Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 87–91

УДК 512.5
DOI 10.46698/h3104-8810-6070-x

О СТРОЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СЕТЕЙ НАД КВАДРАТИЧНЫМИ ПОЛЯМИ

В. А. Койбаев[1, 2]
[1]Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;
[2]Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, Ватутина, 44
E-mail: `koibaev-k1@yandex.ru`

Посвящается 75-летию профессора С. С. Кутателадзе

Аннотация. Исследуется структура элементарных сетей над квадратичными полями. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется сетью (ковром) над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется неприводимой, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ — квадратичное поле, D — кольцо целых квадратичного поля K, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geqslant 3$ над K, причем σ_{ij} — D-модули. Если целое d принимает одно из следующих значений (22 поля): -1, -2, -3, -7, -11, -19, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73, то для некоторого промежуточного подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$, сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n, K)$ с элементарной сетью идеалов кольца P.

Ключевые слова: сеть, ковер, элементарная сеть, замкнутая сеть, поле алгебраических чисел, квадратичное поле.

Mathematical Subject Classification (2010): 20G15.

Образец цитирования: *Койбаев В. А.* О строении элементарных сетей над квадратичными полями // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 87–91. DOI: 10.46698/h3104-8810-6070-x.

Исследуется структура элементарных сетей над квадратичными полями. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется сетью (ковром) над полем K порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется неприводимой, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ — квадратичное поле, D — кольцо целых поля K, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geqslant 3$ над K, причем σ_{ij} — D-модули. Для некоторого класса квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ (для некоторого класса целых чисел d) доказано, что с точностью до сопряжения (элементарной сети) диагональной матрицей из $D(n, K)$ все σ_{ij} являются идеалами фиксированного промежуточного подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$. В заключение строится недополняемая симметрическая элементарная сеть над квадратичным полем.

1. Квадратичные поля. Кольцо целых квадратичного поля

Квадратичным полем мы называем расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ второй степени. Всякое квадратичное поле имеет вид $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$, где $d \neq 1$ — некоторое целое рациональное число, свободное от квадратов [1, гл. II, § 7, п. 1].

Число a поля алгебраических чисел K (конечное расширение поля рациональных чисел) называется целым алгебраическим числом, если a является корнем унитарного (старший коэффициент многочлена равен 1) многочлена с целыми рациональными коэффициентами. Множество всех целых алгебраических чисел поля K является подкольцом поля K, которое называется кольцом целых поля K (см. [1, алгебраическое дополнение, § 4] и [2, гл. 5]). Кольцо целых D поля алгебраических чисел K совпадает с максимальным порядком поля K [1, гл. II, § 2, теорема 6].

Предложение 1 [1, гл. II, § 7, теорема 1]**.** *Пусть $d \neq 1$ — целое рациональное число, свободное от квадратов. Кольцо целых (максимальный порядок) D квадратичного поля $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$ совпадает с кольцом*

$$D = \mathbb{Z}[\theta] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta = \big\{x + y\theta : \, x, y \in \mathbb{Z}\big\},$$

где $\theta = \sqrt{d}$ при $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ и $\theta = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ при $d \equiv 1 \pmod 4$. Дискриминант поля $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$ равен $4d$ в первом случае и d во втором.

Предложение 2 [1, гл. III, § 2]**.** 1) *Кольцо целых D мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$, $d < 0$, является евклидовым тогда и только тогда, когда* (5 *полей*)

$$d \in \big\{ -1, \, -2, \, -3, \, -7, \, -11\big\}.$$

2) *Кольцо целых D вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$, $d > 0$, является евклидовым тогда и только тогда, когда* (16 *полей*)

$$d \in \big\{2, \, 3, \, 5, \, 6, \, 7, \, 11, \, 13, \, 17, \, 19, \, 21, \, 29, \, 33, \, 37, \, 41, \, 57, \, 73\big\}.$$

2. Элементарные сети над квадратичными полями

В этом разделе мы дадим описание элементарных сетей над некоторым классом квадратичных полей.

Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью* (*ковром*) [3, 4] над полем K порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер) [3, 4]. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, является (полной) сетью. Хорошо известно (см., например, [3]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$.

Полную или элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы называем *неприводимой*, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля.

Назовем элементарную сеть σ *замкнутой* (*допустимой*) ([5; 6, вопрос 15.46]), если элементарная группа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Замкнутыми являются, например, дополняемые элементарные сети (см., например, [3]).

Дадим в начале описание промежуточных колец, заключенных между областью главных идеалов и его полем частных. Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 1. *Пусть R — область главных идеалов, K — поле частных кольца R. Если S — мультипликативное подмножество, порожденное подмножеством простых кольца R, то $S^{-1}R$ также является кольцом главных идеалов и $R \subseteq S^{-1}R \subseteq K$. С другой стороны, всякое промежуточное подкольцо P, $R \subseteq P \subseteq K$, является кольцом главных идеалов и имеет вид $P = S^{-1}R$ для некоторого мультипликативного подмножества $S \subseteq R$.*

Предложение 3 [7, теорема 2]**.** *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geqslant 3$ над полем частных K кольца главных идеалов R, причем для любых i, j, $i \neq j$, подгруппы σ_{ij} являются R-модулями. Тогда для некоторого промежуточного подкольца P, $R \subseteq P \subseteq K$, сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n, K)$ с элементарной сетью $\pi = (\pi_{ij})$ идеалов кольца P, где $\pi_{ij} = q_{ij}P$, для некоторых $q_{ij} \in P$. В частности, элементарная сеть σ является замкнутой.*

Элементарная сеть $\pi = (\pi_{ij})$ из предложения наглядно представляется таблицей

$$\pi = (\pi_{ij}) = \begin{pmatrix} * & q_{12}P & q_{13}P & \dots & q_{1n}P \\ P & * & q_{23}P & \dots & q_{2n}P \\ P & q_{32}P & * & \dots & q_{3n}P \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P & q_{n2}P & q_{n3}P & \dots & * \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ — квадратичное поле, D — кольцо целых поля K. Пусть, далее, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geqslant 3$ над полем K, причем для любых $i \neq j$, подгруппы σ_{ij} являются D-модулями. Если целое d принимает одно из следующих значений* (22 *поля*)*:*

$$-1,\ -2,\ -3,\ -7,\ -11,\ -19,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 21,\ 29,\ 33,\ 37,\ 41,\ 57,\ 73,$$

то для некоторого промежуточного подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$, сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n, K)$ с элементарной сетью $\pi = (\pi_{ij})$ идеалов кольца P, где $\pi_{ij} = q_{ij}P$, для некоторых $q_{ij} \in P$ (см. (1))*. В частности, элементарная сеть σ является замкнутой.*

Доказательство теоремы вытекает из предложений 2, 3 и леммы 1 (при этом нужно заметить, что всякая евклидова область является областью главных идеалов).

Замечание. Кольцо целых мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$ является областью главных идеалов, но не является евклидовым [8].

3. Построение недополняемой элементарной сети над квадратичным полем

Результаты этого параграфа показывают существенное отличие строения элементарных сетей над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ [7] от строения элементарных сетей над квадратичными полями.

Пусть $d \equiv 2, 3 \pmod 4$. В поле $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ рассмотрим кольцо целых $D = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Положим

$$t = m(1 + \sqrt{d}), \quad A = t^4 D, \quad m \in \mathbb{Z},\ m \geqslant 3, \quad B = \mathbb{Z}t + A = \mathbb{Z}t + t^4 D.$$

Заметим, что $A \subseteq B$ и

$$t^2 = m^2\big((1 + d) + 2\sqrt{d}\big), \quad t^3 = m^3\big((1 + 3d) + (3 + d)\sqrt{d}\big).$$

Предложение 4. *Таблица*

$$\tau = \begin{pmatrix} * & B & A & \dots & A \\ B & * & A & \dots & A \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ A & A & A & \dots & * \end{pmatrix}$$

является недополняемой элементарной сетью.

$\lhd$ Действитеьно, так как $A = t^4 D$ — идеал кольца $D = \mathbb{Z}\big[\sqrt{d}\,\big]$, то $A^2 \subseteq A$, $AB \subseteq A$, а потому таблица τ является элементарной сетью. Для того, чтобы показать, что элементарная сеть τ является недополняемой, нам достаточно показать (см. § 2), что B^3 не содержится в подгруппе B. Покажем, что t^3 не содержится в $B = \mathbb{Z}t + t^4 D$. Действительно, если $t^3 \in B$, то $t^2 \in \mathbb{Z} + t^3 D$, а потому для некоторых $a \in \mathbb{Z}$ и $x + y\sqrt{d} \in D$ мы имеем (см. выше значение t^2 и t^3)

$$m^2\big((1+d) + 2\sqrt{d}\,\big) = a + m^3\big[(1+3d) + (3+d)\sqrt{d}\,\big]\big(x + y\sqrt{d}\,\big)$$
$$\Longrightarrow 2 = m\big(y(1+3d) + x(3+d)\big) \in m\mathbb{Z}.$$

Однако последнее невозможно так как $m \geqslant 3$. $\rhd$

Литература

1. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел.—М.: Наука, 1985.
2. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру.—М.: Мир, 1972.
3. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. сем. ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
4. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 4.—С. 421–434.
5. *Койбаев В. А.* Элементарные сети в линейных группах // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 4.—С. 134–141.
6. Коуровская тетрадь: нерешенные вопросы теории групп.—17-е изд.—Новосибирск, 2010.
7. *Дряева Р. Ю., Койбаев В. А., Нужин Я. Н.* Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов // Зап. науч. сем. ПОМИ.—2017.—Т. 455.—С. 42–51.
8. *Wilson J. C.* A principal ideal ring that is not a euclidean ring // Mathematics Magazine.—1973.—Vol. 46, № 1.—P. 34–38. DOI: 10.1080/0025570X.1973.11976270.

Статья поступила 9 августа 2020 г.

Койбаев Владимир Амурханович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
профессор кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362019, Владикавказ, Ватутина, 44
E-mail: `koibaev-K1@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 87–91

ON THE STRUCTURE OF ELEMENTARY NETS OVER QUADRATIC FIELDS

Koibaev, V. A.[1,2]

[1]Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[2]North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: `koibaev-k1@yandex.ru`

Abstract. The structure of elementary nets over quadratic fields is studied. A set of additive subgroups $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of a ring R is called a *net of order n over R* if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all i, r, j. The same system, but without the diagonal, is called *elementary net* (*elementary carpet*). An elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ is called *irreducible* if all additive subgroups σ_{ij} are different from zero. Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ be a quadratic field, D a ring of integers of the quadratic field K, $\sigma = (\sigma_{ij})$ an irreducible elementary net of order $n \geqslant 3$ over K, and σ_{ij} a D-modules. If the integer d takes one of the following values (22 fields): -1, -2, -3, -7, -11, -19, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73, then for some intermediate subring P, $D \subseteq P \subseteq K$, the net σ is conjugated by a diagonal matrix of $D(n, K)$ with an elementary net of ideals of the ring P.

Key words: net, carpet, elementary net, closed net, algebraic number field, quadratic field.

Mathematical Subject Classification (2010): 20G15.

For citation: *Koibaev, V. A.* On the Structure of Elementary Nets Over Quadratic Fields, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 87–91 (in Russian). DOI: 10.46698/h3104-8810-6070-x.

References

1. *Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R. Number Theory*, New York–London, Academic Press, 1966.
2. *Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G. Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley, 1969.
3. *Borevich, Z. I.* Subgroups of Linear Groups Rich in Transvections, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, no. 2, pp. 928–934. DOI: 10.1007/BF01089083.
4. *Levchuk, V. M.* Remark on a Theorem of L. Dickson, *Algebra and Logic*, 1983, vol. 22, no. 4, pp. 306–316. DOI: 10.1007/BF01979677.
5. *Koibaev, V. A.* Elementary Nets in Linear Groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 134–141 (in Russian).
6. *Kourovskaya tetrad': nereshennye voprosy teorii grupp* [The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory], Novosibirsk, 2010, issue 17 (in Russian).
7. *Dryaeva, R. Yu., Koibaev, V. A. and Nuzhin, Ya. N.* Full and Elementary Nets Over the Field of Fractions of a Principal Ideal Ring, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 234, no. 2, pp. 141–147. DOI: 10.1007/s10958-018-3990-y.
8. *Wilson, J. C.* A Principal Ideal Ring That is not a Euclidean Ring, *Mathematics Magazine*, 1973, vol. 46, no. 1, pp. 34–38. DOI: 10.1080/0025570X.1973.11976270.

Received August 9, 2020

Vladimir A. Koibaev
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher;

North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Geometry
E-mail: `koibaev-k1@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612