Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 5–17

УДК 517.5
DOI 10.46698/n6807-7263-4866-r

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ «КРУГОВЫМИ» СУММАМИ ФУРЬЕ — ЧЕБЫШЕВА В $L_{2,\rho}$

О. А. Джурахонов[1]

[1] Таджикский национальный университет,
Россия, 734025, Таджикистан, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: `olim74@tajnet.tj`

Аннотация. В работе вычислены точные верхние грани приближения функций двух переменных круговыми частичными суммами двойного ряда Фурье — Чебышева на классе функций $L_{2,\rho}^{(r)}(D)$, $r \in \mathbb{N}$, в пространстве $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(Q)$, где $\rho := \rho(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $Q := \{(x,y) : -1 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, D — оператор Чебышева — Эрмита второго порядка. Получены точные неравенства, в которых величины наилучших полиномиальных приближений оцениваются сверху посредством усредненных с весом значений обобщенных модулей непрерывности m-го порядка производной $D^r f$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ в метрике пространства $L_{2,\rho}$. Даны точные оценки наилучших приближений двойного ряда Фурье по ортогональным системам Фурье — Чебышева на классах функций многих переменных, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности. Так как, в отличие от одномерного случая для двойных рядов, нет естественного способа построения частичных сумм, то мы строим некоторые классы функций, а затем соответствующий метод приближения — «круговые» частичные суммы двойного ряда Фуре — Чебышева. В вопросах, связанных с разложениями функций в ряд Фурье по тригонометрической системе и оценки их наилучших приближений, большую роль играют операторы сдвига. В работе, указывая на некоторые ранее известные результаты, построен оператор обобщенного сдвига, который позволяет определить класс функций, характеризующийся обобщенным модулем непрерывности. На этих классах вычислена верхняя грань значений, наилучшее среднеквадратическое приближение некоторых классов функций «круговыми» частичными суммами двойных рядов Фурье — Чебышева.

Ключевые слова: среднеквадратичное приближение, обобщенный модуль непрерывности, двойной ряд Фурье — Чебышева, неравенство типа Колмогорова, оператор сдвига.

Mathematical Subject Classification (2010): 30E10.

Образец цитирования: *Джурахонов О. А.* Приближение функций двух переменных «круговыми» суммами Фурье — Чебышева в $L_{2,\rho}$ // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 5–17. DOI: 10.46698/n6807-7263-4866-r.

1. Введение

Классические многочлены Чебышева имеют многочисленные применения в экстремальных задачах теории аппроксимации и прикладной математике. Так, например, хорошо известна роль многочленов Чебышева при минимизации остатка квадратурных формул, при приближенном решении дифференциальных и интегральных уравнений, а также в задачах интерполяции функций (см., например, монографии [1–4]). Что же касается работ, посвященных применению многочленов Чебышева двух и большего числа переменных в прикладных задачах, то их совсем мало. Укажем работы [3–7], где вводятся и изучаются многочлены Чебышева многих переменных, рассматриваются некоторые практические применения многочленов Чебышева двух переменных. В [8] изучается ряд теоретических вопросов, связанных с разложениями функций двух переменных в двойных рядах Фурье по многочленам Чебышева, и исследуются их скорости сходимости, а также оценка их остаточных членов.

Настоящая статья продолжает указанную тематику и посвящена вопросам вычисления верхних граней приближения в среднем двойными суммами Фурье — Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных. При этом важную роль играет оператор обобщенного сдвига, соответствующий многочленам Чебышева двух переменных, и введенный на основе этого оператора обобщенный модуль непрерывности. В некоторых задачах аппроксимации операторы обобщенного сдвига и построенные по ним обобщенные модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения структурных и конструктивных свойств функций, чем обычные модули гладкости. Некоторые точные результаты о приближении функций с использованием операторов обобщенного сдвига можно найти в работах [8–12] и в цитируемой в этих работах литературе.

2. Необходимые определения и предварительные факты

Приведем необходимые для дальнейшего определения и предварительные факты. Пусть в $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(Q)$, где

$$Q = \{(x,y):\ -1 \leqslant x, y \leqslant 1\}, \quad \rho := \rho(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},$$

пространство функций f двух переменных, суммируемых с квадратом в области Q с весом ρ и нормой

$$\|f\|_{2,\rho} := \|f\|_{L_{2,\rho}} = \left(\iint\limits_{Q} \rho(x,y) f^2(x,y)\, dxdy\right)^{1/2}.$$

В пространстве $L_{2,\rho}$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} F_h f(x,y) = \frac{1}{4}\Big[& f\Big(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h + \sqrt{1-y^2}\sin h\Big) \\ & + f\Big(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h - \sqrt{1-y^2}\sin h\Big) \\ & + f\Big(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h + \sqrt{1-y^2}\sin h\Big) \\ & + f\Big(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h - \sqrt{1-y^2}\sin h\Big)\Big], \end{aligned} \tag{1}$$

который будем называть *оператором обобщенного сдвига.*

Следуя работе [8], определим разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h(f) := \Delta_h(f; x, y) = F_h f(x,y) - f(x,y) = (F_h - E) f(x,y),$$

$$\begin{aligned} \Delta_h^k(f) := \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1}(f)\right) = \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1}(f;\cdot,\cdot), x, y\right) \\ = (F_h - E)^k f(x,y) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x,y), \end{aligned}$$

где

$$F_h^0 f(x,y) = f(x,y), \quad F_h^i f(x,y) = F_h(F_h^{i-1} f(x,y)) \quad (i = 1,\dots,k,\ k \in \mathbb{N},\ 0 < h < 1),$$

и E — единичный оператор в $L_{2,\rho}$. Величину

$$\Omega_m(f,t)_{2,\rho} := \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f)\|_{2,\rho} : 0 < h \leqslant t\Big\}, \quad 0 < t < 1, \tag{2}$$

будем называть *обобщенным модулем непрерывности* m-го порядка функции $f \in L_{2,\rho}$. Далее, мы предположим, что функция $f \in L_{2,\rho}$ имеет обобщенные частные производные в смысле Леви [13, с. 172]. Введем операторы

$$D_x := (1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y := (1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial y},$$

и положим

$$D := (1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} := D_x + D_y$$

— дифференциальный оператор Чебышева второго порядка по переменным x и y. Рассмотрим $L_{2,\rho}^{(r)} := L_{2,\rho}^{(r)}(D)$ — класс функций $f \in L_{2,\rho}$, имеющих обобщенные частные производные

$$\frac{\partial^k}{\partial x^{k-i}\partial y^i} f(x,y) \quad (i = 0,1,\dots,k;\ k = 1,2,\dots,2r,\ r \in \mathbb{N})$$

в смысле Леви, принадлежащие пространству $L_{2,\rho}$, и для которых $\|D^r f\|_{2,\rho} < \infty$, где, как обычно, $D^0 f \equiv f$, $D^r f \equiv D(D^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n \arccos x), \quad n = 1,2,\dots,$$

— ортонормированная система многочленов Чебышева [14, с. 76] в пространстве $L_{2,\rho}$. Разложим функцию f в двойной ряд Фурье — Чебышева:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y), \tag{3}$$

где

$$c_{kl}(f) = \iint\limits_{(Q)} \rho(x,y) f(x,y) T_k(x) T_l(y)\, dx\, dy \tag{4}$$

— коэффициенты Фурье — Чебышева функции $f \in L_{2,\rho}$, а равенство в (3) понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$. Обозначим символом

$$S_R(f; x,y) := \sum_{0 \leqslant k^2+l^2 < R^2} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y)$$

«круговые» частные суммы ряда (3), и пусть

$$E_R(f)_{2,\rho} := E_R(f)_{L_{2,\rho}} = \inf\big\{\|f - p_R\|_{2,\rho} : p_R \in \mathscr{P}_R\big\}$$

— наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\rho}$ множеством $\mathscr{P}_R$-алгебраических полиномов вида

$$p_R(x,y) = \sum_{0 \leqslant k^2+l^2<R^2} a_{kl} x^k y^l, \quad R > 0, \tag{5}$$

в пространстве $L_{2,\rho}$. Хорошо известно, что

$$E_R(f)_{2,\rho} := \inf\left\{\|f - p_R\|_{2,\rho} : p_R(x,y) \in \mathscr{P}_R\right\} = \|f - S_R(f)\|_{2,\rho} = \left\{\sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} c_{kl}^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{6}$$

В [8] доказано, что для произвольной $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$ имеет место равенство

$$\|\Delta_h^m(D^r f)\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(1 - \cos kh \cos lh)^{2m}(k^2 + l^2)^{2r} c_{kl}^2(f). \tag{7}$$

Легко проверить, что

$$DT_k(x)T_l(y) = -(k^2 + l^2)T_k(x)T_l(y). \tag{8}$$

Применяя метод математической индукции, из (8) получаем

$$D^r T_k(x)T_l(y) = (-1)^r (k^2 + l^2)^r T_k(x)T_l(y). \tag{9}$$

Учитывая (9), из (3) после r-кратного применения оператора D имеем

$$D^r f(x,y) = (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k^2 + l^2)^r c_{kl}(f) T_k(x)T_l(y). \tag{10}$$

Очевидно, что для любой $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ полученный двойной ряд в (10) сходится в смысле пространства $L_{2,\rho}$. Поэтому он будет служить рядом Фурье — Чебышева функции $D^r f \in L_{2,\rho}$ (см., например, [15, с. 169]). Пользуясь равенством Парсеваля, из (10) будем иметь

$$\|D^r f\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k^2 + l^2)^{2r} c_{kl}^2(f).$$

Кроме того, очевидно

$$E_R^2(D^r f)_{2,\rho} = \sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} c_{kl}^2(D^r f) = \sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} (k^2 + l^2)^{2r} c_{kl}^2(f). \tag{11}$$

Условимся далее при вычислении верхних граней по всем функциям $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ в соотношениях общего характера подразумевать, что $D^r f \neq p_R$, $D \neq 0$.

Лемма 1. *При любом $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_R(f)_{2,\rho}}{E_R(D^r f)_{2,\rho}} = \frac{1}{R^{2r}}. \tag{12}$$

$\lhd$ Пользуясь равенствами (6) и (11), для произвольной $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ получаем

$$E_R^2(f)_{2,\rho} = \sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} c_{kl}^2(f) = \sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} \frac{1}{(k^2 + l^2)^{2r}}(k^2 + l^2)^{2r} c_{kl}^2(f)$$
$$\leqslant \frac{1}{R^{4r}} \sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} (k^2 + l^2)^{2r} c_{kl}^2(f) = \frac{1}{R^{4r}} E_R^2(D^r f)_{2,\rho}.$$

Отсюда следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (12):

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_R(f)_{2,\rho}}{E_R(D^r f)_{2,\rho}} \leqslant \frac{1}{R^{2r}}. \tag{13}$$

С целью получения оценки снизу той же величины рассмотрим функцию

$$f_0(x,y) = \frac{1}{R^{2r}} T_0(x) T_R(y), \tag{14}$$

которая очевидно принадлежит классу $L_{2,\rho}^{(r)}$, поскольку для функции f_0 имеем

$$D^r f_0(x,y) = (-1)^r T_0(x) T_R(y),$$

и в силу формул (6) и (11)

$$E_R(f_0)_{2,\rho} = \frac{1}{R^{2r}}, \quad E_R(D^r f_0)_{2,\rho} = 1. \tag{15}$$

Пользуясь равенствами (15), запишем оценку снизу для экстремальной характеристики, стоящей в левой части неравенства (13):

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_R(f)_{2,\rho}}{E_R(D^r f)_{2,\rho}} \geqslant \frac{E_R(f_0)_{2,\rho}}{E_R(D^r f_0)_{2,\rho}} = \frac{1}{R^{2r}}. \tag{16}$$

Из сопоставления оценки сверху (13) и оценки снизу (16) получаем требуемое равенство (12). $\rhd$

Пусть

$$W_{2,\rho}^{(r)}(D) := \left\{ f \in L_{2,\rho}^{(r)}(D) : \|D^r(f)\|_{2,\rho} \leqslant 1 \right\}.$$

Теорема 1. *При любом $r \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$E_R\left(W_{2,\rho}^{(r)}(D)\right)_{2,\rho} := \sup\left\{ E_R(f)_{2,\rho} : \, f \in W_{2,\rho}^{r}(D) \right\} = \frac{1}{R^{2r}}. \tag{17}$$

$\lhd$ Так как для любого $f \in W_{2,\rho}^{(r)}(D)$

$$E_R(D^r f)_{2,\rho} \leqslant \|D^r f\|_{2,\rho} \leqslant 1,$$

то из неравенства (13) для произвольной функции $f \in W_{2,\rho}^{(r)}(D)$ получаем

$$E_R(f)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{R^{2r}} E_R(D^r f)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{R^{2r}},$$

откуда и следует оценка сверху:

$$E_R\left(W_{2,\rho}^{(r)}(D)\right)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{R^{2r}}. \tag{18}$$

С целью получении оценки снизу введем снова в рассмотрение функцию (14), для которой имеют место равенства (15). Пользуясь первым из равенств (15), запишем оценку снизу:

$$E_R\left(W_{2,\rho}^{(r)}(D)\right)_{2,\rho} \geqslant E_R(f_0)_{2,\rho} = \frac{1}{R^{2r}}, \tag{19}$$

и так как $\|D^r f_0\| = 1$, то введенная при доказательстве леммы 1 функция f_0, определенная равенством (14), принадлежит классу $W_{2,\rho}^{(r)}(D)$.

Требуемое равенство (17) получаем из сопоставления неравенств (18) и (19), чем и завершаем доказательство теоремы 1. $\rhd$

3. Некоторые точные результаты

При решении различных экстремальных задач теории аппроксимации функций важную роль играют неравенства между нормами последовательных производных функций или неравенства типа Колмогорова в различных банаховых пространствах. Если $\mathbb{S}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{S}=\mathbb{R}_+$, то неравенство Колмогорова для функций одной переменной имеет вид [16, 17]

$$\|f^{(s)}\|_{L_p(\mathbb{S})} \leqslant M\|f\|^{\alpha}_{L_q(\mathbb{S})}\cdot\|f^{(r)}\|^{\beta}_{L_\gamma(\mathbb{S})}, \tag{20}$$

где

$$\alpha=\frac{r-s-1/\gamma+1/p}{r-1/\gamma+1/q}, \quad \beta=1-\alpha,\ 1\leqslant p,q,\gamma\leqslant\infty.$$

Следует отметить, что различные неравенства типа (20) с точными константами приведены в монографии [16]. В статье [17] приведен подробный обзор всех результатов о неравенствах вида (20), где получены наилучшие константы и анализируется связь задачи Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования D^k порядка k с неравенством (20). Отметим, что неравенства типа (20) с точными константами для функций двух переменных найдены в недавно опубликованных работах [18–20]. Здесь докажем точное неравенство Колмогорова для функций $f\in L^{(r)}_{2,\rho}(D)$ в пространстве $L_{2,\rho}$. Поскольку функция $f\in L^{(r)}_{2,\rho}$ и ее промежуточные производные D^sf, $s=1,2,\ldots,r-1$, $r\in\mathbb{N}$, принадлежат также пространству $L_{2,\rho}$, то представляет несомненный интерес изучение поведения наилучших приближений $E_R(D^sf)$, $s=1,2,\ldots,r-1$, $r\in\mathbb{N}$, на классе $L^{(r)}_{2,\rho}(D)$.

Теорема 2. *Пусть $r,s\in\mathbb{N}$, $r\geqslant s$. Тогда для произвольной функции $f\in L^{(r)}_{2,\rho}$ справедливо точное в $L_{2,\rho}$ неравенство*

$$\|D^sf\|_{2,\rho}\leqslant\|D^rf\|^{s/r}_{2,\rho}\|f\|^{1-s/r}_{2,\rho}. \tag{21}$$

$\lhd$ В самом деле, в силу линейности оператора D^s из равенства (3) с учетом равенства (9) имеем

$$D^sf(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^s(k^2+l^2)^s c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y).$$

Применяя равенство Парсеваля, запишем

$$\|D^sf\|^2_{2,\rho}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k^2+l^2)^{2s}c^2_{kl}(f). \tag{22}$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера для двойного ряда, из (22) имеем

$$\|D^sf\|^2_{2,\rho}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left((k^2+l^2)^{2r}c^2_{kl}(f)\right)^{s/r}\left(c^2_{kl}(f)\right)^{1-s/r}$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k^2+l^2)^{2r}c^2_{kl}(f)\right)^{s/r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}c^2_{kl}(f)\right)^{1-s/r}=\|D^rf\|^{2s/r}_{2,\rho}\cdot\|f\|^{2(1-s/r)}_{2,\rho},$$

откуда и вытекает неравенство (21).

Для ранее рассмотренной нами функции (14), кроме равенств (15), также выполняются соотношения

$$\|f_0\|_{2,\rho} = R^{-2r}, \quad D^s f_0(x,y) = (-1)^s R^{-2(r-s)} T_0(x) T_R(y), \quad \|D^s f_0\|_{2,\rho} = R^{-2(r-s)},$$

пользуясь которыми будем иметь

$$\|D^s f_0\|^2_{2,\rho} = \|D^r f_0\|^{2s/r}_{2,\rho} \cdot \|f_0\|^{2(1-s/r)}_{2,\rho} = R^{-4(r-s)},$$

откуда и следует точность неравенства (21). $\triangleright$

Теорема 3. *Пусть $r, s \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant s \leqslant r-1$, $r \geqslant 2$. Тогда для произвольной функции $f \in L^{(r)}_{2,\rho}$ справедливо точное в $L_{2,\rho}$ неравенство*

$$E_R(D^s f)_{2,\rho} \leqslant (E_R(D^r f)_{2,\rho})^{s/r} (E_R(f)_{2,\rho})^{1-s/r}. \tag{23}$$

$\triangleleft$ Так как равенство (10) имеет место для любого $r \in \mathbb{N}$, то при любом s, $1 \leqslant s \leqslant r-1$, $r \geqslant 2$, запишем

$$E^2_R(D^s f)_{2,\rho} = \sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} (k^2+l^2)^{2s} c^2_{kl}(f) = \sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} \left((k^2+l^2)^{2r} c^2_{kl}(f)\right)^{s/r} (c^2_{kl}(f))^{1-s/r}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} (k^2+l^2)^{2r} c^2_{kl}(f)\right)^{s/r} \left(\sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} c^2_{kl}(f)\right)^{1-s/r} \leqslant \left(E^2_R(D^r f)_{2,\rho}\right)^{s/r} \left(E^2_R(f)_{2,\rho}\right)^{1-s/r},$$

откуда и вытекает неравенство (23).

Так как для функции $f_1(x,y) = T_R(x) T_0(y)$ в силу равенств (6) и (11) имеют место соотношения

$$E_R(f_1)_{2,\rho} = 1, \quad E_R(D^s f_1)_{2,\rho} = R^{2s}, \quad E_R(D^r f_1)_{2,\rho} = R^{2r}, \tag{24}$$

то будем иметь

$$E_R(D^s f_1)_{2,\rho} = (E_R(D^r f_1)_{2,\rho})^{s/r} (E_R(f_1)_{2,\rho})^{1-s/r} = (R^{2r})^{s/r} = R^{2s}.$$

Этим доказана точность неравенства (23). $\triangleright$

Теорема 4. *Пусть $s, r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $s < r$. Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{f \in W^{(r)}_{2,\rho}(D)} \frac{E_R(D^s f)_{2,\rho}}{(E_R(f)_{2,\rho})^{1-s/r}} = 1. \tag{25}$$

$\triangleleft$ В самом деле, из неравенства Колмогорова (23) для произвольной функции $f \in W^{(r)}_{2,\rho}(D)$, учитывая, что $E_R(D^r f)_{2,\rho} \leqslant 1$, запишем

$$E_R(D^s f)_{2,\rho} \leqslant (E_R(f)_{2,\rho})^{1-s/r},$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in W^{(r)}_{2,\rho}(D)} \frac{E_R(D^s f)_{2,\rho}}{(E_R(f)_{2,\rho})^{1-s/r}} \leqslant 1. \tag{26}$$

Соответствующую оценку снизу получаем для функции (14), для которой

$$D^s f_0(x,y) = (-1)^s R^{-2(r-s)} T_0(x) T_R(y), \quad E_R(D^s f_0)_{2,\rho} = R^{-2(r-s)},$$

а потому имеем

$$\sup_{f\in W^{(r)}_{2,\rho}(D)} \frac{E_R(D^s f)_{2,\rho}}{(E_R(f)_{2,\rho})^{1-s/r}} \geqslant \frac{E_R(D^s f_0)_{2,\rho}}{(E_R(f_0)_{2,\rho})^{1-s/r}} = \frac{R^{2(r-s)}}{R^{2(r-s)}} = 1. \tag{27}$$

Требуемый результат (25) вытекает из сравнения неравенств (26) и (27). $\rhd$

4. Основные результаты

В этом параграфе приведем более общий результат.

Теорема 5. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $R\in\mathbb{R}_+$, $0<p\leqslant 2$, $0<h\leqslant\pi/R$, $q(t)\geqslant 0$, — произвольная суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0,h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{R^{2r}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega^p_m(D^r f,t)_{2,\rho} q(t)\,dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\,dt\right)^{1/p}}. \tag{28}$$

$\lhd$ Воспользуемся одним вариантом неравенства Минковского, приведенного в монографии [21, с. 104],

$$\left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{j=N}^{\infty} |\tilde{f}_j(t)|^2\right)^{p/2} dt\right\}^{1/p} \geqslant \left\{\sum_{j=N}^{\infty}\left(\int\limits_0^h |f_j(t)|^p\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}, \tag{29}$$

где $0<p\leqslant 2$. Полагая в неравенстве (29) $\tilde{f}_j := f_j q^{1/p}$, получаем

$$\left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{j=N}^{\infty} |f_j(t)|^2\right)^{p/2} q(t)\,dt\right\}^{1/p} \geqslant \left\{\sum_{j=N}^{\infty}\left(\int\limits_0^h |f_j(t)|^p q(t)\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}.$$

Используя равенство (7), из последнего неравенства будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \Omega^p_m(D^r f,t)_{2,\rho} q(t)\,dt\right)^{1/p} \geqslant \left(\int\limits_0^h \|\Delta^m_t(D^r f)\|^p_{2,\rho} q(t)\,dt\right)^{1/p}$$

$$\geqslant \left\{\int\limits_0^h \left[\sum_{k^2+l^2\geqslant R^2} (1-\cos kt\cos lt)^{2m}(k^2+l^2)^{2r} c^2_{kl}(f)\right]^{p/2} q(t)\,dt\right\}^{1/p}$$

$$\geqslant \left\{\sum_{k^2+l^2\geqslant R^2} c^2_{kl}(f)\left((k^2+l^2)^{pr}\int\limits_0^h (1-\cos kt\cos lt)^{pm} q(t)\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}$$

$$\geqslant \inf_{\substack{k^2+l^2\geqslant R^2,\\ k,l\in\mathbb{N}}} \left\{(k^2+l^2)^{pr}\int\limits_0^h (1-\cos kt\cos lt)^{pm} q(t)\,dt\right\}^{1/p} \left\{\sum_{k^2+l^2\geqslant R^2} c_{kl}^2(f)\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{R^{2pr}\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\,dt\right\}^{1/p} E_R(f)_{2,\rho} = R^{2r}\left\{\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\,dt\right\}^{1/p} E_R(f)_{2,\rho}.$$

Отсюда для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}$ вытекает оценка сверху:

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r}E_R(f)_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho} q(t)\,dt\right\}^{1/p}} \leqslant \frac{1}{\left\{\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\,dt\right\}^{1/p}}. \tag{30}$$

Для получения соответствующей оценки снизу рассмотрим функцию $f_1(x,y) = T_R(x)\,T_0(y)$, использованную нами в конце доказательства теоремы 3. Для этой функции в силу (7) имеем

$$\|\Delta_h^m(D^r f_1)\|_{2,\rho}^2 = (1-\cos Rh)^{2m}R^{4r},$$

откуда сразу следует, что

$$\Omega_m^p(D^r f_1,t)_{2,\rho} := (1-\cos Rt)^{pm}R^{2pr} \quad (0<p\leqslant 2,\ 0<Rt\leqslant\pi). \tag{31}$$

Учитывая полученные равенства, запишем оценку снизу:

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho} q(t)\,dt\right)^{1/p}} \geqslant \frac{R^{2r}E_R(f_1)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f_1,t)_{2,\rho} q(t)\,dt\right)^{1/p}}$$

$$= \frac{R^{2r}\cdot 1}{R^{2r}\left(\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\,dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\,dt\right)^{1/p}}. \tag{32}$$

Из сопоставления оценки сверху (30) и оценки снизу (32) получаем требуемое равенство (28). ▷

Из доказанной теоремы 5 вытекают ряд следствий

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 5 *положить* $q(t)=R\sin Rt$, *то имеем*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r-1/p}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho}\sin Rt\,dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{mp+1}{(1-\cos Rh)^{mp+1}}\right\}^{1/p}.$$

В частности, отсюда при $h=\pi/R$ *вытекает равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r-1/p}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R} \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho}\sin Rt\,dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{mp+1}{2^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{33}$$

В свою очередь, если в (33) *полагать* $p=1/m$, *то при* $2r>m$, $r,m\in\mathbb{N}$, *получаем аналог одной теоремы В. В. Шалаева* [22]:

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r-m}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R} \Omega_m^{1/m}(D^r f,t)_{2,\rho}\sin Rt\,dt\right)^{m}} = \frac{1}{2^m}.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 5 при $q(t)=1$, $h=\pi/R$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-1/p)}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R}\Omega_m^p(D^rf,t)_{2,\rho}\,dt\right)^{1/p}}=\left\{\frac{\Gamma(mp+1)}{2^{mp}\sqrt{\pi}\Gamma(mp+1/2)}\right\}^{1/p},$$

где $\Gamma(u)$ — гамма-функция Эйлера. В частности, при $p=1/m$, $r\geqslant m$, $r,m\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-m)}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R}\Omega_m^{1/m}(D^rf,t)_{2,\rho}\,dt\right)^m}=\frac{1}{\pi^m}.$$

Следствие 3. *При $q(t)\equiv1$, $p=1/m$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $2r>m$, $0<h\leqslant\pi/R$, из (28) вытекает аналог одного результата С. Б. Вакарчука [12]:*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2r-m}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}\Omega_m^{1/m}(D^rf,t)_{2,\rho}dt\right)^m}=(Rh-\sin Rh)^{-m}.$$

В частности, полагая в полученном равенстве $h=\pi/(2R)$, имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2r-m}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2R)}\Omega_m^{1/m}(D^rf,t)_{2,\rho}r\,dt\right)^m}=\left\{\frac{2}{\pi-2}\right\}^m.$$

Поскольку для функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}$ ($r\in\mathbb{N}$, $r\geqslant2$) ее промежуточные производные D^sf ($s=1,2,\ldots,r-1$) также принадлежат пространству $L_{2,\rho}$, то представляет интерес изучать поведение $E_R(D^sf)_{2,\rho}$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $m,r,s\subset\mathbb{N}$, $r\geqslant s$ ($1\leqslant s\leqslant r-1$, $r\geqslant2$), $0<p\leqslant2$, $0<h\leqslant3\pi/(4R)$, $R\in\mathbb{R}_+$, $q(t)$ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-s)}E_R(D^sf)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}\Omega_m^p(D^rf,t)_{2,\rho}q(t)\,dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^h(1-\cos Rt)^{mp}q(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \tag{34}$$

В частности, если в (34) полагать

$$p=1/m,\quad m\in\mathbb{N},\quad 2(r-s)>m,\quad r,s\in\mathbb{N},\quad q(t)\equiv1,$$

то имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-s)-m}E_R(D^sf)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}\Omega_m^{1/m}(D^rf,t)_{2,\rho}\,dt\right)^m}=(Rh-\sin Rh)^{-m},$$

а если же полагать $p=1/m$ и $q(t)=t$, то будем иметь

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-s)-m}E_R(D^sf)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}t\Omega_m^{1/m}(D^rf;t)_{2,\rho}\,dt\right)^m}=2^m\big\{Rh(Rh-\sin Rh)-[(Rh)^2-2(1-\cos Rh)]\big\}^{-m}.$$

Отсюда, в частности, при $h = \pi/R$ имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2(r-s)-m}E_R(D^s f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R} t\Omega_m^{1/m}(D^r f;t)_{2,\rho}\,dt\right)^m} = \frac{1}{2^m}.$$

$\lhd$ В самом деле, обозначив $D^s f = g$, будем иметь $D^r f = D^{r-s} g$, а потому, если $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, очевидно, что $g \in L_{2,\rho}^{(r-s)}$ и, пользуясь равенством (18), будем иметь

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2(r-s)}E_R(D^s f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho}q(t)\,dt\right)^{1/p}}$$

$$= \sup_{g\in L_{2,\rho}^{(r-s)}} \frac{R^{2(r-s)}E_R(g)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^{r-s} g,t)_{2,\rho}q(t)\,dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm} q(t)dt\right)^{-1/p}, \qquad (35)$$

откуда и следует утверждение теоремы 6. $\rhd$

Литература

1. *Fox L., Parker I.* Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis.—Oxford: Oxford Univer. Press, 1992.
2. *Rivlin T.* The Chebyshev Polynomials.—N. Y. ete.: Fohn Wiley and Sons, 1975.
3. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М.: Наука, 1983.—384 с.
4. *Васильев Н. И., Клоков Ю. А., Шкерстеня А. Я.* Применение полиномов Чебышева в численном анализе.—Рига: Знатне, 1984.
5. *Beerends R. I.* Chebyshev polynomials in several variables and the radial part of the Laplace–Beltrami operator // Trans. Amer. Math. Soc.—1991.—Vol. 328, № 2.—P. 779–814. DOI: 10.1090/S0002-9947-1991-1019520-3.
6. *Lidl R.* Tschebyscheffpolynome in mehreren Variablen // J. Reine Angew. Math.—1975.—bd. 273.—S. 178–198.
7. *Ricci P. E.* I polynomi di Tchbycheff in piu variabli // Rend. Math.—1978.—Vol. 11, № 2.—P. 295–327.
8. *Абилов В. А., Керимов М. К.* Об оценках остаточных членов кратных рядов Фурье — Чебышева и кубатурных формул Чебышевского типа // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2003.—Т. 43, № 5.—С. 643–663.
9. *Иванов В. И., Чертова Д. В., Лю Ю.* Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1,1]$ со степенным весом // Тр. ин-та матем. и механики УрО РАН.—2008.—Т. 14, № 3.—С. 112–126.
10. *Шабозов М. Ш., Тухлиев К.* Неравенства Джексона — Стечкина с обобщенными мод // Тр. ин-та матем. и механики УрО РАН.—2015.—Т. 21, № 4.—С.292–308.
11. *Вакарчук С. Б., Швачко А. В.* О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. мат. журн.—2013.—Т. 65, № 12.—С. 1604–1621.
12. *Вакарчук С. Б.* Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева — Эрмита и поперечники функциональных классов // Мат. заметки.—2014.—Т. 95, вып. 5.—С. 666–684.
13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теории вложения.—М.: Наука, 1977.—456 с.
14. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.—М.: Наука, 1979.—416 с.
15. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представления групп.—М.: Наука, 1965.—596 с.
16. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов С. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения.—Киев: Наукова думка, 2003.—590 с.
17. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Усп. мат. наук.—1996.—Т. 51, № 6.—С. 88–124. DOI: 10.4213/rm1019.

18. *Вакарчук С. Б., Швачко А. В.* Неравенства колмогоровского типа для производных функций двух переменных и их приложение к аппроксимации «углом» // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 11.—С. 3–22.
19. *Шабозов М. Ш., Сайнаков В. Д.* О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных // Тр. ин-та матем. и механики УрО РАН.—2018.—Т. 24, № 4.—С. 270–282. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-270-282.
20. *Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О.* О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2 // Чебышевский сб.—2019.—Т. 20, № 2.—С. 348–365. DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-2-348-365.
21. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.
22. *Шалаев В. В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн.—1991.—Т. 43, № 1.—С. 125–129.

Статья поступила 5 июня 2019 г.

Джурахонов Олимджон Акмалович
Таджикский национальный университет,
доцент кафедры функционального анализа и диф. уравнений
ТАДЖИКИСТАН, 734063, Душанбе, ул. Рудаки, 17
E-mail: `olim74@tajnet.tj`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 5–17

APPROXIMATION OF BIVARIATE FUNCTIONS BY FOURIER–TCHEBYCHEV “CIRCULAR” SUMS IN $L_{2,\rho}$

Jurakhonov, O. A.[1]

[1] Tajik National University,
17 Rudaki St., Dushanbe 734063, Tajikistan
E-mail: `olim74@tajnet.tj`

Abstract. In this paper the sharp upper bounds of approximation of functions of two variables with generalized Fourier–Chebyshev polynomials for the class of functions $L_{2,\rho}^{(r)}(D)$, $r \in N$, are calculated in $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(Q)$, where $\rho := \rho(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $Q := \{(x,y) : -1 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, and D is a second order Chebyshev–Hermite operator. The sharp estimates for the best polynomial approximation are obtained by means of weighted average of module of continuity of m-th order with $D^r f$ $(r \in Z_+)$ in $L_{2,\rho}$. The sharp estimates for the best approximation of double Fourier series in Fourier–Chebyshev orthogonal system in the classes of functions of several variables which are characterized by generalized module of continuity are given. We first form some classes of functions and then the corresponding methods of approximations, “circular” by partial sum of Fourier–Chebyshev double series, since, unlike the one-dimensional case, there is no natural way of expressing the partial sums of double series. The shift operator plays a crucial role in the problems related to expansion of functions in Fourier series in trigonometric system and estimating their best approximation properties. Based on some previous known research we construct the shift operator, which enables one to determine some classes of functions which characterized by module of continuity. And for these classes of functions the upper bound for the best mean squared approximation by “circular” partial sum of Fourier–Chebyshev double series is calculated.

Key words: mean-squared approximation, generalized module of continuity, Fourier–Tchebychev double series, Kolmogorov type inequality, shift operator.

Mathematical Subject Classification (2010): 30E10.

For citation: *Jurakhonov, O. A.* Approximation of Bivariate Functions by Fourier–Tchebychev “Circular” Sums in $L_{2,\rho}$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 5–17 (in Russian). DOI: 10.46698/n6807-7263-4866-r.

References

1. *Fox, L. and Parker, I. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, Oxford, Oxford Univer. Press, 1992.
2. *Rivlin, T. The Chebyshev Polynomials*, New York ete., Fohn Wiley and Sons, 1975.

3. *Pashkovskii, S. Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Chebyshev Polynomials and Series Used for Calculations], Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).
4. *Vasil'ev, N. I., Klokov, Yu. A., and Shkerstena, A. Ya. Primenenie polinomov Chebysheva v chislennom analize* [Chebyshev Polynomials Application in Numerical Analysis], Riga, Zinatne, 1984 (in Russian).
5. *Beerends, R. I.* Chebyshev Polynomials in Several Variables and the Radial Part of the Laplace–Beltrami Operator, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1991, vol. 328, no. 2, pp. 779–814. DOI: 10.1090/S0002-9947-1991-1019520-3.
6. *Lide, R.* Tschebyscheffpolynome in Mehreren Variablen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1975, vol. 273, pp. 178–198.
7. *Ricci, P. E.* Chebyshev Polynomials in Several Variables, *Rend. Math.*, 1978, vol. 11, no. 2, pp. 295–327 (in Italian).
8. *Abilov, V. A. and Kerimov, M. K.* Estimates of Residual Terms of Multiple Fourier–Chebyshev Series and the Chebyshev Type Cubature Formulas, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 5, pp. 613–632.
9. *Ivanov, V. I., Chertova, D. V. and Liu, Y.* The Sharp Jackson Inequality in the Space L_2 on the Segment $[-1, 1]$ with the Power Weight, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2009, vol. 264, pp. 133–149. DOI: 10.1134/S0081543809050113.
10. *Shabozov, M. Sh. and Tuhliev, K.* Jackson–Stechkin Type Inequalities with Generalized Moduli of Continuity and Widths of Some Classes of Functions, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 21, no. 4, pp. 292–308 (in Russian).
11. *Vakarchuk, S. B. and Shvachko, A. V.* On the Best Approximation in the Mean by Algebraic Polynomials with Weight and the Exact Values of Widths for the Classes of Functions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2014, vol. 65, pp. 1774–1792. DOI: 10.1007/s11253-014-0897-8.
12. *Vakarchuk, S. B.* Mean Approximation of Functions on the Real Axis by Algebraic Polynomials with Chebyshev–Hermite Weight and Widths of Function Classes, *Mathematical Notes*, 2014, vol. 95, pp. 599–614. DOI: 10.1134/S0001434614050046.
13. *Nikol'skij, S. M. Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teorii vlozhenija* [Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems], Moskow, Nauka, 1977 (in Russian).
14. *Suetin, P. K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classic Orthogonal Polynomials], Moskow, Nauka, 1979 (in Russian).
15. *Vilenkin, N. Ja. Special Functions and the Theory of Group Representations. Translated from the Russian by V. N. Singh. Translations of Mathematical Monographs*, vol. 22, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
16. *Babenko, V. F., Kornejchuk, N. P., Kofanov, S. A. and Pichugov, S. A. Neravenstva dlja proizvodnyh i ih prilozhenija* [Inequalities for Derivatives and Their Applications], Kiev, Naukova dumka, 2003 (in Russian).
17. *Arestov, V. V.* Approximation of Unbounded Operators by Bounded Operators and Related Extremal Problems Russian, *Mathematical Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126.
18. *Vakarchuk, S. B. and Shvachko, A. V.* Kolmogorov-Type Inequalities for Derived Functions of Two Variables with Application for Approximation by an «Angle», *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, pp. 1–18. DOI: 10.3103/S1066369X15110018.
19. *Shabozov, M. Sh. and Sainakov, V. D.* On Kolmogorov Type Inequalities in the Bergman Space for Functions of Two Variables, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 270–282.
20. *Shabozov, M. S. and Akobirshoev, M. O.* About Kolmogorov Type of Inequalities for Periodic Functions of Two Variables in L_2, *Chebyshevskii Sbornik*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 348–365 (in Russian). DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-2-348-365.
21. *Pinkus, A. n-Widths in Approximation Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1985.
22. *Shalaev, V. V.* Widths in L_2 of Classes of Differentiable Functions, Defined by Higher-Order Moduli of Continuity, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1991, vol. 43, pp. 104–107. DOI: 10.1007/BF01066914.

Received June 5, 2019

Olimjon A. Jurakhonov
Tajik National University,
17 Rudaki St., Dushanbe 734063, Tajikistan,
Associate Professor
E-mail: `olim74@tajnet.tj`