Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 2, С. 19–33

УДК 517.444
DOI 10.46698/u3425-9673-4629-c

СТИРАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО КРУГАМ

Н. П. Волчкова[1], Вит. В. Волчков[2], Н. А. Ищенко[2]

[1] Донецкий национальный технический университет,
Россия, 283000, Донецк, ул. Артема, 58;
[2] Донецкий национальный университет,
Россия, 283001, Донецк, ул. Университетская, 24

E-mail: volna936@gmail.com, nataandRap@mail.ru

Аннотация. Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — многообразия, $\mathscr{D}$ — область в $\mathscr{M}$ и $E \subset \mathscr{D}$ — замкнутое относительно $\mathscr{D}$ множество. Проблема стирания особенностей состоит в следующем: найти условия, при которых любое отображение $f : \mathscr{D} \setminus E \to \mathscr{N}$ из заданного класса можно продолжить до отображения $\mathbf{f} : \mathscr{D} \to \mathscr{N}$ с сохранением класса. Если указанное продолжение существует, то множество E называют устранимым множеством в рассматриваемом классе отображений. Целью данной работы является исследование проблемы стирания особенностей в контексте свойств ядра локального преобразования Помпейю. Изучается класс $\mathfrak{K}_+$, состоящий из непрерывных функций на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющих нулевые интегралы по всем кругам из $\mathbb{C}$, конгруэнтным единичному кругу относительно сферической метрики. Аналогом группы евклидовых движений в этом случае является группа дробно-линейных преобразований PSU(2). Найдено точное условие, при котором функции рассматриваемого класса, доопределенные соответствующим образом в бесконечно удаленной точке, обладают указанным свойством на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Доказательство основного результата базируется на подходящем описании класса $\mathfrak{K}_+$. Центральным инструментом в этом описании являются ряды Фурье по сферическим гармоникам. Показано, что коэффициенты Фурье функции $f \in \mathfrak{K}_+$ представимы рядами по функциям Якоби. Дальнейшее доказательство состоит в изучении асимптотического поведения указанных рядов при подходе к особой точке. Результаты, полученные в работе, можно использовать при решении задач, связанных со сферическими средними.

Ключевые слова: преобразование Помпейю, сферические средние, функции Якоби.

Mathematical Subject Classification (2010): 33C45, 42A75, 42A85.

Образец цитирования: *Волчкова Н. П., Волчков Вит. В., Ищенко Н. А.* Стирание особенностей функций с нулевыми интегралами по кругам // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 2.—С. 19–33. DOI: 10.46698/u3425-9673-4629-c.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ — вещественное евклидово пространство размерности m с евклидовой нормой $|\cdot|$. Предположим, что $m \geqslant 2$, $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ и выполнено равенство

$$\int\limits_{|x|\leqslant r} f(x+y)\,dx = 0 \tag{1}$$

при некотором фиксированном $r > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}^m$. Верно ли, что $f = 0$? Этот вопрос был рассмотрен в 1929 году известным румынским математиком Д. Помпейю [1], который утверждал, что при $m = 2$ ответ является положительным. Однако, спустя пятнадцать лет Л. Чакалов [2] обнаружил, что доказательство Д. Помпейю содержит ошибку. Более того, он показал, что функция $f(x_1, x_2) = \sin(\lambda x_1)$ имеет нулевые интегралы по всем единичным кругам в $\mathbb{R}^2$, если число λ является нулем функции Бесселя J_1. Впоследствии выяснилось, что аналогичные примеры ненулевых функций с условием (1) можно построить, используя метод, предложенный И. Радоном [3] еще в 1917 году. Этот метод основан на теореме о среднем для собственных функций оператора Лапласа и может быть распространен на произвольное двухточечно-однородное пространство X (см. [4, часть 2, п. 2.4]). Кроме того, он позволяет строить ненулевые функции на X, имеющие нулевые интегралы по всем сферам фиксированного радиуса.

Обозначим через $V_r(\mathbb{R}^m)$ множество функций $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющих (1) при всех $y \in \mathbb{R}^m$. Его можно рассматривать как ядро преобразования Помпейю, ассоциированное с шаром радиуса r и группой движений $M(m)$ пространства $\mathbb{R}^m$ [5, часть 4, гл. 7]. Класс $V_r(\mathbb{R}^m)$, а также различные его аналоги и обобщения активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Д. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К. А. Беренстейна и других авторов (см. обзоры [6–8] и монографии [4, 5, 9], содержащие обширную библиографию). Перечислим основные направления в этих исследованиях.

1. Изучение нулевых множеств и соответствующие теоремы единственности для класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ [4, 5, 9–11]. Данное направление восходит к теореме единственности Ф. Йона [10, гл. 6] для функций с нулевыми сферическими средними.

2. Исследование допустимых ограничений на рост ненулевых функций класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ и его аналогов на неограниченных областях (теоремы типа Лиувилля [4, 5, 9–13].

3. Изучение функций с условиями типа (1), в которых r принадлежит заданному двухэлементному множеству [4–9, 11, 14, 15] (теоремы о двух радиусах). Первым результатом в этом направлении является классическая теорема Д. Дельсарта [16, 17] о характеризации гармонических функций посредством уравнения средних значений, выполненного только для двух радиусов.

4. Описание функций класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ в виде рядов по сферическим гармоникам [4, 5, 9, 18] (аналоги разложений Тейлора и Лорана из теории аналитических функций).

5. Проблема продолжения [4, 5, 9].

6. Теоремы о стирании особенностей [4, 5, 9, 18].

7. Задачи интегральной геометрии о восстановлении функций из заданных классов по известным шаровым средним [4, 9, 19–22].

8. Аппроксимация функций с нулевыми шаровыми средними линейными комбинациями специальных функций [4, 5, 9].

9. Интерполяционные задачи для функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ [23].

10. Изучение аналогов и обобщений класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ на различных однородных пространствах и группах (например, на римановых симметрических пространствах) [4–9, 13–15, 20–22].

В частности, важным направлением в рассматриваемой тематике является изучение условий, обеспечивающих стирание особенностей функций класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ и его аналогов. В настоящее время получено относительно немного результатов по указанной задаче. Все известные случаи относятся, в основном, к евклидову пространству со стандартной метрикой и касаются лишь функций специального вида (радиальные функции и их обобщения) (см. [5, часть 2, гл. 1, п. 1.6], [18, теорема 4]). Например, в работе [18] содержится следующий результат: если $f \in V_r(\mathbb{R}^m) \cap C^s(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$, $s > m+1$ и f радиальна, то существует функция $g \in C^{s-m-1}(\mathbb{R}^m)$, равная f в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

В данной работе изучаются непрерывные функции на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющие нулевые интегралы по всем кругам из $\mathbb{C}$, конгруэнтным единичному кругу относительно сферической метрики. Аналогом группы евклидовых движений в этом случае является группа дробно-линейных преобразований PSU(2). Найдено точное условие (см. формулу (2) ниже), при котором функции рассматриваемого класса, доопределенные соответствующим образом в бесконечно удаленной точке, обладают указанным свойством на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

2. Формулировка основного результата

Как обычно, множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел $z = x + iy$ отождествляется с множеством пар (x, y) вещественных чисел, т. е. с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$.

Пусть $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный круг на $\mathbb{C}$ с центром в нуле. Обозначим через PSU(2) группу дробно-линейных преобразований вида

$$\tau_{a,c}(z) = \frac{az - \overline{c}}{cz + \overline{a}}, \quad \text{где } a, c \in \mathbb{C} \text{ и } |a|^2 + |c|^2 = 1$$

(см. [24, лекция 27]). Элементы группы PSU(2) являются преобразованиями расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Мера

$$d\mu(z) = \frac{dm(z)}{(1+|z|^2)^2},$$

где $dm(z)$ — мера Лебега на $\mathbb{C}$, инвариантна относительно группы PSU(2).

Положим

$$\mathfrak{K}_+ = \left\{ f \in C(\mathbb{C}) : \int\limits_{\tau_{a,c}(B)} f(z)\, d\mu(z) = 0,\ |a|^2 + |c|^2 = 1,\ |a| - |c| > 0 \right\},$$

$$\mathfrak{K}_- = \left\{ f \in C(\overline{\mathbb{C}}) : \int\limits_{\tau_{a,c}(B)} f(z) d\mu(z) = 0,\ |a|^2 + |c|^2 = 1,\ |a| - |c| \leqslant 0 \right\}.$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. 1) *Пусть* $f \in \mathfrak{K}_+$,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^3} = 0 \tag{2}$$

и

$$f_+(z) = \begin{cases} f(z), & \text{при } z \in \mathbb{C}, \\ f(0), & \text{при } z = \infty. \end{cases}$$

Тогда $f_+ \in \mathfrak{K}_-$.

2) *Существует функция* $f \in \mathfrak{K}_+$ *такая, что*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^3} = 1.$$

При этом интеграл $\int_{\tau_{a,c}(B)} f(z)\, d\mu(z)$ *расходится для любых* $a, c \in \mathbb{C}$, *удовлетворяющих условиям* $|a|^2 + |c|^2 = 1$, $|a| - |c| \leqslant 0$.

Второе утверждение теоремы 1 показывает, что условие (2) в первом утверждении является существенным.

3. Обозначения и вспомогательные конструкции

В работе используются следующие стандартные обозначения: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — соответственно множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел; $[t]$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$; $\overline{\lambda}$ — комплексное сопряжение к числу $\lambda \in \mathbb{C}$; $\binom{m}{n}$ — биномиальные коэффициенты; $(\lambda)_l$ — символ Похгаммера ($(\lambda)_0 = 1$ и $(\lambda)_l = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+l-1)$ при $l \in \mathbb{N}$); Γ — гамма-функция; $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, т. е.

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j\,(\beta)_j}{(\gamma)_j\,j!}\,z^j, \quad |z|<1,\ \gamma \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}; \tag{3}$$

$$R_{\mu}^{(\alpha,\beta)}(t) = F\left(-\mu, \mu+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-t}{2}\right) \tag{4}$$

— функции Якоби первого рода.

Лемма 1. *Пусть $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $k > 2n$. Тогда*

$$R_{2n-k}^{(k,k)}(x) = \sum_{p=0}^{2n} \alpha_{k,n,p}(1+x)^{p-k}, \tag{5}$$

где

$$\alpha_{k,n,p} = \frac{2^{k-p}k!\,(k-2n)_{2n}(-2n)_p(2n+1)_p}{p!\,(k+2n)!\,(1-k)_p}.$$

$\lhd$ Из определения (4) и соотношения

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;z)$$

(см. [25, гл. 2, п. 2.9, формулы (1), (2)] имеем

$$\begin{aligned}
R_{2n-k}^{(k,k)}(x) &= F\left(k-2n, 2n+k+1; k+1; \frac{1-x}{2}\right)\\
&= \frac{2^k}{(1+x)^k}\,F\left(-2n, 2n+1; k+1; \frac{1-x}{2}\right)\\
&= \frac{2^k}{(1+x)^k}\sum_{j=0}^{2n}\frac{(-1)^j(-2n)_j(2n+1)_j}{(1+k)_j j! 2^j}\,(x-1)^j\\
&= \sum_{p=0}^{2n}\left(\sum_{j=p}^{2n}\frac{(-2n)_j(2n+1)_j}{(1+k)_j j!}\binom{j}{p}\right)(-1)^p\,2^{k-p}\,(1+x)^{p-k}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку $(z)_{p+q} = (z)_p(z+p)_q$, внутренняя сумма в (6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\sum_{j=p}^{2n}\frac{(-2n)_j(2n+1)_j}{(1+k)_j\,j!}\binom{j}{p} &= \sum_{q=0}^{2n-p}\frac{(-2n)_{p+q}(2n+1)_{p+q}}{(1+k)_{p+q}\,p!\,q!}\\
&= \frac{(-2n)_p(2n+1)_p}{(1+k)_p\,p!}\sum_{q=0}^{2n-p}\frac{(-2n+p)_q(2n+1+p)_q}{(1+k+p)_q\,q!}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Усеченный гипергеометрический ряд Гаусса в (7) выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ по формуле

$$\sum_{q=0}^{2n-p} \frac{(-2n+p)_q(2n+1+p)_q}{(1+k+p)_q\, q!} = \frac{(4n+1)!}{(2n-p)!\,(2n+p+1)!}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} p-2n, 2n+1+p, k+2n+1;\ 1 \\ k+p+1,\ 2n+p+2 \end{matrix}\right)$$

(см. [25, гл. 4, п. 4.5]). Тогда используя равенство

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -N, \alpha, \beta;\ 1 \\ \gamma,\ 1+\alpha+\beta-\gamma-N \end{matrix}\right) = \frac{(\gamma-\alpha)_N(\gamma-\beta)_N}{(\gamma)_N(\gamma-\alpha-\beta)_N}$$

(см. [26, гл. 7, п. 7.4.4, формула (88)]), получаем

$$\sum_{q=0}^{2n-p} \frac{(-2n+p)_q(2n+1+p)_q}{(1+k+p)_q\, q!} = \frac{(4n+1)!}{(2n-p)!\,(2n+p+1)!}\ \frac{(k-2n)_{2n-p}(p-2n)_{2n-p}}{(1+k+p)_{2n-p}(-4n-1)_{2n-p}}.$$

Учитывая, что

$$(-z)_j\,(-1)^j = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-j)},$$

отсюда находим

$$\sum_{q=0}^{2n-p} \frac{(-2n+p)_q\,(2n+1+p)_q}{(1+k+p)_q\, q!} = \frac{(k-p-1)!\,(k+p)!}{(k+2n)!\,(k-2n-1)!}. \tag{8}$$

Соотношения (6), (7) и (8) влекут равенство (5). $\triangleright$

Лемма 2. *Пусть*

$$a_{m,n}(x) = (x+2n-m)_{m-1}(x+2n-1)_{m-1}, \quad m,n = 1,\dots,p,\ p \geqslant 2,$$

$$\Delta_p(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & \dots & a_{1,p}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & \dots & a_{2,p}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1}(x) & a_{p,2}(x) & \dots & a_{p,p}(x) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta_p(x) = \prod_{j=1}^{p-1}\left(\prod_{n=2}^{p-j+1} \gamma_n(x+2j-2)\right), \tag{9}$$

где $\gamma_n(x) = 2(n-1)(2x+2n-1)$.

$\triangleleft$ Вычтем из $(j+1)$-й строки определителя $\Delta_p(x)$ j-ю строку, умноженную на $(x-j+1)(x+j)$, где $j = p-1,\ p-2,\ \dots,\ 1$. Учитывая, что

$$a_{j+1,n}(x) - a_{j,n}(x)(x-j+1)(x+j) = a_{j,n}(x)\gamma_n(x),$$

имеем

$$\Delta_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \gamma_2(x) & \gamma_3(x) & \dots & \gamma_p(x) \\ 0 & a_{2,2}(x)\gamma_2(x) & a_{2,3}(x)\gamma_3(x) & \dots & a_{2,p}(x)\gamma_p(x) \\ 0 & a_{3,2}(x)\gamma_2(x) & a_{3,3}(x)\gamma_3(x) & \dots & a_{3,p}(x)\gamma_p(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{p-1,2}(x)\gamma_2(x) & a_{p-1,3}(x)\gamma_3(x) & \dots & a_{p-1,p}(x)\gamma_p(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) & \dots & a_{2,p}(x) \\ a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) & \dots & a_{3,p}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-1,2}(x) & a_{p-1,3}(x) & \dots & a_{p-1,p}(x) \end{vmatrix} \cdot \prod_{n=2}^{p} \gamma_n(x).$$

Поскольку $a_{m,n}(x+2) = a_{m,n+1}(x)$, отсюда получаем соотношение

$$\Delta_p(x) = \Delta_{p-1}(x+2) \prod_{n=2}^{p} \gamma_n(x),$$

которое влечет равенство (9). $\rhd$

Лемма 3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$ и*

$$\lim_{x \to -1+0} (1+x)^{\frac{k+3}{2}} \sum_{n=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} c_n R_{2n-k}^{(k,k)}(x) = 0 \tag{10}$$

для некоторых констант $c_n \in \mathbb{C}$. Тогда все c_n равны нулю.

$\lhd$ По лемме 1 имеем

$$(1+x)^{\frac{k+3}{2}} \sum_{n=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} c_n R_{2n-k}^{(k,k)}(x) = \sum_{n=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \sum_{p=0}^{2n} c_n \alpha_{k,n,p} (1+x)^{p+\frac{3-k}{2}}$$

$$= \left(\sum_{p=1}^{2\left[\frac{k-1}{2}\right]} \left(\sum_{n \geqslant \frac{p}{2}}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} c_n \alpha_{k,n,p} \right) \frac{1}{(1+x)^{\frac{k-3}{2}-p}} + \frac{1}{(1+x)^{\frac{k-3}{2}}} \sum_{n=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} c_n \alpha_{k,n,0} \right).$$

Тогда из условия (10) заключаем, что числа c_n удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} c_n \beta_{k,n,0} = 0; \\ \displaystyle\sum_{n \geqslant \frac{p}{2}}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} c_n \beta_{k,n,p} = 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant \left[\frac{k-3}{2}\right], \end{cases}$$

где $\beta_{k,n,p} = \frac{\alpha_{k,n,p}}{2^k k!}$. Полагая

$$\eta_{k,p} = \frac{(-1)^p}{2^p p! (1-k)_p},$$

видим, что определитель этой системы равен

$$\beta_{k,1,0}\, \beta_{k,2,0} \,\dots\, \beta_{k,\left[\frac{k-1}{2}\right],0}\, \eta_{k,0}\, \eta_{k,1} \,\dots\, \eta_{k,\left[\frac{k-3}{2}\right]}\, \Delta_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}(2).$$

Указанное произведение отлично от нуля на основании леммы 2. Отсюда $c_n = 0$ для любого $n = 1, \dots, \left[\frac{k-1}{2}\right]$. $\rhd$

Обозначим

$$\check{\tau}(z) = -\frac{1}{\overline{z}},$$

$$C_{\mathrm{symm}}(\mathbb{C}^*) = \left\{f \in C(\mathbb{C}^*) : f = f \circ \check{\tau}\right\}, \quad \text{где } \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Пусть $\mathscr{D}'(\mathscr{O})$ — пространство распределений на открытом множестве проколотой сферы $\mathbb{C}$, $\mathscr{D}(\mathscr{O})$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций в $\mathscr{O}$.

Лемма 4. *Пусть $f_n \in C_{\mathrm{symm}}(\mathbb{C}^*)$, $n \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f \in C(\mathbb{C}^*)$ в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{C}^*)$. Тогда $f \in C_{\mathrm{symm}}(\mathbb{C}^*)$.*

$\lhd$ Легко видеть, что для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^*)$ функция $\psi = \varphi \circ \check{\tau}$ также принадлежит $\mathscr{D}(\mathbb{C}^*)$. По условию имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{C}^*} f_n(z)\psi(z)\,d\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^*} f(z)\psi(z)\,d\mu(z).$$

В силу инвариантности меры μ относительно группы $\mathrm{PSU}(2)$ и сопряжений, отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{C}^*} f_n(\check{\tau}(z))\varphi(z)\,d\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^*} f(\check{\tau}(z))\varphi(z)\,d\mu(z).$$

Поскольку $f_n \in C_{\mathrm{symm}}(\mathbb{C}^*)$, это равенство переписывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{C}^*} f_n(z)\varphi(z)\,d\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^*} f(\check{\tau}(z))\varphi(z)\,d\mu(z).$$

Снова используя сходимость $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ к f, приходим к соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{C}^*} f(z)\varphi(z)\,d\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^*} f(\check{\tau}(z))\varphi(z)\,d\mu(z).$$

Учитывая произвольность функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^*)$, заключаем, что $f \in C_{\mathrm{symm}}(\mathbb{C}^*)$. $\rhd$

Лемма 5. *Пусть $f \in \mathfrak{K}_+ \cap C_{\mathrm{symm}}(\mathbb{C}^*)$. Тогда $f_+ \in \mathfrak{K}_-$.*

$\lhd$ Ясно, что функция f, доопределенная в ∞ значением $f(0)$, непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$.

Далее, предположим, что $|a| - |c| < 0$. Используя условие $f \in C_{\mathrm{symm}}(\mathbb{C}^*)$, а также учитывая инвариантность μ относительно группы $\mathrm{PSU}(2)$ и сопряжений, имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\tau_{a,c}(B)} f(z)\,d\mu(z) &= \int\limits_{\tau_{a,c}(B)} f(\check{\tau}(z))\,d\mu(z) = \int\limits_{B} f\big(\tau_{0,1}\big(\overline{\tau_{a,c}(z)}\big)\big)\,d\mu(z) \\
&= \int\limits_{B} f\left(\tau_{0,1}\left(\frac{\overline{a}\overline{z} - c}{\overline{c}\overline{z} + a}\right)\right) d\mu(z) = \int\limits_{B} f\left(\tau_{0,1}\left(\frac{\overline{a}z - c}{\overline{c}z + a}\right)\right) d\mu(z) \\
&= \int\limits_{B} f(\tau_{-\overline{c},\overline{a}}(z))\,d\mu(z) = \int\limits_{\tau_{-\overline{c},\overline{a}}(B)} f(z)\,d\mu(z).
\end{aligned}$$

Условие $f \in \mathfrak{K}_+$ показывает, что последний интеграл равен нулю.

Пусть теперь $|a| = |c|$. Тогда

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\alpha}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\tau_{a,c}(z) = \frac{e^{i\alpha} z - e^{-i\beta}}{e^{i\beta} z + e^{-i\alpha}}.$$

Поскольку

$$\tau_{a,c}\big(e^{-i(\alpha+\beta)}\big) = 0, \quad \tau_{a,c}\big(-e^{-i(\alpha+\beta)}\big) = \infty,$$

множество $\tau_{a,c}(B)$ является поворотом вокруг нуля замкнутой верхней полуплоскости. Интеграл от функции f по $\tau_{a,c}(B)$ преобразуется следующим образом:

$$\int\limits_{\tau_{a,c}(B)} f(z)\, d\mu(z) = \int\limits_{\tau_{a,c}(B)\cap B} f(z)\, d\mu(z) + \int\limits_{\tau_{a,c}(B)\setminus B} f(z)\, d\mu(z)$$

$$= \int\limits_{\tau_{a,c}(B)\cap B} f(z)\, d\mu(z) + \int\limits_{\tau_{a,c}(B)\setminus B} f(\check{\tau}(z))\, d\mu(z) = \int\limits_{\tau_{a,c}(B)\cap B} f(z)\, d\mu(z) + \int\limits_{B\setminus(\tau_{a,c}(B)\cap B)} f(z)\, d\mu(z)$$

$$= \int\limits_{B} f(z)\, d\mu(z) = \int\limits_{\tau_{1,0}(B)} f(z)\, d\mu(z) = 0.$$

Таким образом, $f_+ \in \mathfrak{K}_-$. $\rhd$

Поставим в соответствие локально суммируемой функции f на $\mathbb{C}$ ряд Фурье

$$f(z) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^k(z), \tag{11}$$

где

$$f^k(z) = f_k(\rho) e^{ik\varphi},$$

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\big(\rho e^{it}\big)\, e^{-ikt}\, dt. \tag{12}$$

Как известно, ряд в (11) сходится к функции f в пространстве распределений $\mathscr{D}'(\mathbb{C})$ (см. [9, предложение 9.1]).

Лемма 6. *Пусть $f \in C(\mathbb{C})$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда*

1) *функция f^k также принадлежит $C(\mathbb{C})$;*

2) *если $f \in \mathfrak{K}_+$, то $f^k \in \mathfrak{K}_+$;*

3) *если f удовлетворяет условию (2), то*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f^k(z)}{z^3} = 0.$$

$\lhd$ Перепишем формулу (12) в виде

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} f\Big(\rho e^{i(\varphi+\alpha)}\Big)\, e^{-ik(\varphi+\alpha)} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\Big(\rho e^{i(\varphi+\alpha)}\Big)\, e^{-ik(\varphi+\alpha)} d\alpha.$$

Тогда

$$f^k(z) = f_k(\rho)\, e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}z)e^{-ik\alpha}d\alpha, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{13}$$

Значит, $f^k\in C(\mathbb{C})$. Далее, из (13) при $|a|-|c|>0$ имеем

$$\int\limits_{\tau_{a,c}(B)} f^k(z)\,d\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\tau_{a,c}(B)} f(e^{i\alpha}z)\,d\mu(z)e^{-ik\alpha}d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_B f\big(e^{i\alpha}\tau_{a,c}(z)\big)\,d\mu(z)e^{-ik\alpha}d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_B f\big(\tau_{e^{i\alpha/2}a,e^{-i\alpha/2}c}(z)\big)\,d\mu(z)e^{-ik\alpha}d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\tau_{e^{i\alpha/2}a,\,e^{-i\alpha/2}c}(B)} f(z)\,d\mu(z)e^{-ik\alpha}d\alpha.$$

Кроме того, формула (13) влечет оценку

$$\frac{|f^k(z)|}{|z|^3} \leqslant \sup_{\alpha\in[0;2\pi]}\frac{|f(e^{i\alpha}z)|}{|e^{i\alpha}z|^3}, \quad z\neq 0.$$

Отсюда следуют утверждения 2) и 3) в лемме 6. $\rhd$

Лемма 7. *Пусть $f\in C(\mathbb{C})$. Тогда для того чтобы $f\in\mathfrak{K}_+$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $k\in\mathbb{Z}$ имело место равенство*

$$f^k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,k}\left(\frac{\rho}{1+\rho^2}\right)^{|k|} R^{(|k|,|k|)}_{2n-|k|}\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)e^{ik\varphi}, \quad c_{n,k}\in\mathbb{C}, \tag{14}$$

где ряд (14) *сходится в пространстве распределений* $\mathscr{D}'(\mathbb{C})$.

$\lhd$ Из [9, теорема 16.6], [27, теорема 1] видно, что $f\in\mathfrak{K}_+$ в том и только том случае, когда для любого $k\in\mathbb{Z}$

$$f^k(z) = \sum_{\lambda\in\mathscr{N}} c_{\lambda,k}\left(\frac{\rho}{1+\rho^2}\right)^{|k|} R^{(|k|,|k|)}_{(\lambda-2|k|-1)/2}\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)e^{ik\varphi}, \quad c_{\lambda,k}\in\mathbb{C}, \tag{15}$$

где $\mathscr{N} = \left\{\lambda>0 : R^{(1,1)}_{(\lambda-3)/2}(0)=0\right\}$ и ряд (15) сходится в $\mathscr{D}'(\mathbb{C})$. Используя (4) и равенство

$$F\left(2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}, \quad \alpha+\beta+\frac{1}{2}\neq 0,-1,-2,\ldots$$

(см. [25, гл. 2, п. 2.8, формула (50)]), находим

$$R^{(\alpha,\alpha)}_\lambda(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\alpha+1\right)}, \quad \alpha\neq -1,-2,\ldots$$

Отсюда получаем $\mathscr{N} = \{4n+1,\ n\in\mathbb{N}\}$. Теперь требуемое утверждение следует из (15). $\rhd$

Лемма 8. *Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и $2n - |k| \geqslant 0$. Тогда функция*

$$H_{k,n}(z) = \left(\frac{\rho}{1+\rho^2}\right)^{|k|} R_{2n-|k|}^{(|k|,|k|)}\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right) e^{ik\varphi} \tag{16}$$

принадлежит классу $C_{\rm symm}(\mathbb{C}^*)$.

$\lhd$ Из (4) и [25, гл. 10, п. 10.8, формулы (13), (16)] имеем соотношение

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n \frac{(\beta+1)_n}{(\alpha+1)_n} R_n^{(\beta,\alpha)}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя эту формулу и равенство

$$H_{k,n}(z) = \left(\frac{|z|}{1+|z|^2}\right)^{|k|} R_{2n-|k|}^{(|k|,|k|)}\left(\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)\left(\frac{z}{|z|}\right)^k,$$

нетрудно получить требуемое утверждение. $\rhd$

4. Доказательство теоремы 1

1) Пусть $f \in \mathfrak{K}_+$ и выполнено условие (2). По лемме 6

$$f^k \in \mathfrak{K}_+ \quad \text{и} \quad \lim_{z\to\infty}\frac{f^k(z)}{z^3} = 0 \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Покажем, что $f^k \in C_{\rm symm}(\mathbb{C}^*)$, $k \in \mathbb{Z}$. При $|k| \leqslant 2$ это следует из лемм 4, 7 и 8. Аналогично, если $|k| \geqslant 3$, то для некоторых констант c_n функция

$$\Phi(z) = f^k(z) - \sum_{n=1}^{\left[\frac{|k|-1}{2}\right]} c_n H_{k,n}(z)$$

принадлежит классу $C_{\rm symm}(\mathbb{C}^*)$. Тогда

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z^3} = \lim_{z\to\infty}\Phi\left(-\frac{1}{\overline{z}}\right)z^{-3} = -\lim_{w\to 0}\Phi(w)\overline{w}^{\,3} = 0$$

(см. (3), (4) и лемму 6). Отсюда и из (17) делаем вывод, что

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^3}\sum_{n=1}^{\left[\frac{|k|-1}{2}\right]} c_n H_{k,n}(z) = 0,$$

т. е.

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho^{|k|+3}}\sum_{n=1}^{\left[\frac{|k|-1}{2}\right]} c_n R_{2n-|k|}^{(|k|,|k|)}\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right) = 0.$$

Значит, по лемме 3 все c_n равны нулю и $f^k = \Phi \in C_{\rm symm}(\mathbb{C}^*)$. Теперь используя (11) и лемму 5, заключаем, что $f_+ \in \mathfrak{K}_-$.

2) Положим

$$f(z) = 10\left(\frac{\rho}{1+\rho^2}\right)^3 R_{-1}^{(3,3)}\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right) e^{i3\varphi}.$$

Лемма 7 показывает, что $f \in \mathfrak{K}_+$. Далее, используя (4) и формулу

$$F(\alpha,\beta;\alpha+\beta-m;t)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-m)} = \frac{\Gamma(m)(1-t)^{-m}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha-m)_n(\beta-m)_n}{(1-m)_n n!}\,(1-t)^n, \quad \alpha, m \in \mathbb{N},\ m \geqslant \alpha \tag{18}$$

(см. [25, гл. 2, п. 2.10, формула (14)]), находим

$$R_{-1}^{(3,3)}\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right) = F\left(1,6;4;\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\right) = \frac{(1+\rho^2)^3}{10} + \frac{3}{10}\left(1+\rho^2\right)^2 + \frac{3}{5}\left(1+\rho^2\right) \sim \frac{\rho^6}{10}, \quad \rho \to \infty.$$

Значит,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^3} = 1.$$

Наконец, если $|a|^2 + |c|^2 = 1$ и $|a| - |c| \leqslant 0$, то $\tau_{a,c}(B)$ является поворотом вокруг нуля замкнутой верхней полуплоскости или внешностью открытого круга на $\mathbb{C}$ (см. доказательство леммы 5). Отсюда следует, что функция f удовлетворяет всем требованиям в утверждении 2). Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. *Pompeiu D.* Sur une propriété intégrale des fonctions de deux variables réeles // Bull. Cl. Sci. Acad. Royale de Belgique (5).—1929.—Vol. 15.—P. 265–269.
2. *Chakalov L.* Sur un problème de D. Pompeiu // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1.—1944.—Vol. 40.—P. 1–44.
3. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Natur. Kl.—1917.—Vol. 69.—P. 262–277.
4. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.—Basel: Birkhäuser, 2013.—592 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0572-8.
5. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.—xii+454 p. DOI: 10.1007/978-94-010-0023-9.
6. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by Solutions of Partial Differential Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.—P. 185–194. DOI: 10.1007/978-94-011-2436-2_17.
7. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления.—М.: ВИНИТИ, 1989.—Т. 54.—С. 5–111.
8. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem” // Contemp. Math. Radon Transform and Tomography.—2001.—Vol. 278.—P. 69–74. DOI: 10.1090/conm/278/04595.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.—London: Springer, 2009.—672 p.
10. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958.—158 с.
11. *Smith J. D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Math. Proc. Camb. Philos. Soc.—1972.—Vol. 72, № 3.—P. 403–416. DOI: 10.1017/s0305004100047241.
12. *Rawat R., Sitaram A.* The injectivity of the Pompeiu transform and L^p-analogues of the Wiener Tauberian theorem // Israel J. Math.—1995.—Vol. 91.—P. 307–316. DOI: 10.1007/BF02761653.
13. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Analyse Math.—1994.—Vol. 63, № 1.—P. 255–286. DOI: 10.1007/BF03008426.
14. *Ungar P.* Freak theorem about functions on a sphere // J. London Math. Soc.—1954.—Vol. s1-29, № 1.—P. 100–103. DOI: 10.1112/jlms/s1-29.1.100.

15. *Schneider R.* Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres // J. Math. Anal. Appl.—1969.—Vol. 26, № 2.—P. 381–384. DOI: 10.1016/0022-247X(69)90160-7.
16. *Delsarte J.* Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B.—1958.—Vol. 246.—P. 1358–1360.
17. *Netuka I., Vesely J.* Mean value property and harmonic functions // Classical and Modern Potential Theory and Applications.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.—P. 359–398.
18. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 9.—С. 13–30. DOI: 10.4213/sm255.
19. *Berenstein C. A., Gay R., Yger A.* Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math.—1990.—Vol. 54, № 1.—P. 259–287. DOI: 10.1007/bf02796152.
20. *Berkani M., Harchaoui M. El., Gay R.* Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique — Cas des deux boules // Complex Variables, Theory and Application: An International Journal.—2000.—Vol. 43, № 1.—P. 29–57. DOI: 10.1080/17476930008815300.
21. *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Докл. РАН.—2001.—Т. 379, № 5.—С. 587–590.
22. *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Алгебра и анализ.—2003.—Т. 15, № 5.—С. 169–197.
23. *Волчков В. В., Волчков Вит. В.* Интерполяционные задачи для функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления.—2020.—Т. 490, № 1.—С. 20–23. DOI: 10.31857/S268695432001021X.
24. *Постников М. М.* Аналитическая геометрия.—М.: Наука, 1986.—416 с.
25. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.—М.: Наука, 1973.—296 с.
26. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы.—М.: Наука, 1986.—800 с.
27. *Волчков Вит. В.* О функциях с нулевыми шаровыми средними на компактных двухточечно-однородных пространствах // Мат. сб.—2007.—Т. 198, № 4.—С. 21–46. DOI: 10.4213/sm1440.

Статья поступила 2 июля 2020 г.

Волчкова Наталья Петровна
Донецкий национальный технический университет,
заведующая кафедрой высшей математики им. В. В. Пака
РОССИЯ, 283000, Донецк, ул. Артема, 58
E-mail: volna936@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6193-2782

Волчков Виталий Владимирович
Донецкий национальный университет,
заведующий кафедрой математического анализа
и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 283001, Донецк, ул. Университетская, 24
E-mail: volna936@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Ищенко Наталья Александровна
Донецкий национальный университет,
аспирант кафедры математического анализа
и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 283001, Донецк, ул. Университетская, 24
E-mail: nataandRap@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 2, P. 19–33

ERASING OF SINGULARITIES OF FUNCTIONS WITH ZERO INTEGRALS OVER DISKS

Volchkova, N. P.[1], Volchkov, Vit. V.[2] and Ischenko, N. A.[2]

[1] Donetsk National Technical University,
58 Artioma St., Donetsk 283000, Russia;
[2] Donetsk National University,
24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia

E-mail: `volna936@gmail.com`, `nataandRap@mail.ru`

Abstract. Let $\mathscr{M}$ and $\mathscr{N}$ be manifolds, let $\mathscr{D}$ be a domain in $\mathscr{M}$, and let $E \subset \mathscr{D}$ be a set closed with respect to $\mathscr{D}$. The singularity erasure problem is as follows: find conditions under which any mapping $f : \mathscr{D}\backslash E \to \mathscr{N}$ from a given class admits a class preserving extension to a mapping $\mathbf{f} : \mathscr{D} \to \mathscr{N}$. If the indicated extension exists, then the set E is called a removable set in the considered class of mappings. The purpose of this article is to study the singularity erasure problem in the context of the properties of the kernel of the local Pompeiu transform. We study the class $\mathfrak{K}_+$ consisting of continuous functions on the complex plane $\mathbb{C}$ having zero integrals over all circles from $\mathbb{C}$ congruent to the unit disk with respect to the spherical metric. An analogue of the group of Euclidean motions in this case is the group of linear fractional transformations PSU(2). An exact condition is found under which the functions of the class in question appropriately defined at the infinity have this property on the extended complex plane $\overline{\mathbb{C}}$. The proof of the main result is based on an appropriate description of the class $\mathfrak{K}_+$. The central tool in this description is the Fourier series in spherical harmonics. It is shown that the Fourier coefficients of the function $f \in \mathfrak{K}_+$ are representable by series in Jacobi functions. The further proof consists in studying the asymptotic behavior of the indicated series when approaching a singular point. The results obtained in this article can be used to solve problems related to spherical means.

Key words: Pompeiu transform, spherical means, Jacobi functions.

Mathematical Subject Classification (2010): 33C45, 42A75, 42A85.

For citation: *Volchkova, N. P., Volchkov, Vit. V. and Ischenko, N. A.* Erasing of Singularities of Functions with Zero Integrals over Disks, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 19–33. (in Russian). DOI: 10.46698/u3425-9673-4629-c.

References

1. *Pompeiu, D.* Sur Une Propriété Intégrale de Fonctions de Deux Variables Réeles, *Bulletin de la Classe des Sciences, Academie Royale de Belgique* (5), 1929, vol. 15, pp. 265–269.
2. *Chakalov, L.* Sur un Problème de D. Pompeiu, *Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1*, 1944, vol. 40, pp. 1–44.
3. *Radon, J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte Längs Gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Natur. Kl.*, 1917, vol. 69, pp. 262–277.
4. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Basel, Birkhäuser, 2013, 592 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0572-8.
5. *Volchkov, V. V. Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2003, XII+454 p. DOI: 10.1007/978-94-010-0023-9.
6. *Zalcman, L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem, *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1992, pp. 185–194. DOI:10.1007/978-94-011-2436-2_17.
7. *Berenstein, C. A. and Struppa, D. C.* Complex Analysis and Convolution Equations, *Several Complex Variables, V. Encyclopedia of Mathematical Sciences*, New York, Springer-Verlag, 1993, vol. 54, pp. 1–108. DOI: 10.1007/978-3-642-58011-6_1.
8. *Zalcman, L.* Supplementary Bibliography to “A Bibliographic Survey of the Pompeiu Problem”, *Contemporary Mathematics, Radon Transform and Tomography*, 2001, vol. 278, pp. 69–74. DOI: 10.1090/conm/278/04595.

9. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, London, Springer, 2009, 672 p.
10. *John, F. Plane Waves and Spherical Means, Applied to Partial Differential Equations*, New York, Dover, 1971, 158 p.
11. *Smith, J. D.* Harmonic Analysis of Scalar and Vector Fields in $\mathbb{R}^n$, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1972, vol. 72, no. 3, pp. 403–416. DOI: 10.1017/S0305004100047241.
12. *Rawat, R. and Sitaram, A.* The Injectivity of the Pompeiu Transform and L^p-Analogues of the Wiener Tauberian Theorem, *Israel Journal of Mathematics*, 1995, vol. 91, pp. 307–316. DOI: 10.1007/BF02761653.
13. *Thangavelu, S.* Spherical Means and CR Functions on the Heisenberg Group, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1994, vol. 63, no. 1, pp. 255–286. DOI: 10.1007/BF03008426.
14. *Ungar, P.* Freak Theorem About Functions on a Sphere, *Journal of the London Mathematical Society*, 1954, vol. s1-29, no. 1, pp. 100–103. DOI: 10.1112/jlms/s1-29.1.100.
15. *Schneider, R.* Functions on a Sphere with Vanishing Integrals Over Certain Subspheres, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1969, vol. 26, no. 2, pp. 381–384. DOI: 10.1016/0022-247x(69)90160-7.
16. *Delsarte, J.* Note sur une Propriété Nouvelle des Fonctions Harmoniques, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B*, 1958, vol. 246, pp. 1358–1360.
17. *Netuka, I. and Vesely, J.* Mean Value Property and Harmonic Functions, *Classical and Modern Potential Theory and Applications*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1994, pp. 359–398.
18. *Volchkov, V. V.* Solution of the Support Problem for Several Function Classes, *Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 9, pp. 1279–1294. DOI: 10.1070/SM1997v188n09ABEH000255.
19. *Berenstein, C. A., Gay, R. and Yger, A.* Inversion of the Local Pompeiu transform, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1990, vol. 54, no. 1, pp. 259–287. DOI: 10.1007/bf02796152.
20. *Berkani, M., Harchaoui, M. El and Gay, R.* Inversion de la Transformation de Pompéiu Locale dans L'espace Hyperbolique Quaternique — Cas des deux Boules, *J. Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, 2000, vol. 43, no. 1, pp. 29–57. DOI: 10.1080/17476930008815300.
21. *Volchkov, Vit. V. and Volchkova, N. P.* Inversion of the Local Pompeiu Transform on Quaternionic Hyperbolic Space, *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 1, pp. 90–93.
22. *Volchkov, Vit. V. and Volchkova, N. P.* Inversion Theorems for the Local Pompeiu Transformation in the Quaternion Hyperbolic Space, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2004, vol. 15, no. 5, pp. 753–771. DOI: 10.1090/S1061-0022-04-00830-1.
23. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V.* Interpolation Problems for Functions with Zero Integrals over Balls of Fixed Radius, *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 101, no. 1, pp. 16–19. DOI: 10.1134/S1064562420010214.
24. *Postnikov, M. M. Analiticheskaya geometriya* [Analytic Geometry], Moscow, Nauka, 1986, 416 p. (in Russian).
25. *Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F. G. Higher Transcendental Functions (Bateman Manuscript Project). Vol.* I, New York, McGraw-Hill, 1953, 302 p.
26. *Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I. Integraly i ryady. Dopolnitel'nye glavy* [Integrals and Series. Supplementary Parts], Moscow, Nauka, 1986, 800 p. (in Russian).
27. *Volchkov, Vit. V.* Functions with Ball Means Values Equal to Zero on Compact Two-Point Homogeneous Spaces, *Sbornik: Mathematics*, 2007, vol. 198, no. 4, pp. 465–490. DOI: 10.1070/SM2007v198n04ABEH003845.

Received Jule 2, 2020

Natalia P. Volchkova
Donetsk National Technical University,
58 Artioma St., Donetsk 283000, Russia,
Head of the Department of Higher Mathematics named after V. V. Pak
E-mail: `volna936@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-6193-2782

Vitaliy V. Volchkov
Donetsk National University,
24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia,
Head of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations

E-mail: `volna936@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Natalia A. Ischenko
Donetsk National University,
24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia,
Postgraduate Student of the Department
of Mathematical Analysis and Differential Equations
E-mail: `nataandRap@mail.ru`