,u,\eta)\bigr)\bigl(\xi-\eta\bigr) \geqslant 0, \tag{1.6}$$

$$\bigl[g(x,t,u_1) - g(x,t,u_2)\bigr]\bigl[u_1-u_2\bigr] \geqslant 0 \tag{1.7}$$

для всех ξ_1 и η_2 из $\mathbb{R}^N$. Постоянные p, m, q удовлетворяют следующим условиям:

$$1 < p+m-2, \quad q>1,\ p>1. \tag{1.8}$$

Предположим также, что функция $\rho(s)$ для всех $s>0$ удовлетворяет условию **H**: *Существуют такие положительные постоянные l_1 и l_2, причем $l_1 < p$, что функция $\rho(s)s^{l_1}$ монотонно убывает, а функция $\rho(s)s^{l_2}$ монотонно растет.*

Примером уравнения (1.1) является

$$\rho(|x|)u_t = \Delta_{m,p}u - |u|^{q-1}u, \tag{1.9}$$

где

$$\Delta_{m,p}u := \operatorname{div}\bigl(|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\bigr)$$

и $\rho(s) \sim s^{-l}$, $s \geqslant 1$, $0<l<p$. Здесь символ $\sim$ — наличие двусторонней оценки

$$c_1 s^{-l} \leqslant \rho(s) \leqslant c_2 s^{-l} \quad (\forall\, s \geqslant 1,\ c_1,c_2>0). \tag{1.10}$$

Для уравнения

$$\rho(|x|)u_t = \Delta_{m,p}u \tag{1.11}$$

с конечным интегралом $\|\rho u_0\|_1 :\equiv \int_{\mathbb{R}^N}\rho u_0\,dx$, который принято называть *тотальной массой* или просто *массой начальной функции*, при выполнении, например, условия (1.10), справедлив закон сохранения «массы» (см. [1]):

$$\|\rho u_0\|_1 = \|\rho u(t)\|_1 \quad (\forall\, t>0).$$

В работе [1] для задачи (1.1), (1.2) с $\rho(x) = (1+|x|)^{-l}$, $l<p$, $g(x,t,u)\equiv 0$ установлена равномерная оценка решения

$$\|u(t)\|_\infty := \|u(x,t)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\bigl\|\rho u_0\bigr\|_1^{\frac{p-l}{h_l}}\, t^{-\frac{N-l}{h_l}} \tag{1.12}$$

для любых $t>0$. Кроме того, из [1] следует, что если

$$\operatorname{supp} u_0(x) \subset B_{R_0}(0) := \bigl\{x \in \mathbb{R}^N / |x| < R_0\bigr\}, \quad R_0 < \infty,$$

то $\operatorname{supp} u(x,t)$ принадлежит шару $B_{\overline{R}(t)}(0)$, где

$$\overline{R}(t) = 4R_0 + \gamma \big\|u_0\rho\big\|_1^{\frac{p+m-3}{h_l}} t^{\frac{1}{h_l}}. \tag{1.13}$$

Однако наличие абсорбирующего слагаемого в уравнении (1.1) может существенно изменить качественные свойства решений. В частности, тотальная масса $\|u\rho\|_1$ решения может стремиться к нулю при $t \to \infty$. Указанный феномен имеет место при $\rho(s) \equiv 1$. В этом случае (1.9) допускает «плоское» решение вида

$$U(t) \equiv C(p)(t+T)^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Кроме того, для (1.9) справедлива также оценка (1.12) с $l = 0$. Таким образом, по теореме сравнения для решения задачи Коши (1.9), (1.2) имеет место оценка

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant C \min\Big\{\|u_0\|_1^{\frac{p}{\beta}} t^{-\frac{N}{\beta}},\, t^{-\frac{1}{q-1}}\Big\} \tag{1.14}$$

при $t > 1$. Здесь $\beta = N(p+m-3)+p$.

Очевидно, что в (1.14) при достаточно больших t

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant C t^{-\frac{1}{q-1}} \tag{1.15}$$

и условии, что $\frac{N}{\beta} < \frac{1}{q-1}$, т. е.

$$q < q^* = p + m - 2 + \frac{p}{N}.$$

Оказывается, что в этом случае $\|u(t)\|_1 \to 0$ при $t \to \infty$ и можно указать точную оценку массы решения. Подойдем теперь к этой же проблеме шире. Из оценки $L_1 - L_\infty$ типа Нэша — Мозера (см., например, [2]), имеем

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant C \Big\|u\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big\|_1^{\frac{p}{\beta}} t^{-\frac{N}{\beta}}. \tag{1.16}$$

Теперь, если иметь точную по порядку оценку массы при достаточно больших t, то можно снова прийти к тому же результату (1.14). Однако такой подход может быть применен к более широкому классу уравнений, а оценка массы решения, как это будет видно ниже, сводится к локальным энергетическим оценкам, имеющим в определенном смысле универсальный характер. В данной работе используются подходы работ [2–5] при изучении точного поведения тотальной массы решения задачи (1.1), (1.2) при $t \to \infty$.

Отметим, что исследование уравнения (1.11), представляет независимый интерес. Известно, что [6–8] в зависимости от скорости стремления к нулю на бесконечности $\rho(x)$ решение задачи (1.1), (1.2) обладает рядом нестандартных свойств. Укажем здесь на работы [9–17]. Оценкам массы решения для различных классов вырождающихся параболических уравнений были посвящены также работы [9, 10] (см. также имеющуюся там литературу). Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов работы введем понятие решения (обобщенного) задачи (1.1), (1.2).

Решением задачи (1.1), (1.2) в $S = \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ будем называть функцию $u(x,t)$, которая для любых $t > 0$, $T > t$, $\sigma = \frac{p-1}{p+m-2}$ удовлетворяет условиям $u^{\frac{1}{\sigma}}(x,t)$, принадлежит классу

$$L_p(t,T) \times W_p^1\big(\mathbb{R}^N\big) \cap C\big([t,T] : L_{1+\sigma,\rho(|x|)}\big(\mathbb{R}^N\big)\big) \cap L_{q+\frac{1}{\sigma}}\big((t,T), L_{q+\frac{1}{\sigma}}\big)$$

и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{t}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Big(\big(-u(x,\tau)\eta_\tau(x,\tau)\rho(|x|)\big)+\sum_{i=1}^{N}A_i(x,t,u,\nabla u)\eta_{x_i}+g(x,t,u)\eta(x,\tau)\Big)dxd\tau \qquad (1.17)$$

для любой $\eta(x,\tau)=0$ при $\tau=t$ и $\tau=T$, $\eta^{\frac{1}{\sigma}}(x,t),\eta_\tau^{\frac{1}{\sigma}}\in L_{1+\sigma}(\rho(|x|)(t,T):L_{1+\frac{1}{\sigma}},\rho(|x|))$, $\eta^{\frac{1}{\sigma}}(x,t)\in L_p((t,T)\times W_p^1(\mathbb{R}^N))\cap L_{q+\frac{1}{\sigma}}((t,T),L_{q+\frac{1}{\sigma}})$.

Кроме того, $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^N}u(x,t)\rho(|x|)\zeta(x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\rho(x)\zeta(x)\,dx.$$

Существование решения (1.1), (1.2) доказывается точно также, как в работе [1]. Единственность энергетического решения в случае $\rho(s)=\mathrm{const}$ и начально-краевой задачи Коши — Дирихле хорошо известно. Таким образом, если $\operatorname{supp}u_0\subset B_{R_0}$, т. е. для начальной функции с компактным носителем единственность решения (1.1), (1,2) гарантирована.

Основные результаты работы содержаться в теоремах 1.1–1.5.

Обозначим $\Phi(R):=R^{N-\frac{p}{q-(p+m-2)}}\rho(R)$.

Теорема 1.1. *Пусть* $u(x,t)$ *— решение задачи* (1.1), (1.2) *в* $\mathbb{R}^N\times(0,\infty)$ *и выполнены условия* (1.3)–(1.7) *и условие* **H**. *Предположим, что* $\Phi(R)$ *для всех* $R>0$ *строго монотонно убывает и*

$$\Phi(R)\to 0,\quad R\to\infty. \qquad (1.18)$$

Тогда

$$E(t):=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho(|x|)u(x,t)\,dx\leqslant\gamma\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\gamma\overline{R}(t)}}\rho(|x|)u_0(x)\,dx+\gamma\Phi\big(\overline{R}(t)\big), \qquad (1.19)$$

где $\overline{R}(t)$ *— функция, определяемая из соотношения* $\rho(R)R^{\frac{p(q-1)}{q-(p+m-2)}}$ *для любого* $t>0$.

Теорема 1.2. *Пусть* $u(x,t)$ *— решение задачи* (1.1), (1.2) *в* $\mathbb{R}^N\times(0,\infty)$ *и выполнены условия* (1.3)–(1.7) *и условие* **H**. *Предположим, что существуют положительные постоянные* C_1, C_2 *такие, что для всех* $R>0$

$$C_1\leqslant\Phi(R)\leqslant C_2. \qquad (1.20)$$

Тогда при достаточно больших значениях t *выполняется оценка*

$$E(t)\leqslant\gamma[\ln t]^{-\frac{1}{q-1}}. \qquad (1.21)$$

Теорема 1.3. *Пусть* $u(x,t)$ *— решение задачи* (1.1), (1.2) *в* $\mathbb{R}^N\times(0,\infty)$ *и выполнены условия* (1.3)–(1.8), $q>q_l^*$, $\operatorname{supp}u_0\subset B_{R_0}$, $\rho(|x|)=\mathrm{const}(1+|x|)^{-l}$, $0\leqslant l<p$. *Тогда для достаточно больших значениий времени* t *существует* $Y=\gamma(\|u_0\rho\|_1,\mu_1,\mu_2)$ *такое, что*

$$E(t)\geqslant\gamma E(0). \qquad (1.22)$$

Теорема 1.4. *Пусть $u(x,t)$ — решение задачи* (1.1), (1.2) *в* $\mathbb{R}^N\times(0,\infty)$, $\operatorname{supp}u_0\subset B_{R_0}$ *и выполнены условия* (1.3)–(1.7), *условие* $\mathbf{H}$, $q=p+m-2$. *Тогда для достаточно больших t имеет место оценка*

$$E(t)\leqslant\gamma\big[\rho(\ln t)\big]^{\frac{p+m-2}{p+m-3}}(\ln t)^N t^{-\frac{1}{p+m-3}}. \tag{1.23}$$

Теорема 1.5. *Пусть $u(x,t)$ — решение задачи* (1.1), (1.2) *в* $\mathbb{R}^N\times(0,\infty)$, $\operatorname{supp}u_0\subset B_{R_0}$, $\|u_0\rho\|_{1+\theta}<\infty$ *для некоторого* $\theta>0$, $1<q<p+m-2$. *Пусть еще выполнены условия* (1.3)–(1.7) *и условие* $\mathbf{H}$. *Тогда существует постоянная C, не зависящая от t, такая, что*

$$E(t)\leqslant Ct^{-\frac{1}{p+m-3}}. \tag{1.24}$$

Рассмотрим частные случаи результатов теорем 1.1–1.3. Если $\rho(s)=(1+s)^{-l}$, $s\geqslant0$, $0\leqslant l<p$, то согласно результатам теорем 1.1–1.3

$$q<p+m+2+\frac{p}{N-l}:=q_l^*. \tag{1.25}$$

Тогда $\Phi(R)\sim R^{-\frac{(q^*-q)(N-l)}{q-(p+m-2)}}$, $E(t)\leqslant\gamma\overline{R}(t)^{-\frac{(q^*-q)(N-l)}{q-(p+m-2)}}$, где $\overline{R}(t)\sim t^{\frac{q-(p+m-2)}{(p-l)(q-(p+m-2))+p+m-3}}$, при $q=q_l^*:E(t)\leqslant\gamma(\ln t)^{-\frac{1}{q^*-1}},t>1$. Если же $q>q_l^*$, то $E(t)\geqslant\gamma$, $t>1$.

Таким образом, q_l^* в (1.25) играет роль критического показателя для задачи (1.1), (1.2). Всюду в дальнейшем параметрами γ, C, c, будем обозначать различные постоянные, которые зависят лишь от параметров задачи μ_1, μ_2, N, p, m, q и не зависят от размеров области решения задачи.

Работа организована следующим образом: в § 2 даются вспомогательные утверждения, §§ 3–7 посвящены доказательствам теорем 1.1–1.5 соответственно.

2. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы (см. [17]).

Лемма 2.1. *Пусть последовательность y_h, $h=0,1,2,\ldots$, неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$y_{h+1}\leqslant Cb^h y_h^{1+\varepsilon},\quad h=0,1,\ldots,$$

с какими-либо положительными постоянными C, ε и $b\geqslant1$. Тогда $y_h\to0$, $h\to\infty$ при условии, что $y_0\leqslant C^{-\frac{1}{\varepsilon}}b^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$.

Лемма 2.2. *Пусть $y_n,n=0,1,2,\ldots,$ — последовательность равномерно ограниченных положительных чисел, удовлетворяющих рекуррентным неравенствам*

$$y_n\leqslant Cb^n y_{n+1}^{1-\alpha},$$

где $C,b>1$ и $\alpha\in(0,1)$ — заданные постоянные. Тогда $y_0\leqslant\left(\frac{2C}{b^{1-\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Пусть $\psi(R):=R^{N(p+m-3)+p}\rho(R)^{p+m-2}$.

Лемма 2.3. *Пусть* $\operatorname{supp}u_0\subset B_{R_0}$ *и выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда для любого $t>0$ имеет место оценка*

$$\zeta(t):=\inf\big\{r:\,u(\cdot,t)=0,\ |x|>r\big\}\leqslant4R_0+\gamma\psi^{(-1)}\big(t\|u_0\rho\|_1^{p+m-3}\big).$$

$\lhd$ Обозначим

$$r_i' = \frac{R}{2} - \sigma_2 R + \frac{R}{2^i}(\sigma_2 - \sigma_1), \quad r_i'' = R + \sigma_2 R - \frac{R}{2^i}(\sigma_2 - \sigma_1),$$

где $i = 0, 1, \ldots,$ $R > 4R_0$, $\frac{1}{4} > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$. Пусть $A_i = r_i' < |x| < r_i'' \subset A_{i+1}$. Рассмотрим срезающую функцию η_i такую, что $\eta_i \equiv 1$, $x \in A_i$, $\eta_i \equiv 0$ вне A_{i+1}, $|\nabla \eta_i| \leqslant \gamma(2^{-i}R(\sigma_2 - \sigma_1))^{-1}$. Возьмем в интегральном тождестве в роли тестирующей функции $\eta_{i-1}^p u^\theta$, где $\theta > 0$. Тогда, рассуждая также как в [18], получим неравенство

$$\begin{gathered}\sup_{0<T<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} \eta_i^p \, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^{m+\theta-2} |\nabla u|^p \eta_i^p \, dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^{q+\theta} \eta_i^p \, dx dt \\ \leqslant \gamma(2^{-i}R(\sigma_2 - \sigma_1))^{-p} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N \cap \operatorname{supp} \eta_i} u^{p+m+\theta-2} \, dx d\tau.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Обозначим $u^{\frac{p+m+\theta-2}{p}} \eta_i^s = v_i$, $s > 0$, т. е. $u\eta_i^{\frac{sp}{p+m+\theta-2}} = v_i^{\frac{p}{p+m+\theta-2}}$. Значит, $u^{1+\theta} \eta_i^{\frac{sp(1+\theta)}{p+m+\theta-2}} = v_i^{\frac{p(1+\theta)}{p+m+\theta-2}}$ при условии, что s выбрано удовлетворяющим неравенству $\frac{s(1+\theta)}{p+m+\theta-2} > 1$. Кроме того,

$$\begin{gathered}\Big| \nabla \Big(u^{\frac{p+m+\theta-2}{p}} \eta_{i-1}^s \Big) \Big|^p = |\nabla v_i|^p \\ \leqslant 2^{p-1} \left[\left(\frac{p+m+\theta-2}{p} \right)^p u^{m+\theta-2} |\nabla u|^p \eta_i^{sp} + u^{p+m+\theta-2} s^p |\nabla \eta_i|^p \eta_i^{s-p} \right] \\ \leqslant \gamma u^{m+\theta-2} |\nabla u|^p \eta_i^p + \gamma \big[2^{-i} R(\sigma_2 - \sigma_1) \big]^{-p} u^{p+m+\theta-2} \eta_i^{sp}.\end{gathered}$$

Таким образом, из неравенства (2.1) получаем, что

$$\begin{gathered}J_i := \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho v_i^a \, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_i|^p \, dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \eta_i^p u^{p+\theta} \, dx d\tau \\ \leqslant \gamma \frac{2^{ip}}{(\sigma_2 - \sigma_1)^p R^p} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^p \, dx d\tau,\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $a = \frac{(1+\theta)p}{p+m+\theta-2}$. Применяя неравенство Ниренберга — Гальярдо, получаем

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \gamma \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{i+1}|^p \, dx \right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^\mu \, dx \right)^{\frac{1-\alpha}{\mu}}, \tag{2.3}$$

где α определяется из условия $\frac{N}{p} = \frac{(N-p)\alpha}{p} + \frac{N(1-\alpha)}{\mu}$, $\mu = \frac{p}{p+m+\theta-2}$, т. е. $\alpha = \frac{N(p+m+\theta-3)}{N(p+m+\theta-3)+p}$. Возводя (2.3) в степень p и применяя неравенство Юнга, получаем

$$\frac{1}{R^p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^p \, dx \leqslant \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{i+1}|^p \, dx + \gamma R^{-\frac{p}{1-\alpha} \frac{1}{1+\theta}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} v_{i+1} \mu \, dx \right)^{\frac{p}{\mu}}.$$

Интегрируя по времени обе части этого неравенства и замечая, что в силу условия **H**

$$\int\limits_{A_{i+1}} v_{i+1}^{\mu}\,dx = \int\limits_{A_{i+1}} \rho(|x|)\rho(|x|)^{-1}v_{i+1}^{\mu}\,dx \leqslant \gamma\rho(R)^{-1}\int\limits_{A_{i+1}} \rho v_{i+1}^{\mu}\,dx,$$

приходим к неравенству

$$\begin{gathered}\frac{1}{R^p}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^{\mu}dxd\tau \leqslant \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{i+1}|^p\,dxd\tau \\ +\gamma\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}R^{-\frac{p}{1-\alpha}}t\big[\rho(R)\big]^{-\frac{p}{\mu}}\Bigg(\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho v_{i+1}^{\mu}\,dx\Bigg)^{\frac{p}{\mu}}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Следовательно, объединяя (2.2) и (2.4), имеем

$$J_i \leqslant \varepsilon J_{i+1} + \gamma\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}R^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}t\rho(R)^{-\frac{p}{\mu}}\Bigg(\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho v_{\infty}^{\mu}\,dx\Bigg)^{\frac{p}{\mu}}.$$

Итерируя это неравенство, получим

$$J_0 \leqslant \gamma R^{-\frac{p}{1-\alpha}}t\rho(R)^{-\frac{p}{\mu}}\Bigg[\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\rho v_{\infty}^{\mu}\,dx)^{\frac{p}{\mu}}\Bigg]. \tag{2.5}$$

Далее, применяя неравенство Гёльдера, с учетом **H** получаем

$$\begin{gathered}\Bigg[\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{A_0}\rho u\,dx\Bigg] \leqslant \Bigg[\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{A_0}\rho u^{1+\theta}\,dx\Bigg]^{\frac{1}{1+\theta}}\Bigg(\int\limits_{A_0}\rho\,dx\Bigg)^{\frac{\theta}{1+\theta}} \leqslant J_0^{\frac{1}{1+\theta}}\Bigg(\int\limits_{A_0}\rho\,dx\Bigg)^{\frac{\theta}{1+\theta}} \\ \leqslant \gamma R^{-\frac{p}{(1+\theta)(1-\alpha)}}t^{\frac{1}{1+\theta}}\rho(R)^{-\frac{p}{\mu}\frac{1}{1+\theta}+\frac{\theta}{1+\theta}}R^{\frac{N\theta}{1+\theta}}\Bigg[\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{A_{\infty}}\rho u\,dx\Bigg]^{\frac{p}{\mu(1+\theta)}}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Заметим, что

$$A_0 = R\bigg(\frac{1}{2}\bigg) - \sigma_1 < |x| < R(1+\sigma_1), \quad A_{\infty} = R\big(2^{-1}-\sigma_2\big) < |x| < R(1+\sigma_2).$$

Выберем: $\sigma_2 = \delta 2^{-n}$, $\sigma_1 = \delta 2^{-n-1}$, $n = 0,1,\ldots$, $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Тогда после элементарных упрощений и подсчета постоянных находим из (2.6), что

$$M_n := \sup_{0<\tau<1}\int\limits_{B_n}\rho u\,dx \leqslant \gamma b^n t^{\frac{1}{1+\theta}}R^{-\frac{N(p+m-3)+p}{1+\theta}}\rho(R)^{-\frac{p+m-2}{1+\theta}}M_{n-1}^{1+\frac{p+m-3}{1+\theta}},$$

где $B_n = R(\frac{1}{2}) - \delta 2^{-n-1} < |x| < R(1+\delta 2^{-n-1})$. В силу итератированой леммы 2.1 выводим, что $M_n \to 0$, $n \to \infty$, если

$$\gamma t^{\frac{1}{1+\theta}}R^{-\frac{N(p+m-3)+p}{1+\theta}}\rho(R)^{-\frac{p+m-2}{1+\theta}}M_0^{\frac{p+m-3}{1+\theta}} < \varepsilon_1,$$

где ε_1 — достаточно малая постоянная, зависящая лишь от данных задачи. Этого можно добиться подходящим выбором R. Выберем R из следующего равенства:

$$\psi(R) = 2\gamma^{1+\theta} t \widetilde{M}_0^{p+m-3} \varepsilon_1^{-(1+\theta)},$$

или отсюда

$$R = \widetilde{R}(t) = \psi^{(-1)}\big(\Gamma t \widetilde{M}_0^{p+m-3}\big),$$

где $\widetilde{M}_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0 dx$. $\rhd$

Обозначим

$$\begin{gathered} Y_{n+1} := \sup \int\limits_{A_{n+1}} \rho v_{n+1}^a \, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{A_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p \, dx d\tau \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{A_{n+1}} \eta_n^p u^{q+\theta} \, dx d\tau \leqslant \gamma \frac{2^{np}}{\sigma^p R^p} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^p \, dx d\tau, \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$A_n = R_n' < |x| < R_n'', \quad R_n' = \frac{R}{2} - \sigma \frac{R}{2^n}, \; R_n'' = R + \sigma 2^{-n} R, \; \forall \sigma : \; 0 < \sigma < \frac{1}{4},$$

где $\theta > 0$, $b_1 > 2$, $v_n = u^{\frac{p+m+\theta-2}{p}} \eta_n^s$ и η_n — срезающая функция A_n. Справедлива

Лемма 2.4. *В условиях предыдущей леммы имеет место неравенство*

$$Y_{n+1} \leqslant \gamma \frac{2^{np}}{\sigma R^p} \frac{t^{\frac{(1+\theta)p}{\beta+\theta p}}}{\rho(R)^{\frac{p(p+m+\theta-2)}{\beta+\theta p}}} Y_n^{1+\frac{p(p+m-3)}{\beta+\theta p}}, \quad \text{где } \beta = N(p+m-3)+p. \tag{2.8}$$

$\lhd$ В силу неравенства Соболева — Ниренберга — Гальярдо

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \gamma \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \, dx \right)^{\frac{b}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^a \, dx \right)^{\frac{1-b}{a}}.$$

Здесь $0 < b < 1$ определяется из соотношения $\frac{N}{p} = \frac{(N-p)b}{p} + \frac{(1-b)N}{a}$. Значит, $a = \frac{(1+\theta)p}{p+m+\theta-2}$, $b = \frac{N(p+m-3)}{N(p+m-3)+(1+\theta)p}$. Далее, рассуждая как в лемме 2.3, получим

$$\begin{gathered} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^p \, dx d\tau \leqslant \gamma \left(\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \, dx d\tau \right)^b \left(\int\limits_0^t \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^a \, dx \right)^{\frac{p}{a}} d\tau \right)^{1-b} \\ \leqslant \gamma \left(\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \, dx d\tau \right)^b t^{1-b} \left[\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho v_n^a \, dx \right]^{\frac{p}{a}(1-b)} \rho(R)^{-\frac{p}{a}(1-b)} \\ \leqslant \gamma t^{1-b} \rho(R)^{-\frac{p}{a}(1-b)} Y_n^{b+\frac{p}{a}(1-b)}. \end{gathered}$$

Теперь, если воспользоваться аналогичным (2.1) неравенством, придем к требуемому утверждению. $\rhd$

3. Доказательство теоремы 1.1

Имеем

$$E(t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho(|x|)u(x,t)\,dx = \int\limits_{B_R} \rho(|x|)u(x,t)\,dx + \int\limits_{|x|>R} \rho(|x|)u(x,t)\,dx := I_1(R) + I_2(R). \quad (3.1)$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$I_1(R) \leqslant \Bigg(\int\limits_{B_R} u(x,t)^q\,dx\Bigg)^{\frac{1}{q}} \Bigg(\int\limits_{B_R} \rho(x)^{\frac{q}{q-1}}\,dx\Bigg)^{\frac{q-1}{q}}. \quad (3.2)$$

В силу леммы 2.4 и неравенства (1.6) имеем

$$\int\limits_{B_R} u(x,t)^q\,dx \leqslant \mu_1^{-1} \int\limits_{B_R} g(x,t,u)\,dx \leqslant \mu_1^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x,t,u)\,dx = -\mu_1^{-1}\frac{dE}{dt}. \quad (3.3)$$

Следовательно, из (3.1)–(3.3) выводим

$$E(t) \leqslant \mu_1^{-\frac{1}{q}} \Bigg(-\frac{dE}{dt}\Bigg)^{\frac{1}{q}} \varphi_1(R)^{\frac{q-1}{1}} I_2(R), \quad (3.4)$$

где $\varphi_1(R) := \int_{B_R} \rho(|x|)^{\frac{q}{q-1}}dx$. В силу условия **H** $\varphi_1(R) \sim R^N\rho(R)^{\frac{q}{q-1}}$. Для оценки $I_2(R)$ поступим следующим образом. Пусть $R_i = R(1+2^{-i})$, $i = 0,1,2,\dots$ Пусть $\zeta(x)$ — гладкая функция на $(0,\infty)$ и такая, что $\zeta(x) = 1$ для $|x| \geqslant R_i$, $\zeta(x) = 0$ для $|x| \leqslant R_{i+1}$, $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$ для $R_{i+1} < |x| < R_i$. Обозначим $U_i = |x| > R_i$. Умножим теперь обе части (1.1) на $\zeta^s(x)$ и результат проинтегрируем по $\mathbb{R}^N \times [0,t)$. Это даст

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^s(x)\rho(|x|)u(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x,t,u)\zeta^s(x)\,dxd\tau$$
$$= -\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} s\zeta^{s-1} \sum_{i=1}^N a_i(x,t,u,\nabla u)\zeta_{x_i}\,dxd\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^s(x)\rho(|x|)u_0(x)\,dx.$$

В силу (1.4), (1.5) отсюда получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^s\rho u\,dx + \mu_1 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q\zeta^s\,dxd\tau \leqslant s\mu_2 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^{m-1}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\zeta|\zeta^{s-1}\,dxd\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^s\rho u_0\,dx. \quad (3.5)$$

Обозначив первый интеграл справа через $\varepsilon(R,t)$, оценим его по неравенству Гёльдера

$$\varepsilon(R,t) \leqslant \Bigg[\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N \cap \operatorname{supp}\nabla\zeta} \tau^\beta u^{m-1-\theta}|\nabla u|^p\zeta^s\,dxd\tau\Bigg]^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\times \Bigg[\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^{-\beta(p-1)}\zeta^{s-p}|\nabla\zeta|^p u(x,t)\,dxd\tau\Bigg]^{\frac{1}{p}} \equiv I_3^{\frac{p-1}{p}} I_4^{\frac{1}{p}}, \quad (3.6)$$

где $0 < \beta < \frac{1}{p-1}$, $\theta = \frac{2-m}{p-1}$. Заметим, что в силу условия **H** имеет место неравенство

$$
\begin{aligned}
I_4 &\leqslant \sup_{x\in B_{2R}\setminus B_R} \frac{1}{\rho(|x|)} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^{-\beta(p-1)} \zeta^{s-p} |\nabla\zeta|^p \rho u \\
&\leqslant ct^{1-\beta(p-1)} \frac{1}{\rho(R)R^p} \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{U_{i+1}} \rho u(x,\tau)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Далее, для оценки I_3 умножим обе части (1.1) на $\tau^\beta u^{1-\theta}\zeta^s$ и результат проинтегрируем по частям по $\mathbb{R}^N \times (0,t)$. С учетом (1.3)–(1.5) и неравенства Юнга, это даст

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{m-1-\theta} \zeta^s dx d\tau + \mu_1 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{q+1-\theta} |\nabla u|^p \zeta^s dx d\tau \\
&\leqslant \frac{1}{2-\theta} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^{\beta-1} \rho u^{2-\theta} \zeta^s dx d\tau + \frac{\gamma}{R^p} 2^{ip} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{m-1+p-\theta} \zeta^{s-p}\, dx d\tau =: I_5 + I_6.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

В силу неравенства Юнга имеем

$$
I_5 \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{q+1-\theta} \zeta^s\, dx d\tau + C(\varepsilon_1) \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^{\beta - \frac{q-\theta}{q-1}} \rho^{\frac{q-\theta}{q-1}}(|x|) u \zeta^s\, dx d\tau.
$$

Заметим, что второй интеграл в правой части (п. ч.) этого неравенства оценится следующим образом:

$$
\text{п. ч.} \leqslant Ct^{1+\beta-\frac{q-\theta}{q-1}} \rho(R)^{\frac{1-\theta}{q-1}} \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u\rho\zeta^s dx. \tag{3.9}
$$

Далее имеем по неравенству Юнга

$$
I_6 \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{q+1-\theta} \zeta^s dx d\tau + C(\varepsilon_1) 2^{\frac{ip(a+1-\theta)}{q-(p+m-2)}} t^{1+\beta} R^N R^{-\frac{p(q+1-\theta)}{q-(p+m-2)}}. \tag{3.10}
$$

Таким образом, из (3.8)–(3.10) выводим при достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{m-1-\theta} |\nabla u|^p \zeta^s dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{q+1-\theta} \zeta^s dx d\tau \\
&\leqslant Ct^{1+\beta-\frac{q-\theta}{q-1}} \rho(R)^{\frac{1-\theta}{q-1}} \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^s u\rho\, dx + cb^i R^{N-\frac{p(q+1-\theta)}{q-(p+m-2)}} t^{1+\beta},
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

где $b > 1$. Обозначив

$$
\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{U_{i+1}} \rho u\, dx = I_{i+1},
$$

$$
t^{1-\frac{\beta(p-1)}{p}} R^{-1} \rho(R)^{-\frac{1}{p}} = B_1(R,t),
$$

$$t^{\left(1+\beta-\frac{q-\theta}{q-1}\right)\left(\frac{p-1}{p}\right)}\rho(R)^{\frac{1-\theta}{q-1}\frac{p-1}{p}}=B_2(R,t),$$

$$R^{-\frac{(p-1)(q+1-\theta)}{q-(p+m-2)}}t^{\frac{1+\beta}{p}}R^{\frac{N(p-1)}{p}}=B_3(R,t)$$

и объеденив (3.6)–(3.11), получим

$$\varepsilon(R,t)\leqslant\gamma B_1(R,t)\left\{B_2(R,t)\left[\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^s u\rho\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}}+b^iB_3(R,t)\right\}I_{i+1}^{\frac{1}{p}}. \tag{3.12}$$

Оценим (3.12) по неравенству Юнга следующим образом:

$$\varepsilon(R,t)\leqslant\varepsilon_2\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{U_{i+1}}\rho u\,dx+\gamma R^{-\frac{p}{p-1}}\rho^{-\frac{q-(p+m-2)}{(p-1)(q-1)}}\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^s\rho u\,dx$$

$$+b_1^it^{\frac{p}{p-1}}R^{N-\frac{p}{p-1}\frac{qp-1}{q-(p+m-2)}}\rho(R)^{-\frac{1}{p-1}}=\varepsilon_2\mu_{i+1}(t)+\gamma\left[\frac{t}{\rho(R)R^{\frac{p(q-1)}{q-(p+m-2)}}}\right]^{\frac{q-(p+m-2)}{(p-1)(q-1)}} \tag{3.13}$$

$$\times\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^s u\rho\,dx+\gamma b_1^i\frac{t}{\rho(R)R^{\frac{p(q-1)}{q-(p+m-2)}}}\frac{\rho(R)R^N}{R^{\frac{p}{q-(p+m-2)}}}.$$

Имеем

$$\varepsilon(R,t)\leqslant\gamma B_1(R,t)B_2^{\frac{p-1}{p}}(R,t)\left[\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^s u\rho\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}}I_{i+1}^{\frac{1}{p}}+\gamma b^iB_1(R,t)B_3(R,t)I_{i+1}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\varepsilon_1^{\frac{p}{p-1}}\frac{p-1}{p}\left[\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^s u\rho\,dx\right]+\varepsilon_1^{-p}\frac{1}{p}\left[B_1(R,t)B_2^{\frac{p-1}{p}}(R,t)\right]^pI_{i+1}$$

$$+\varepsilon_2^p\frac{1}{p}I_{i+1}+\varepsilon_2^p\frac{1}{p}I_{i+1}+\varepsilon_2^{-\frac{p}{p-1}}\frac{p-1}{p}b^{i\frac{p}{p-1}}\left[B_1(R,t)B_2(R,t)\right]^{\frac{p}{p-1}}.$$

Вычисляя $\left[B_1(R,t)B_2^{\frac{p-1}{p}}(R,t)\right]^p\varepsilon_1^{-p}\frac{1}{p}=\delta$,

$$\text{п.ч.}\leqslant\delta I_{i+1}+\varepsilon_2(\delta)\frac{p-1}{p}b^{i\frac{p}{p-1}}\left[B_1(R,t)B_2(R,t)\right]^{\frac{p}{p-1}},$$

$$I_i\leqslant\delta I_{i+1}+b_1^i\left[B_1(R,t)B_2(R,t)\right]^{\frac{p}{p-1}},$$

выбирая δ настолько малым, что $\delta b_1<1$. Здесь $\mu_i:=\sup_{0<\tau<t}\int_{U_i}\rho u(x,\tau)dx$. Выберем теперь $R=\overline{R}(t)=\Gamma\Phi^{(-1)}(t)$, где Γ достаточно большое число. Тогда $\frac{t}{\Phi(R)}\leqslant\delta(\Gamma)$, где для сколь угодно малого $\delta(\Gamma)$ выполняется $\gamma\delta^{\frac{q-(p+m-2)}{(p-1)(q-1)}}<\frac{1}{4}$. Наконец, из (3.4) и (3.13) выводим

$$\mu_i(t)\,dx\leqslant\gamma\int\limits_{|x|>\overline{R}(t)}u_0\rho\,dx+\delta\mu_{i+1}(t)+\gamma b_2^j\frac{\rho(\overline{R})\overline{R}^N}{\overline{R}(t)^{\frac{p}{q-(p+m-2)}}}.$$

Итерируя это неравенство при достаточно малом $\varepsilon_2>0$, получим оценку

$$\mu_0(t)\leqslant\gamma_1\int\limits_{|x|>\overline{R}(t)}u_0\rho\,dx+\gamma_2\frac{\rho(\overline{R})\overline{R}^N}{\overline{R}(t)^{\frac{p}{q-(p+m-2)}}}:=\overline{E}_2(t).$$

Таким образом, $I_2(R) \leqslant E_2(t)$. Значит, из (3.4) имеем для $0<\tau<t$

$$F(\tau) = E(\tau) - \overline{E}_2(t) \leqslant \mu_i^{-1}\Big(-\frac{dF(\tau)}{d\tau}\Big)^{\frac{1}{q}} R^N(t)\rho\big(\overline{R}(t)\big)^{\frac{q}{q-1}}.$$

Интегрируя это неравенство от 0 до t, приходим к требуемому утверждению. Теорема 1.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1.2

Из (1.1) имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u(x,t)\,dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x,t,u)\,dx. \tag{4.1}$$

Применяя неравенство Гёльдера и (4.1), получаем

$$\int\limits_{B_R} \rho u(x,t)\,dx \leqslant \Big(\int\limits_{B_R} u^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_{B_R} \rho^{\frac{q}{q-1}}\,dx\Big)^{\frac{q-1}{q}} \leqslant \Big(\mu_1\int\limits_{B_R} g(x,t,u)\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_{B_R} \rho^{\frac{q}{q-1}}\,dx\Big)^{\frac{q-1}{q}}$$
$$\leqslant \Big(-\mu_1^{-1}\frac{d}{dt}\int\limits_{B_R} \rho u(x,t)\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_{B_R} \rho^{\frac{q}{q-1}}\,dx\Big)^{\frac{q-1}{q}}. \tag{4.2}$$

Так как носитель начальной функции содержится в шаре B_{R_0}, то согласно лемме 2.3 носитель $u(x,t)$ также содержится в шаре радиуса $\overline{R}(t) = 4R_0 + \gamma\psi(t)$. Следовательно,

$$\Big(\int\limits_{B_R} \rho^{\frac{q}{q-1}}\,dx\Big)^{q-1} \leqslant C_N \overline{R}(t)^{N(q-1)}\rho\big(\overline{R}(t)\big)^q. \tag{4.3}$$

Поскольку по условию теоремы $C_1 \leqslant \rho(R)R^{N-\frac{q}{q-(p+m-2)}} \leqslant C_2$ для всех достаточно больших $R > R_1$, то по определению $\overline{R}(t)$ получим, что при достаточно больших $t > t_1(R_0, \|u_0\rho\|_1)$

$$\overline{R}^{\,N(q-1)}\rho\big(\overline{R}\big)^q \sim t. \tag{4.4}$$

Таким образом, из (4.2), (4.3), (4.4) находим

$$-\frac{d}{dt}\int \rho u(x,t)\,dx \geqslant \gamma t^{-1}\Big(\int \rho u(x,t)\,dx\Big)^q.$$

Интегрируя это неравенство в промежутке $[t_1, t]$, приходим к требуемому утверждению. Теорема 1.2 доказана.

5. Доказательство теоремы 1.3

Прежде всего отметим, что если $\rho(|x|) \sim |x|^{-l}$, $0 \leqslant l < p$, и $\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0}(0)$, $R_0 < \infty$, то для всех $t>0$ имеют место оценки [1]

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant C\|\rho u_0\|_1^{\frac{p}{h_l}} t^{-\frac{N-l}{h_l}}, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{supp} u(x,t) \in B_{\widetilde{R}(t)}(0), \tag{5.2}$$

где $\zeta(t) = 4R_0 + \gamma\|\rho u_0\|^{\frac{p+m-3}{h_l}} t^{\frac{1}{h_l}}$, $h_l = (N-l)(p+m-3)+p-l > 0$. Следовательно, интегрируя (1.1) по $Q(t_1,t_2) = \mathbb{R}^N \times (t_1,t_2)$, $t_1 < t_2$, получаем

$$E(t_1) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u(x,t_1)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u(x,t_2) + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x,t,u)\,dxd\tau$$

$$\leqslant E(t_2) + \mu_2 \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q(x,\tau)\,dxd\tau. \tag{5.3}$$

Учитывая оценки (5.1), (5.2), отсюда имеем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q(x,\tau)\,dxd\tau \leqslant \gamma \int\limits_{t_1}^{t_2} \big\|u(\tau)\big\|_{\infty}^{q-1} \widetilde{R}(\tau)^l\,d\tau \times E(\tau)\,d\tau$$

$$\leqslant \gamma \int\limits_{t_1}^{t_2} E(0)^{\frac{p(q-1)}{h_l}} \Big(4R_0 + \gamma E(0)^{\frac{p+m-3}{h_l}} \tau^{\frac{1}{h_l}}\Big) E(\tau)\,d\tau$$

$$\leqslant \gamma E(t_1) E(0)^{\frac{p(q-1)}{h_l} + \frac{(p+m-3)l}{h_l}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \tau^{-\frac{(N-l)(q-1)}{h_l}} \tau^{\frac{l}{h_l}}\,d\tau \tag{5.4}$$

при условии, что t_1 выбрано настолько большим, что $2R_0 \leqslant \gamma E(0)^{\frac{(p+m-3)l}{h_l}} t_1^{\frac{l}{h_l}}$. Тогда в силу того, что $q > q_l^*$

$$\int\limits_{t_1}^{\infty} \tau^{-\frac{(N-l)(q-1)-l}{h_l}} d\tau < \infty.$$

Следовательно, из (5.4) получаем, что

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q(x,\tau)\,dxd\tau \leqslant \gamma t_1^{-\frac{(N-l)(q-q_l^*)}{h_l}} E(0)^{\frac{p(q-1)+(p+m-3)l}{h_l}} E(t_1). \tag{5.5}$$

Окончательно из (5.3) и (5.5) находим

$$E(t_1) \leqslant E(t_2) + \gamma t_1^{-\frac{(N-l)(q-q_l^*)}{h_l}} E(0)^{\frac{p(q-1)+(p+m-3)l}{h_l}} E(t_1). \tag{5.6}$$

Теперь, выбирая t_1 достаточно большим, имеем

$$\gamma t_1^{-\frac{(N-l)(q-q_l^*)}{h_l}} E(0)^{\frac{p(q-1)+(p+m-3)l}{h_l}} = \frac{1}{2},$$

а из (5.6) поучаем, что

$$E(t_2) \geqslant \gamma E(t^*). \tag{5.7}$$

Осталось показать, что $E(t^*) > 0$.

Лемма 5.1. *Решение* (1.1) *не может удовлетворять условию* $u(x,t_0)\equiv 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^N$ *и* $\forall\, t_0>0$.

$\lhd$ Доказывается точно также как в работах [2, 4]. $\rhd$

Теорема 1.3 доказана.

6. Доказательство теоремы 1.4

Итак, пусть $q=p+m-2$. Нам потребуется следующая лемма Стампаккия.

Лемма 6.1. *Пусть* $\varphi(s)$ *— неубывающая неотрицательная функция, определяемая на* $[k_0,\infty]$, *и такая, что для всех* $l>k\geqslant k_0$ *выполняется*

$$\varphi(l)\leqslant \frac{C}{(l-k)^r}\,\varphi(k), \tag{6.1}$$

где C *и* τ *— положительные постоянные. Тогда для любого* $k>k_0$ *имеет место оценка*

$$\varphi(k)\leqslant \varphi(k_0)\exp\big[1-(Ce)^{-\frac{1}{\tau}}(k-k_0)\big]. \tag{6.2}$$

В силу леммы 2.4

$$Y_{n+1}:=\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{A_{n+1}}\rho u^{1+\theta}dx+\int\limits_0^t\int\limits_{A_{n+1}}u^{\theta+m-2}\,|\nabla u|^p\,dxd\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{A_{n+1}}u^{\theta+m-2}dxd\tau\leqslant\gamma\frac{b^n\,t^{\frac{(1+\theta)p}{\beta+\theta p}}\,Y_n^{1+\frac{(p+m-3)p}{\beta+p\theta}}}{R^p\rho(R)^{\frac{p(p+m+\theta-2)}{\beta+\theta p}}}, \tag{6.3}$$

и, следовательно, $Y_n\to 0$ при условии, что

$$Y_1^{\frac{(p+m-3)p}{\beta+p\theta}}\,t^{\frac{(1+\theta)p}{\beta+\theta p}}R^{-p}\rho(R)^{-\frac{p(p+m+\theta-2)}{\beta+\theta p}}\leqslant\varepsilon,$$

где ε — достаточно малое положительное число, зависящее лишь от параметров задачи. Предыдущее неравенство эквивалентно неравенству

$$Y_1^{p+m-3}\,t^{1+\theta}R^{-(\beta+p\theta)}\rho(R)^{-(p+m+\theta-2)}\leqslant\varepsilon^{\frac{\beta+p\theta}{p}}. \tag{6.4}$$

Пусть

$$\varphi(R):=\int\limits_0^t\int\limits_{|x|>\frac{R}{4}}u^{p+m-2+\theta}dxd\tau.$$

Тогда легко получаем неравенство $\varphi(R)\leqslant\gamma R^{-p}\varphi\big(\frac{R}{2}\big)$. Взяв теперь в лемме $l=R$, $k=\frac{R}{2}$, $\tau=p$, $C=\gamma$, получаем, что

$$\varphi\biggl(\frac{3R}{4}\biggr)\leqslant\gamma\left[\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}u^{p+m+\theta-2}dxd\tau\right]\exp(-\gamma R).$$

Далее заметив, что $\rho u_0 \in L_{1+\theta}$, имеем

$$\frac{1}{1+\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u^{1+\theta}dx+\mu_1\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}u^{m+\theta-2}\,|\nabla u|^p dxd\tau+\mu_1\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}u^{p+m+\theta-2}dxd\tau\leqslant\frac{1}{1+\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u_0^{1+\theta}dx.$$

Следовательно,

$$\varphi\Big(\frac{3R}{4}\Big)\leqslant\gamma\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u_0^{1+\theta}dx\right)\exp(-\gamma R).$$

Таким образом, (6.4) удовлетворится, если

$$t^{1+\theta}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u_0^{1+\theta}dx\right)^{p+m-3}\exp\big(-\gamma(p+m-3)R\big)R^{-(\beta+p\theta)}\rho(R)^{-(p+m+\theta-2)}\leqslant\varepsilon_1,\qquad(6.5)$$

где ε_1 достаточно мало. Очевидно, что (6.5) будет выполнено, если для достаточно больших $t>0$ выбрать R следующим образом: $R\geqslant R(t):=\Gamma\log t$, где $\Gamma=\Gamma(\|u_0\rho\|_{1+\theta},\varepsilon_1)$ — достаточно большая константа. Тогда мы приходим к замечанию, что $u=0$ вне шара $B_{\Gamma\log t}$. Для доказательства теоремы осталось оценить массу решения для достаточно больших t. В силу неравенства Гёльдера

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u\,dx\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u^{1+\theta}dx\right)^{\frac{1}{1+\theta}}\left(\int\limits_{B_{\Gamma\log t}}\rho\,dx\right)^{\frac{\theta}{1+\theta}}.\qquad(6.6)$$

Следовательно, оценка массы сводится к оценке интеграла

$$E_{1+\theta}(t):=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u^{1+\theta}dx.$$

Интегрируя (1.1) по $\mathbb{R}^N$ легко получить неравенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u^{1+\theta}dx\leqslant-\gamma\int\limits_{\mathbb{R}^N}u^{p+m+\theta-2}dx.\qquad(6.7)$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u^{1+\theta}dx\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}u^{p+m+\theta-2}dx\right)^{\frac{1+\theta}{p+m+\theta-2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho^{\frac{p+m+\theta-2}{p+m-3}}dx\right)^{\frac{p+m-3}{p+m+\theta-2}},\qquad(6.8)$$

$$\frac{d}{dt}E_{1+\theta}(t)\leqslant-\gamma D(T)^{-\frac{D+m-3}{1+\theta}}E_{1+\theta}^{\frac{p+m+\theta-2}{1+\theta}}(t),\quad 0<t<T,\qquad(6.9)$$

где $D(T)=\int_{B_{\Gamma\log T}}\rho^{\frac{p+m+\theta-2}{p+m-3}}(x)dx$. Интегрируя (6.9) в пределах от 0 до T, получаем, что

$$E_{1+\theta}(T)\leqslant\gamma T^{-\frac{1+\theta}{p+m-3}}D(T).$$

Наконец, объединяя это неравенство с (6.6), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u(x,T)\,dx \leqslant \gamma\Bigg(\int\limits_{B_{\Gamma\log T}} \rho\,dx\Bigg)^{\frac{\theta}{1+\theta}} T^{-\frac{1}{p+m-3}}\Bigg(\int\limits_{B_{\Gamma\log T}} \rho^{\frac{p+m+\theta-2}{p+m-3}}(x)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{1+\theta}}$$
$$= \gamma\rho^{\frac{p+m-2}{p+m-3}}(\log T)(\log T)^N T^{-\frac{1}{p+m-3}}.$$

Теорема 1.4 доказана.

7. Доказательство теоремы 1.5

Из неравенства (2.7) следует, что

$$Y_{n+1} := \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{A_{n+1}} \rho v_{n+1}^a dx + \int\limits_0^t \int\limits_{A_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{A_{n+1}} v_{n+1}^\nu dx d\tau$$
$$\leqslant \gamma \frac{2^n p}{\sigma^p R^p} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^p\,dx d\tau, \tag{7.1}$$

где $a = \frac{(1+\theta)p}{p+m+\theta-2}$, $\nu = \frac{(q+\theta)p}{p+m+\theta-2}$.

Далее, условие $q < p+m-2$ позволяет применить тройное мультипликативное неравенство типа Соболева — Ниренберга — Гальярдо. Для получения этого неравенства поступим следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx \leqslant \gamma \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx\Bigg)^B \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^b dx\Bigg)^{\frac{(1-B)p}{b}}, \tag{7.2}$$

где B определяется из соображения размерности

$$\frac{N}{p} = \frac{(N-p)B}{p} + \frac{N(1-B)}{b}, \ \ a<b<\nu, \quad a = \frac{(1+\theta)p}{p+m+\theta-2}, \ \nu = \frac{p(q+\theta)}{p+m+\theta-2}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^b dx \leqslant \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^\nu dx\Bigg)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^a dx\Bigg)^{\frac{b-a}{\nu-a}}. \tag{7.3}$$

Соединяя неравенства (7.2) и (7.3), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx \leqslant \gamma \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx\Bigg)^B \Bigg(\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^\nu dx\Bigg)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^a dx\Bigg)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}}\Bigg)^{\frac{(1-B)p}{b}}. \tag{7.4}$$

Теперь подберем параметр b так, что

$$B + \frac{(1-B)p}{b}\frac{(\nu-b)}{\nu-a} = 1. \tag{7.5}$$

Вычисления дают

$$B = \frac{N(p-b)}{N(p-b)+bp}, \quad b = \frac{p\nu}{p-a+\nu}.$$

Замечая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^a dx \leqslant \gamma\rho(R)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho v_n^a dx$$

и интегрируя по времени (7.4) с учетом (7.5), получаем

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^p dxd\tau \leqslant \gamma\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dxd\tau t\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^\nu dxd\tau\right) \\ \times\left(\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho v_n^a dx\right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}\frac{(1-B)p}{b}}\rho(R)^{-\frac{\nu-b}{\nu-a}\frac{(1-B)p}{b}}. \tag{7.6}$$

Следовательно, из (7.1) и (7.6) вытекает

$$Y_{n+1} \leqslant \frac{\gamma 2^{np}}{(\sigma R)^p}\rho(R)^{-\frac{b-a}{\nu-a}\frac{(1-B)p}{b}}Y_n^{1+\frac{\nu-b}{\nu-a}}, \quad Y_n \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Вычисления дают

$$Y_1 = \sup_{0<\tau<t}\int\limits_{A_1}\rho u^{1+\theta}dx + \int\limits_0^t\int\limits_{A_1}\left|\nabla u^{\frac{p+m+\theta-2}{p}}\right|^p dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{A_1} u^{q+\theta}dxd\tau \leqslant \gamma\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u_0^{1+\theta}\,dx,$$

$$R^p\rho^{-\frac{b-a}{\nu-a}\frac{1-B}{b}p}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u_0^{1+\theta}dx\right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}} \leqslant \varepsilon_1. \tag{7.7}$$

Пользуясь условиями **H**, легко проверить, что

$$R^{-p}\rho^{-\frac{b-a}{\nu-a}\frac{1-B}{b}p}(R) \leqslant \gamma R^{-p}\rho(R) \leqslant \gamma R^{-(p-\sigma)}, \quad \sigma < p.$$

Следовательно, (7.7) выполнено, если

$$\widetilde{R}^{-(p-\sigma)}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u_0^{1+\theta}dx\right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}} = \frac{\varepsilon_1}{2},$$

т. е.

$$\widetilde{R} = \left\{\frac{2\gamma_*}{\varepsilon_1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u_0^{1+\theta}dx\right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}}\right\}^{\frac{1}{p-\sigma}},$$

$u(x,t) = 0$ вне шара радиуса $R = 4R_0 + \widetilde{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho u\,dx \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho^{\frac{q}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \leqslant \gamma\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q dx \geqslant \gamma \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u \, dx \right)^q .$$

Интегрируя уравнение (1.1) по $\mathbb{R}^N$ и учитывая (1.5), получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u \, dx \leqslant -\mu_1 \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q dx \leqslant -\mu_1 \gamma \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u \, dx \right)^q .$$

Интегрируя это неравенство, имеем

$$\frac{dE}{E^q} \leqslant -\mu_1 \gamma \, dt,$$

$$\frac{1}{1-q} \left(E^{1-q}(t) - E^{1-q}(0) \right) \leqslant -\mu_1 \gamma t.$$

Отсюда следует, что при $t > 0$

$$E(t) \leqslant \gamma t^{-\frac{1}{q-1}},$$

что и требовалось доказать. Теорема 1.5 доказана.

Литература

1. *Tedeev A. F.* The interface blow-up phenomenon and local estimates for doubly degenerate parabolic equations // Appl. Anal.—2007.—Vol. 86, № 6.—P. 755–782. DOI: 10.1080/00036810701435711.
2. *Andreucci D., Tedeev A. F., Ughi M.* The Cauchy problem for degenerate parabolic equations with source and damping // Ukr. Math. Bull.—2004.—Vol. 1, № 1.—P. 1–23.
3. *Ben-Artzi B., Koch H.* Decay of mass for a semilinear parabolic equation // Commun. Partial Differ. Equ.—1999.—Vol. 24, № 5–6.—P. 869–881. DOI: 10.1080/03605309908821450.
4. *Skrypnik I., Tedeev A. F.* Decay of the mass of the solution to Cauchy problem of the degenerate parabolic equation with nonlinear potential // Complex Var. Elliptic Equ.—2018.—Vol. 63, № 1.—P. 90–115. DOI: 10.1080/17476933.2017.1286331.
5. *Kamin S., Rosenau P.* Propagation of thermal waves in an inhomogeneous medium // Commun. Pure Appl. Math.—1981.—Vol. 34, № 6.—P. 831–852. DOI: 10.1002/cpa.3160340605.
6. *Kamin S., Rosenau P.* Nonlinear diffusion in finite mass medium // Commun. Pure Appl. Math.—1982.—Vol. 35, № 1.—P. 113–127. DOI: 10.1002/cpa.3160350106.
7. *Kamin S., Kersner R.* Disappearance of interfaces in finite time // Mechanica.—1993.—Vol. 28, № 2.—P. 117–120. DOI: 10.1007/BF01020323.
8. *Eidus D., Kamin S.* The filtration equation in class of functions decreasing at infinity // Proc. Amer. Math. Soc.—1994.—Vol. 120, № 3.—P. 825–830. DOI: 10.1090/S0002-9939-1994-1169025-2.
9. *Galaktionov V. A., Kamin S., Kersner R., Vazquez J. L.* Intermediate asymptotics for inhomogeneous nonlinear heat conduction // J. Math. Sci.—2004.—Vol. 120, № 3.—P. 1277–1294. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000016049.94192.aa.
10. *Guedda M., Hihorst D., Peletier M. A.* Disappearing interfaces in nonlinear diffusion // Adv. Math. Sci. Appl.—1997.—Vol. 7, № 2.—P. 695–710.
11. *Мартыненко А. В., Тедеев А. Ф.* Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с источником и неоднородной плотностью // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2007.—Т. 47, № 2.—С. 245–255.
12. *Мартыненко А. В., Тедеев А. Ф.* О поведении решений задачи Коши для вырождающегося параболического уравнения с неоднородной плотностью и источником // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2008.—Т. 48, № 7.—С. 1214–1229.
13. *Reyes G., Vazquez J. L.* The inhomogeneous PME in several space dimensions. existence and uniqueness of finite energy solutions // Commun. Pure Appl. Anal.—2008.—Vol. 7, № 6.—P. 1275–1294. DOI: 10.3934/cpaa.2008.7.1275.

14. *Reyes G., Vazquez J. L.* Long time behavior for the inhomogeneous PMI in a medium with slowly decaying density // Commun. Pure Appl. Anal.—2009—Vol. 8, № 2.—P. 493–508. DOI: 10.3934/cpaa.2009.8.493.
15. *Kamin S., Reyes G., Vazquez J. L.* Long time behavior for the inhomogeneous PME in a medium with rapidly decaying density // Discrete Contin. Dyn. Syst.–A.—2010.—Vol. 26, № 2.—P. 521–549. DOI: 10.3934/dcdc.2010.26.521.
16. *Benachour S., Laurentcot Ph.* Global Solutions to viscous Hamilton–Jacobi equations with irregular initial data // Commun. Partial Differ. Equ.—1999.—Vol. 24, № 11–12.—P.1999–2021. DOI: 10.1080/03605309908821492.
17. *Di Benedetto E.* Degenerate parabolic equations.—New York: Springer–Verlag, 1993.—387 p.
18. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Differ. Equ.—2005.—Vol. 10, № 1.—P. 89–120.

Статья поступила 31 июля 2019 г.

Бесаева Зарина Вячеславовна
Юго-Осетинский государственный университет им. А. А. Тибилова,
старший преподаватель
Республика Южная Осетия, 100001, Цхинвал, ул. Путина, 8
E-mail: besaeva.85@mail.ru

Тедеев Анатолий Федорович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: a_tedeev@yahoo.com
https://orcid.org/0000-0001-7883-9795

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 12–32

THE DECAY RATE OF THE SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH ABSORPTION

Besaeva, Z. V.[1] and Tedeev, A. F.[2]

[1]South Ossetian State University named after A. A. Tibilov,
8 Putin St., Tskhinval 100001, South Ossetia;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: besaeva.85@mail.ru, a_tedeev@yahoo.com

Abstract. This work deals with the Cauchy problem for a wide class of quasilinear second-order degenerate parabolic equations with inhomogeneous density and absorption terms. It is well known that for the problem under consideration but without absorption term and when the density tends to zero at infinity not very fast the mass conservation law holds true. However that fact is not always valid with an absorption term. In this paper, the precise conditions on both the structure of nonlinearity and inhomogeneous density which guarantee the decay to zero of the total mass of solution as time goes to infinity is established. In other words the criteria of stabilization to zero of the total mass for a large time is established in terms of critical exponents. As a consequence of obtained results and local Nash-Mozer estimates the sharp sup bound of a solution is done as well.

Key words: the Cauchy problem, degenerate parabolic equations, inhomogeneous density, absorbtion, critical exponents.

Mathematical Subject Classification (2010): 35K92, 35B33, 35E15.

For citation: *Besaeva, Z. V. and Tedeev, A. F.* The Decay Rate of the Solution to the Cauchy Problem for Doubly Nonlinear Parabolic Equation with Absortion, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 31–32 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57535.

References

1. *Tedeev, A. F.* The Interface Blow-up Phenomenon and Local Estimates for Doubly Degenerate Parabolic Equations, *Applicable Analysis*, 2007, vol. 86, no. 6, pp. 755–782. DOI: 10.1080/00036810701435711.
2. *Andreucci, D., Tedeev, A. F. and Ughi, M.* The Cauchy Problem for Degenerate Parabolic Equations with Source and Damping, *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 2004, vol. 1, no. 1, pp. 1–23.
3. *Ben-Artzi, B. and Koch, H.* Decay of Mass for a Semilinear Parabolic Equation, *Communications in Partial Differential Equations* 1999, vol. 24, no. 5–6, pp. 869–881. DOI: 10.1080/03605309908821450.
4. *Skrypnik, I. and Tedeev A. F.* Decay of the Mass of the Solution to Cauchy Problem of the Degenerate Parabolic Equation with Nonlinear Potential, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2018, vol. 63, no. 1, pp. 90–115. DOI: 10.1080/17476933.2017.1286331.
5. *Kamin, S. and Rosenau, P.* Propagation of Thermal Waves in an Inhomogeneous Medium, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1981, vol. 34, no. 6, pp. 831–852. DOI: 10.1002/cpa.3160340605.
6. *Kamin, S. and Rosenau, P.* Nonlinear Diffusion in Finite Mass Medium, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1982, vol. 35, no. 1, pp. 113–127. DOI: 10.1002/cpa.3160350106.
7. *Kamin, S. and Kersner, R.* Disappearance of Interfaces in Finite Time *Mechanica*, 1993, vol. 28, no. 2, pp. 117–120. DOI: 10.1007/BF01020323.
8. *Eidus, D. and Kamin, S.* The Filtration Equation in Class of Functions Decreasing at Infinity, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1994, vol. 120, no. 3, pp. 825–830. DOI: 10.1090/S0002-9939-1994-1169025-2.
9. *Galaktionov, V. A., Kamin, S., Kersner, R. and Vazquez, J. L.* Intermediate Asymptotics for Inhomogeneous Nonlinear Heat Conduction, *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 120, no. 3, pp. 1277–1294. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000016049.94192.aa.
10. *Guedda, M., Hihorst, D. and Peletier, M. A.* Disappearing Interfaces in Nonlinear Diffussion, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 1997, vol. 7, no. 2, pp. 695–710.
11. *Martynenko, A. V. and Tedeev, A. F.* Cauchy Problem for Quasilinear Parabolic Equation with a Source Term and an Inhomogeneous Density, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 2, pp. 238–248. DOI: 10.1134/s096554250702008x.
12. *Martynenko, A. V. and Tedeev, A. F.* On the Behavior of Solutions to the Cauchy Problem for a Degenerate Parabolic Equation with Inhomogeneous Density and a Source, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 7, pp. 1145–1160. DOI: 10.1134/s0965542508070087.
13. *Reyes, G. and Vazquez, J. L.* The Inhomogeneous PME in Several Space Dimensions. Existence and Uniqueness of Finite Energy Solutions, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2008, vol. 7, no. 6, pp. 1275–1294. DOI: 10.3934/cpaa.2008.7.1275.
14. *Reyes, G. and Vazquez, J. L.* Long Time Behavior for the Inhomogeneous PMI in a Medium with Slowly Decaying Density, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2009, vol. 8, no. 2, pp. 493–508. DOI: 10.3934/cpaa.2009.8.493.
15. *Kamin, S., Reyes, G. and Vazquez, J. L.* Long Time Behavior for the Inhomogeneous PME in a Medium with Rapidly Decaying Density, *Discrete and Continuous Dynamical Systems–A*, 2010, vol. 26, no. 2, pp. 521–549. DOI: 10.3934/dcdc.2010.26.521.
16. *Benachour, S. and Laurentcot, Ph.* Global Solutions to Viscous Hamilton–Jacobi Equations with Irregular Initial Data, *Communications in Partial Differential Equations*, 1999, vol. 24, no. 11–12, pp. 1999–2021. DOI: 10.1080/03605309908821492.
17. *Di Benedetto, E. Degenerate Parabolic Equations*, New York, Springer–Verlag, 1993, 387 p.
18. *Andreucci, D. and Tedeev, A. F.* Universal Bounds at the Blow-Up Time for Nonlinear Parabolic Equations, *Advances in Differential Equations*, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 89–120.

Received 31 July, 2019

Zarina V. Besaeva
South Ossetian State University named after A. A. Tibilov,
8 Putin St., Tskhinval 100001, South Ossetia,
Senior Lecturer
E-mail: besaeva.85@mail.ru
Anatoly F. Tedeev
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher
a_tedeev@yahoo.com
https://orcid.org/0000-0001-7883-9795