Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 2, С. 34–50

УДК 917.952
DOI 10.46698/x8869-5899-2064-l

ВАРИАНТЫ МЕТОДА ГОДОГРАФА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ#

Т. Ф. Долгих[1], М. Ю. Жуков[1,2]

[1] Институт механики, математики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ, Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН, Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: dolgikh@sfedu.ru, myuzhukov@mail.ru

Аннотация. Строится решение задачи Коши для системы двух квазилинейных однородных уравнений в частных производных первого порядка при помощи метода годографа, позволяющего преобразовать решение квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка к решению некоторого линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Показано, что различные варианты метода годографа — стандартного, на основе закона сохранения и обобщенного метода годографа, позволяющие строить решение задачи Коши в неявной форме, в конечном итоге, приводят к одному и тому же результату и отличаются лишь объемом технической работы. Доказательство осуществляется путем вычисления инвариантов Лапласа для канонической формы линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. В случае, когда уравнения допускают явную связь исходных переменных с инвариантами Римана и соответствующее линейное уравнение метода годографа позволяет указать явную форму функции Римана — Грина, описан способ построения явного решения на линиях уровня неявного решения. Задача Коши для системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка сводится к задаче Коши для некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примера приведено точное неявное решение для системы слабо-нелинейных уравнений. Все рассмотренные методы и способ построения явного решения можно применять для уравнений гиперболического и эллиптического типов. В случае гиперболических уравнений возможно построение автомодельных и разрывных решений (после добавления условий на разрывах), а также решений многозначных по пространственной координате (если такие решения допускаются постановкой задачи). Несмотря на то, что на заключительном этапе метода задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений приходится решать численно, никаких аппроксимаций уравнений в частных производных, типичных для конечно-разностного метода, метода конечных элементов, метода конечных объемов и т. п. не используется. Метод является точным в том смысле, что погрешность вычислений связана лишь с точностью интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: метод годографа, квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка, инварианты Лапласа, слабо-нелинейное уравнение.

Mathematical Subject Classification (2010): 35F55, 35L60, 35L40, 35L15.

Образец цитирования: *Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю.* Варианты метода годографа для решения системы двух квазилинейных уравнений // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 2.—С. 34–50. DOI: 10.46698/x8869-5899-2064-l.

#Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

Введение

В настоящее время известны различные варианты метода годографа, применяемые для исследования поведения решений систем квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Среди таких вариантов укажем три наиболее часто используемых: стандартный вариант метода [1], вариант на основе закона сохранения (см., например, [2, 3]), и обобщенный метод годографа (см., в частности, [4]).

(i) Стандартный вариант позволяет преобразовать систему двух квазилинейных уравнений в некоторое линейное уравнение в частных производных второго порядка, содержащего переменные коэффициенты. В основе метода лежит взаимозамена зависимых и независимых переменных. Подчеркнем, что метод может быть использован только для системы двух квазилинейных уравнений.

(ii) Вариант метода годографа на основе закона сохранения требует приведения исходной системы уравнений к инвариантам Римана, конструирования некоторого закона сохранения, для плотности и потока которого требуется решать систему линейных уравнений в частных производных первого порядка. Метод также как и стандартный применим лишь к системе двух квазилинейных уравнений. Недостатком метода является необходимость указания явной связи между исходными переменными и инвариантами Римана. Хотя хорошо известно, что система двух уравнений всегда приводится к инвариантам Римана (см., например, [1]), построить явную зависимость не всегда возможно.

(iii) Обобщенный метод годографа применим к произвольной полугамильтоновой (см., например, [4]) системе квазилинейных уравнений, записанной в инвариантах Римана. В случае двух уравнений система всегда является полугамильтоновой. Путем решения некоторой системы линейных уравнений в частных производных первого порядка (для, так называемых, коммутирующих потоков) неявное решение исходной системы может быть представлено в алгебраической форме.

Основная цель работы — подтверждение *a priori* очевидного факта, что, в конечном итоге, все три указанных метода в случае двух квазилинейных уравнений, записанных в инвариантах Римана сводятся к построению функции Римана — Грина для линейного уравнения в частных производных второго порядка. Хотя на предварительном этапе уравнения для функции Римана — Грина различны, такие уравнения имеют одинаковые инварианты Лапласа (см., например, [5, с. 116–125]) и, фактически, сводятся к решению одного и того же уравнения — функции Римана — Грина различаются лишь функциональным множителем.

Иными словами, в некотором смысле, все три указанных метода годографа эквиваленты. Различие между методами чисто техническое и заключается в объеме работы, требуемой для построения функции Римана — Грина. Обратим внимание на то, что для рассматриваемых методов тип квазилинейных уравнений может быть как гиперболический, так и эллиптический.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы двух квазилинейных уравнений, записанных в инвариантах Римана,

$$R^1_t + \lambda^1\bigl(R^1, R^2\bigr)R^1_x = 0, \quad R^2_t + \lambda^2\bigl(R^1, R^2\bigr)R^2_x = 0, \tag{1.1}$$

$$R^1(x,t)\big|_{t=0} = R^1_0(x), \quad R^2(x,t)\big|_{t=0} = R^2_0(x). \tag{1.2}$$

Здесь R^1, R^2 — инварианты Римана, $\lambda^1(R^1,R^2)$, $\lambda^2(R^1,R^2)$ — характеристические направления (заданные функции), x, t — координата и время, $R_0^1(x)$, $R_0^2(x)$ — известные функции, верхние индексы — номера переменных (не показатели степени).

Начальные условия (1.2) для простоты задаем при $t=0$. Приводимые ниже результаты об эквивалентности методов годографа справедливы и в общем случае, когда начальные данные для задачи Коши заданы на некоторой достаточно гладкой линии, не являющейся характеристикой (общую постановку задачи см. в [1, с. 43–47]). Заметим, что можно рассматривать и задачу с данными на характеристике (задача Гурса), см., в частности, [6].

Для построения решения задачи (1.1), (1.2) используем различные варианты метода годографа.

2. Метод годографа на основе закона сохранения

Следуя работе [2] (см. также развитие метода в [3, 6–10]), дадим краткое описание метода годографа на основе закона сохранения, применимого в случае системы двух квазилинейных уравнений. Детальное описание, возможные модификации и различные способы построения явного решения на линиях уровня неявного решения указан в [3].

2.1. Закон сохранения. Рассматриваем закон сохранения

$$\varphi_t\big(R^1,R^2\big)+\psi_x\big(R^1,R^2\big)=0, \tag{2.1}$$

где φ, ψ — плотность и плотность потока закона сохранения, которые следует определить на основе исходных уравнений (1.1).

Выполняя дифференцирование и исключая производные R_t^1, R_t^2 при помощи (1.1), с учетом независимости производных $R_x^1(x,t)$ и $R_x^2(x,t)$ получим соотношения для φ, ψ:

$$\varphi_{R^1}\lambda^1=\psi_{R^1},\quad \varphi_{R^2}\lambda^2=\psi_{R^2}. \tag{2.2}$$

Условие совместности уравнений (2.2) дает линейное уравнение в частных производных второго порядка для определения φ:

$$\big(\varphi_{R^1}\lambda^1\big)_{R^2}=\big(\varphi_{R^2}\lambda^2\big)_{R^1} \tag{2.3}$$

или

$$\varphi_{R^1R^2}+\frac{\lambda^1_{R^2}}{\lambda^1-\lambda^2}\varphi_{R^1}-\frac{\lambda^2_{R^1}}{\lambda^1-\lambda^2}\varphi_{R^2}=0. \tag{2.4}$$

Аналогичное уравнение можно получить и для функции ψ — достаточно произвести формальные замены $\lambda^k\to 1/\lambda^k$, $\varphi\to\psi$ в (2.3), (2.4).

2.2. Неявное решение. Для построения неявного решения, считая функции φ, ψ известными, используем закон сохранения (2.1), представленный в виде дифференциальной формы

$$d(\varphi dx-\psi dt)=0. \tag{2.5}$$

На плоскости (x,t) выбираем замкнутый кусочно-гладкий контур PQM. Линии PM и QM задаются характеристическими направлениями уравнений (1.1), на которых сохраняются соответствующие инварианты Римана

$$QM\colon\ \frac{dx}{dt}=\lambda^1,\quad R^1=r^1;\qquad MP\colon\ \frac{dx}{dt}=\lambda^2,\quad R^2=r^2,$$

где r^1, r^2 — параметры (значения инвариантов), которые идентифицируют различные линии контура.

В качестве линии PQ выбираем некоторый отрезок $[a, b]$ на оси x, т. е. при $t = 0$. Заметим, что именно на этом отрезке, в силу (1.2), известны начальные значения $R_0^1(x)$, $R_0^2(x)$ инвариантов Римана. Точки контура PQM на плоскости (x, t) заданы координатами

$$P = (a, 0), \quad Q = (b, 0), \quad M = (x, t).$$

Кроме этого, значения r^1, r^2 определены начальными условиями (1.2)

$$r^1 = r^1(b) = R_0^1(b), \quad r^2 = r^2(a) = R_0^2(a).$$

Точка $M = (x, t)$ соответствует пересечению характеристик (различных семейств) и значения инвариантов Римана в точке M имеют вид

$$R^1(x, t) = r^1(b) = R_0^1(b), \quad R^2(x, t) = r^2(a) = R_0^2(a). \tag{2.6}$$

Дополним уравнения (2.2)–(2.4) условиями (см. [3], в [2] используется несколько иная форма соотношений)

$$\big(\psi - \lambda^1\varphi\big)\big|_{R^1=r^1} = 1, \quad \big(\psi - \lambda^2\varphi\big)\big|_{R^2=r^2} = -1. \tag{2.7}$$

Тогда интегрирование закона сохранения (2.5) по замкнутому контуру PQM позволяет получить функцию $t(a, b)$ (функция $x(a, b)$ строится аналогичным образом):

$$t(a, b) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \varphi\big(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau)\,\big|\,r^1(b), r^2(a)\big)\,d\tau. \tag{2.8}$$

Здесь подынтегральная функция $\varphi(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau)\,|\,r^1(b), r^2(a))$ по первой паре аргументов является решением уравнения (2.4), а вторая пара аргументов указывает на то, что решение в силу условий (2.7) зависит от параметров a, b.

Таким образом, если функции $t(a, b)$ и $x(a, b)$ известны, то неявное двухпараметрическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) с учетом (2.6) записывается в форме

$$R^1(x, t) = r^1(b) = R_0^1(b), \quad R^2(x, t) = r^2(a) = R_0^2(a), \tag{2.9}$$

$$t = t(a, b), \quad x = x(a, b). \tag{2.10}$$

Замечание 1. Следует строить именно функцию $t(a, b)$, зависящую от параметров a, b, а не функцию $t(r^1, r^2)$. В противном случае придется определять обратные функции $a = a(r^2)$, $b = b(r^1)$. Игнорирование этого очевидного факта препятствовало использованию метода годографа для немонотонных начальных данных, а также для построения неоднозначных решений.

Замечание 2. При выводе соотношений используется, в частности, дифференцирование начальных данных. Однако, можно строго показать, что требования на гладкость, в конечном итоге, ограничены лишь условием существования интеграла (2.8). В частности, функции $R_0^1(x)$, $R_0^2(x)$ можно выбирать кусочно-непрерывными. Иными словами, метод позволяет исследовать разрывные решения, разумеется, если поставлены дополнительные условия на разрывах типа Ренкина — Гюгонио.

Замечание 3. Ввиду того, что функции от инвариантов Римана также являются инвариантами, то в силу (2.6), (2.9) величины $a(x,t)$, $b(x,t)$ (решение уравнений (2.10)) — также инварианты Римана, которые удовлетворяют уравнениям

$$a_t+\lambda^2\bigl(r^1(b),r^2(a)\bigr)a_x=0,\quad b_t+\lambda^1\bigl(r^1(b),r^2(a)\bigr)b_x=0. \tag{2.11}$$

2.3. Функция Римана — Грина. Укажем один из вариантов определения подынтегрального выражения в (2.8), т. е. функции $\varphi(R_0^1(\tau),R_0^2(\tau)\,|\,r^1(b),r^2(a))$, опирающийся на определение функции Римана — Грина для уравнения (2.4).

Для удобства запишем уравнение (2.4) в одной из канонических форм для гиперболического уравнения

$$L_{(R^1,R^2)}\,\varphi\equiv\varphi_{R^1R^2}+a^\varphi\varphi_{R^1}+b^\varphi\varphi_{R^2}+c^\varphi\varphi=0, \tag{2.12}$$

где коэффициенты $a^\varphi(R^1,R^2)$, $b^\varphi(R^1,R^2)$, $c^\varphi(R^1,R^2)$ имеют вид

$$a^\varphi=\frac{\lambda^1_{R^2}}{\lambda^1-\lambda^2},\quad b^\varphi=-\frac{\lambda^2_{R^1}}{\lambda^1-\lambda^2},\quad c^\varphi=0. \tag{2.13}$$

Здесь верхний индекс «φ» использован для того, чтобы подчеркнуть принадлежность коэффициентов задаче для определения функции φ.

Функция Римана — Грина $\Phi(R^1,R^2\,|\,r^1,r^2)$ для уравнения (2.12) по паре аргументов R^1, R^2 удовлетворяет задаче для сопряженного уравнения

$$L^*_{(R^1,R^2)}\Phi\equiv\Phi_{R^1R^2}-(a^\varphi\Phi)_{R^1}-(b^\varphi\Phi)_{R^2}+c^\varphi\Phi=0, \tag{2.14}$$

$$\bigl(\Phi_{R^1}-b^\varphi\Phi\bigr)\big|_{R^2=r^2}=0,\quad \bigl(\Phi_{R^2}-a^\varphi\Phi\bigr)\big|_{R^1=r^1}=0, \tag{2.15}$$

$$\Phi\bigl(r^1,r^2\,\big|\,r^1,r^2\bigr)=1. \tag{2.16}$$

По паре аргументов r^1, r^2 функция $\Phi(R^1,R^2\,|\,r^1,r^2)$ удовлетворяет уравнению (2.12)

$$L_{(r^1,r^2)}\Phi\equiv\Phi_{r^1r^2}+a^\varphi\Phi_{r^1}+b^\varphi\Phi_{r^2}+c^\varphi\Phi=0,$$

и условиям (а также условию нормировки (2.16))

$$\bigl(\Phi_{r^1}+b^\varphi\Phi\bigr)\big|_{r^2=R^2}=0,\quad \bigl(\Phi_{r^2}+a^\varphi\Phi\bigr)\big|_{r^1=R^1}=0. \tag{2.17}$$

Нетрудно убедиться, что интегрирование соотношений (2.15) приводит к условиям (2.7). Например, с учетом (2.13), (2.2) имеем

$$\bigl(\Phi_{r^2}+a^\varphi\Phi\bigr)\big|_{r^1=R^1}=0\;\longrightarrow\;\left(\Phi_{r^2}+\frac{\lambda^1_{r^2}}{\lambda^1-\lambda^2}\,\Phi\right)\bigg|_{r^1=R^1}=0$$
$$\xrightarrow{\lambda^2\Phi_{r^2}=\psi_{r^2}}\;\Bigl(\bigl(\lambda^1\Phi\bigr)_{r^2}-\psi_{r^2}\Bigr)\Big|_{r^1=R^1}=0\;\longrightarrow\;\bigl(\lambda^1\Phi-\psi\bigr)\big|_{r^1=R^1}=F\bigl(r^1\bigr).$$

Здесь $F(r^1)$ — произвольная функция. Подразумевается, что $\varphi(r^1,r^2)=\Phi(R^1,R^2\,|\,r^1,r^2)$. В соотношении (2.2) $F(r^1)=-1$. Иной выбор функции повлечет лишь усложнение формул и не играет какой-либо существенной роли.

Таким образом, функция Римана — Грина $\Phi(R^1,R^2\,|\,r^1,r^2)$ с точностью до множителя $M(r^1,r^2)$, который определяется путем прямой подстановки функции в (2.7), является решением задачи (2.3), (2.7), и с учетом симметрии функции Римана — Грина по парам аргументов, т. е. $\Phi(R^1, R^2 \,|\, r^1, r^2) = \Phi(r^1, r^2 \,|\, R^1, R^2)$ (см. [11, с. 446–482]), имеем

$$\varphi\big(R^1, R^2 \,\big|\, r^1, r^2\big) = \frac{2\Phi\big(R^1, R^2 \,\big|\, r^1, r^2\big)}{\lambda^2(r^1, r^2) - \lambda^1(r^1, r^2)}. \tag{2.18}$$

В окончательном виде формула (2.3) для функции $t(a, b)$ принимает вид

$$t(a, b) = \int\limits_a^b \frac{\Phi\big(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau) \,\big|\, r^1(b), r^2(a)\big)}{\lambda^2(r^1(b), r^2(a)) - \lambda^1(r^1(b), r^2(a))}\, d\tau. \tag{2.19}$$

Замечание 4. Различные способы построения функции Римана — Грина для канонической формы гиперболического уравнения (2.12) подробно описаны в [12]. Большое количество функций Римана — Грина для различных уравнений имеется в [13]. Особый интерес представляет способ конструирования функции Римана — Грина на основе группового анализа [14, с. 120–128] (см. также [15]). Обратим внимание на то, редукция системы двух квазилинейных уравнений (1.1) к канонической форме (2.12) (или в конкретном случае к (2.4)), собственно говоря, и означает, что исходная система приведена к инвариантам Римана — канонические переменные при преобразовании произвольного линейного уравнения в частных производных второго порядка к форме (2.12) и являются инвариантами Римана.

2.4. Построение явной формы решения. Коротко опишем способ конструирования явного решения задачи Коши (1.1), (1.2) на линиях уровня функции $t(a, b)$. В [3, с. 51] показано, что на линии уровня (изохроне) функции $t(a, b) = t_*$, где t_* — некоторый фиксированный момент времени, параметризованной при помощи параметра μ, явное решение строится путем интегрирования задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da(\mu)}{d\mu} = -t_b(a, b), \quad \frac{db(\mu)}{d\mu} = t_a(a, b), \tag{2.20}$$

$$\frac{dX(\mu)}{d\mu} = \big(\lambda^2\big(r^1(b), r^2(a)\big) - \lambda^1\big(r^1(b), r^2(a)\big)\big) t_b(a, b) t_a(a, b), \tag{2.21}$$

$$a(0) = a_*, \quad b(0) = b_*, \quad X(0) = X_*, \tag{2.22}$$

где (a_*, b_*) — точка на изохроне, т. е. $t(a_*, b_*) = t_*$, X_* — координата x, соответствующая на изохрене параметру $\mu = 0$.

Окончательная форма решения на изохроне представима в виде

$$R^1(x, t_*) = R_0^1(b(\mu)), \quad R^2(x, t_*) = R_0^2(a(\mu)), \quad x = X(\mu). \tag{2.23}$$

Уравнения (2.20) являются достаточным условием выполнения соотношения, полученного дифференцированием по параметру μ равенства $t(a(\mu), b(\mu)) = t_*$, и, на самом деле, правые части определены с точностью до произвольного функционального множителя. Уравнение (2.21) получено путем взаимозамены $(a, b) \leftrightarrows (x, t)$, что с учетом (2.11) приводит к уравнениям

$$x_b = \lambda^2 t_b, \quad x_a = \lambda^1 t_a, \tag{2.24}$$

с последующим дифференцированием по μ соотношения $X(\mu) = x(a(\mu), b(\mu))$

$$X_\mu = x_a a_\mu + x_b b_\mu = -x_a t_b + x_b t_a = (\lambda^1 - \lambda^1) t_a t_b.$$

Иными словами, правая часть уравнения (2.21) — это якобиан замены переменных $(a,b) \leftrightarrows (x,t)$ (подробнее см. [3, с. 47], где также детально описаны различные способы определения начальных данных a_*, b_*, X_*).

Замечание 5. Для построения решения на изохроне функция $x(a,b)$ (см. (2.10)) не требуется. Разумеется, в большинстве случаев задачу Коши (2.20)–(2.22) приходится решать численно. Эффективность метода зависит от сложности вычисления функции Римана — Грина (как правило, некоторая гипергеометрическая функция). Вычисление интегралов, возникающих при расчете функции $t(a,b)$ и производных $t_a(a,b)$, $t_b(a,b)$ также сводится к решению некоторых задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно точность численного интегрирования задачи Коши (например, методом Рунге — Кутты), в конечном итоге, и определяет точность решения. Важно отметить, что не используются никакие аппроксимации уравнений в частных производных, характерные для конечно-разностных методов, метода конечных элементов, метода конечных объемов и т. п.

Замечание 6. В уравнениях (2.20) вместо параметра μ можно выбирать пространственную переменную, т. е. считать $\mu = x$, и опускать уравнение (2.21). Однако, использование параметра μ позволяет строить многозначные по пространственной переменной x решения, конечно, если они допускаются постановкой задачи.

Замечание 7. Система (2.20) — гамильтонова система. Роль гамильтониана играет $t(a,b)$. Это позволяет достаточно полно исследовать структуру изолиний функции $t(a,b)$. В частности, стационарные точки уравнений, определяемые уравнениями $t_a(a,b) = 0$, $t_b(a,b) = 0$ (если таковые имеются) могут быть либо центром, либо седлом. Замкнутым траекториям на плоскости (a,b) соответствуют периодические по параметру μ решения (см., например, [16, с. 128, 129]).

3. Стандартный вариант метода годографа

Производя замены переменных $(R^1, R^2) \rightleftarrows (x,t)$,

$$R^1_t = \frac{x_{R^2}}{\Delta}, \quad R^2_t = -\frac{x_{R^1}}{\Delta}, \quad R^1_x = -\frac{t_{R^2}}{\Delta}, \quad R^2_x = \frac{t_{R^1}}{\Delta},$$
$$\Delta = t_{R^1} x_{R^2} - x_{R^1} t_{R^2}, \tag{3.1}$$

после подстановки в (1.1) получаем стандартный вариант метода годографа (взаимозамена зависимых и независимых переменных; сравни с (2.24))

$$x_{R^2} = \lambda^1 t_{R^2}, \quad x_{R^1} = \lambda^2 t_{R^1}. \tag{3.2}$$

Условие разрешимости (совместности) (3.2) приводит к уравнению для t (аналогично можно получить уравнение для x):

$$t_{R^1R^2} - \frac{\lambda^2_{R^2}}{\lambda^1 - \lambda^2} t_{R^1} + \frac{\lambda^1_{R^1}}{\lambda^1 - \lambda^2} t_{R^2} = 0 \tag{3.3}$$

или

$$\overline{L}_{(R^1,R^2)} t\big(R^1, R^2\big) \equiv t_{R^1R^2} + a^t t_{R^1} + b^t t_{R^2} + c^t t = 0, \tag{3.4}$$

где коэффициенты $a^t(R^1,R^2)$, $b^t(R^1,R^2)$, $c^t(R^1,R^2)$ имеют вид

$$a^t = -\frac{\lambda^2_{R^2}}{\lambda^1 - \lambda^2}, \quad b^t = \frac{\lambda^1_{R^1}}{\lambda^1 - \lambda^2}, \quad c^t = 0. \tag{3.5}$$

Функция Римана — Грина $T(R^1, R^2 \,|\, r^1, r^2)$ для уравнения (3.4) определяется задачей (сравни с (2.14)–(2.16))

$$\overline{L}^*_{(R^1,R^2)} T\big(R^1, R^2\big) \equiv T_{R^1R^2} - (a^tT)_{R^1} - (b^tT)_{R^2} + c^tT = 0, \tag{3.6}$$

$$\big(T_{R^1} - b^tT\big)\big|_{R^2=r^2} = 0, \quad \big(T_{R^2} - a^tT\big)\big|_{R^1=r^1} = 0, \tag{3.7}$$

$$T\big(r^1, r^2 \,\big|\, r^1, r^2\big) = 1. \tag{3.8}$$

Решение уравнения (3.4) с начальным условием $t(R^1_0(x), R^2_0(x)) = 0$ при помощи функции Римана — Грина $T(R^1, R^2 \,|\, r^1, r^2)$ записывается в форме (см., например, [11, с. 446–482])

$$t\big(r^1, r^2\big) = \frac{1}{2} \int\limits_{AB} T\big(R^1, R^2 \,\big|\, r^1, r^2\big)\big(t_{R^1}\, dR^1 - t_{R^2}\, dR^2\big), \quad t\big|_{AB} = 0, \tag{3.9}$$

где контур AB определен как

$$AB = \big\{R^1 = R^1_0(\tau),\ R^2 = R^2_0(\tau),\ a \leqslant \tau \leqslant b\big\}. \tag{3.10}$$

Значениям $\tau = a$, $\tau = b$ соответствуют начало и конец контура AB, лежащего на оси $t = 0$, т. е.

$$r^1 = r^1(b) = R^1_0(b), \quad r^2 = r^2(a) = R^2_0(a). \tag{3.11}$$

С учетом (3.10), (3.11) формула (3.9) принимает вид

$$t(a, b) = t\big(r^1(b), r^2(a)\big) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b T\big(R^1_0(\tau), R^2_0(\tau) \,\big|\, r^1, r^2\big) J(\tau)\, d\tau, \tag{3.12}$$

$$J(\tau) = t_{R_2}\big(R^2_0(\tau), R^1_0(\tau)\big) \frac{dR^2_0(\tau)}{d\tau} - t_{R_1}\big(R^2_0(\tau), R^1_0(\tau)\big) \frac{dR^1_0(\tau)}{d\tau}. \tag{3.13}$$

Используя (3.1), (3.2) для вычисления t_{R^1}, t_{R^2}, после несложных преобразований получим

$$J(\tau) = \frac{2t_{R^1}t_{R^2}}{\Delta} = \frac{2}{\lambda^1\big(R^1_0(\tau), R^2_0(\tau)\big) - \lambda^2\big(R^1_0(\tau), R^2_0(\tau)\big)}. \tag{3.14}$$

Окончательно, формула (3.9) (или (3.12)) запишется в форме

$$t(a, b) = \int\limits_a^b \frac{T\big(R^1_0(\tau), R^2_0(\tau) \,\big|\, r^1(b), r^2(a)\big)}{\lambda^1\big(R^1_0(\tau), R^2_0(\tau)\big) - \lambda^2\big(R^1_0(\tau), R^2_0(\tau)\big)}\, d\tau. \tag{3.15}$$

Напомним, что следует рассматривать именно функцию $t(a, b)$, а не $t(r^1, r^2)$ (см. замечание 1).

Для построения явного решения задачи Коши (1.1), (1.2) используем тот же самый прием, что и в п. 2.4 (см. (2.20)–(2.23)).

4. Обобщенный метод годографа

Обобщенный метод годографа (см., например, [4]) позволяет записать решение уравнения (1.1) (но не задачи Коши) в алгебраической форме

$$x-\lambda^1\big(R^1,R^2\big)t=w^1\big(R^1,R^2\big),\quad x-\lambda^2\big(R^1,R^2\big)t=w^2\big(R^1,R^2\big), \tag{4.1}$$

где $w^1(R^1,R^2)$, $w^2(R^1,R^2)$ — коммутирующие потоки.

Для определения коммутирующих потоков имеем систему уравнений (см., например, [4]), которую удобно записать в виде

$$w^1_{R^2}-\big(w^1-w^2\big)\,\frac{\lambda^1_{R^2}}{\lambda^1-\lambda^2}=0,\quad w^2_{R^1}-\big(w^1-w^2\big)\,\frac{\lambda^2_{R^1}}{\lambda^1-\lambda^2}=0. \tag{4.2}$$

Дифференцируя первое уравнение (4.2) по R^1, второе уравнение (4.2) по R^2 и вычитая, для разности коммутирующих потоков получим уравнение

$$\overline{\overline{L}}_{(R^1,R^2)}w\big(R^1,R^2\big)\equiv w_{R^1R^2}+a^w w_{R^1}+b^w w_{R^2}+c^w w=0, \tag{4.3}$$

где

$$w=w^1-w^2, \tag{4.4}$$

Коэффициенты $a^w(R^1,R^2)$, $b^w(R^1,R^2)$, $c^w(R^1,R^2)$ имеют вид

$$a^w=-\frac{\lambda^1_{R^2}}{\lambda^1-\lambda^2},\quad b^w=\frac{\lambda^2_{R^1}}{\lambda^1-\lambda^2},\quad c^w=b^w_{R^2}+a^w_{R^1}. \tag{4.5}$$

Дальнейшая процедура построения решения аналогична описанной в § 3. Конструируется функция Римана — Грина $W(R^1,R^2\,|\,r^1,r^2)$ уравнения (4.3) как решение задачи

$$\overline{\overline{L}}^{\,*}_{(R^1,R^2)}W\big(R^1,R^2\big)\equiv W_{R^1R^2}-(a^wW)_{R^1}-(b^wW)_{R^2}+c^wW=0, \tag{4.6}$$

$$\big(W_{R^1}-b^wW\big)\big|_{R^2=r^2}=0,\quad \big(W_{R^2}-a^wW\big)\big|_{R^1=r^1}=0,$$

$$W\big(r^1,r^2\,|\,r^1,r^2\big)=1.$$

Решение уравнения (4.3) с начальным условием $w(R^1_0(x),R^2_0(x))=0$, которое следует из (4.1), (4.4) при $t=0$, записывается в форме

$$w(r^1,r^2)=\frac{1}{2}\int\limits_{AB}W\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)\big(w_{R^1}\,dR^1-w_{R^2}\,dR^2\big), \tag{4.7}$$

где контур AB, также как и в § 3,определен формулами (3.10), (3.11).

Вычитая первое и второе уравнения (4.1), дифференцируя разность по R^1 и R^2, полагая $t=0$, с учетом (3.13), (3.14) нетрудно показать, что на контуре AB

$$w_{R^1}\,dR^1-w_{R^2}\,dR^2=\big(\lambda^2-\lambda^1\big)J(\tau)\,d\tau=2d\tau. \tag{4.8}$$

Тогда с учетом (4.1), (4.7), (4.8), окончательно, имеем

$$t(a,b)=\frac{w(r^1,r^2)}{\lambda^2(r^1,r^2)-\lambda^1(r^1,r^2)}=\int\limits_a^b\frac{W\big(R^1_0(\tau),R^2_0(\tau)\,\big|\,r^1(b),r^2(a)\big)}{\lambda^2\big(r^1(b),r^2(a)\big)-\lambda^1\big(r^1(b),r^2(a)\big)}\,d\tau. \tag{4.9}$$

Для построения явного решения задачи Коши (1.1), (1.2) используем тот же самый прием, что и в п. 2.4 (см. (2.20)–(2.23)).

Функция $x(a,b)$**.** Как уже говорилось, для построения явного решения на изохронах функция $x(a,b)$ не требуется — координата x определяется решением задачи (2.20)–(2.22) (см. (2.8) и замечание 5). В случае необходимости, например, для исследования свойств неявного решения или получения каких-либо оценок, для определения функции $x(a,b)$ можно построить уравнения, аналогичные (2.3), (2.4) или (3.3) (подробнее см. в [2], [3, с. 24–36]). Конечно, в некоторых случаях удается проинтегрировать систему (2.20)–(2.22) в квадратурах. Наиболее простой, с точки зрения авторов, способ определения $x(a,b)$, отличный от [2, 3], — это обобщенный метод годографа.

Аналогично получению уравнения (4.3), дифференцирование уравнений (4.2) с последующим суммированием дает неоднородное уравнение

$$\Psi_{R^1R^2} + (a^w w)_{R^1} - (b^w w)_{R^2} = 0, \quad \Psi = w^1 + w^2,$$

решение которого с учетом соответствующего начального условия можно получить либо непосредственным интегрированием, либо при помощи функции Римана — Грина тождественно равной единице.

Соотношения для $t(a,b)$ (и $x(a,b)$) получаем при помощи (4.1):

$$t = \frac{w}{\lambda^2 - \lambda^1}, \quad 2x - \left(\lambda^1 + \lambda^2\right) t = \Psi.$$

5. Эквивалентность методов

Покажем, что, как и следовало ожидать, несмотря на разницу подходов, все три окончательные формулы (2.19), (3.15), (4.9) для функции $t(a,b)$ совпадают.

Для инвариантов Лапласа (см., например, [5, с. 116–125]) уравнения вида

$$u_{R^1R^2} + a u_{R^1} + b u_{R^2} + cu = 0 \tag{5.1}$$

используем следующие обозначения:

$$h(a,b,c) = a_{R^1} + ab - c, \quad k(a,b,c) = b_{R^2} + ab - c.$$

Инварианты Лапласа уравнений (2.12), (3.4), (4.3) вычисляются при помощи коэффициентов (2.13), (3.5), (4.5)

$$h^\varphi = h(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi), \quad h^t = h(a^t, b^t, c^t), \quad h^w = h(a^w, b^w, c^w),$$

$$k^\varphi = k(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi), \quad k^t = k(a^t, b^t, c^t), \quad k^w = k(a^w, b^w, c^w).$$

Сопряженные уравнения (2.14), (3.6), (4.6) имеют следующие инварианты Лапласа:

$$h_*^\varphi = k(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi), \quad h_*^t = k(a^t, b^t, c^t), \quad h_*^w = k(a^w, b^w, c^w),$$

$$k_*^\varphi = h(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi), \quad k_*^t = h(a^t, b^t, c^t), \quad k_*^w = h(a^w, b^w, c^w).$$

Известно, что два уравнения вида (5.1) с коэффициентами a, b, c и $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, соответственно, для функций Z и $\overline{Z}$ *эквивалентны по функции* (см. [2, формулы (15)–(17)]

со ссылкой на [5, с. 117]) в смысле, что уравнения переходят друг в друга при преобразовании

$$Z\big(R^1, R^2\big) = \omega\big(R^1, R^2\big)\overline{Z}\big(R^1, R^2\big),$$

если их инварианты Лапласа совпадают ([5, с. 118, лемма 1]):

$$h = \overline{h}, \quad k = \overline{k}. \tag{5.2}$$

Для определения функции ω имеем систему (см. [5, с. 118, (2.3)])

$$\overline{a} = a + \frac{\omega_s}{\omega}, \quad \overline{b} = b + \frac{\omega_r}{\omega}, \quad \overline{c} = c + a\,\frac{\omega_r}{\omega} + b\,\frac{\omega_s}{\omega} + \frac{\omega_{rs}}{\omega}. \tag{5.3}$$

Соотношения (5.4), (5.2) справедливы и для функции Римана — Грина (т. е. решения сопряженного уравнения).

Теорема. *Уравнения* (2.12), (3.6), (4.6) *эквивалентны по функции и выполнены соотношения*

$$\varphi\big(R^1, R^2 \,\big|\, r^1, r^2\big) = W\big(R^1, R^2 \,\big|\, r^1, r^2\big) = \frac{2T\big(R^1, R^2 \,\big|\, r^1, r^2\big)}{\lambda^2\big(R^1, R^2\big) - \lambda^1\big(R^1, R^2\big)}. \tag{5.4}$$

$\lhd$ Действительно, непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$h^{\varphi} = h^t_* = h^w_*, \quad k^{\varphi} = k^t_* = k^w_*.$$

Вычисление функции ω при помощи решения уравнений (5.3) и учет условия нормировки (3.8) позволяет получить соотношения (5.4). Заметим, что первое равенство очевидно из сравнения уравнений (2.12), (4.6) и коэффициентов (2.13), (4.5) (см. также (2.18)). $\rhd$

Таким образом, все формулы (2.19), (3.15), (4.9) для функции $t(a, b)$ совпадают, и использование рассмотренных вариантов метода годографа приводит, как и следовало ожидать, к одному и тому же результату.

Заметим, что в работе [2], в которой впервые был предложен метод годографа на основе закона сохранения, также вычисляются инварианты Лапласа для уравнений метода на основе закона сохранения и стандартного метода годографа, но выводы об эквивалентности методов отсутствуют.

6. Слабо-нелинейные уравнения

Система (1.1) является слабо-нелинейной, если выполнены условия (см., например, [1, с. 87])

$$\lambda^1_{R^1} = 0, \quad \lambda^2_{R^2} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^1 = \lambda^1\big(R^2\big), \quad \lambda^2 = \lambda^2\big(R^1\big). \tag{6.1}$$

В случае, когда

$$\lambda^1_{R^2} \neq 0, \quad \lambda^2_{R^1} \neq 0, \tag{6.2}$$

система (6.1), с учетом того, что функция от инварианта Римана также является инвариантом, представима в форме

$$R^1_t + R^2 R^1_x = 0, \quad R^2_t + R^1 R^2_x = 0.$$

Именно в таком виде слабо-нелинейные уравнения используются для описания двухлучевой редукции солитонного газа [17], исследования уравнения Борна — Инфельда [2], для построения решения в [3, с. 71–81], для получения оценок роста решения в [1, с. 87] и для построения точного решения [18].

Полученные в настоящей статье результаты, особенно формула (5.4), позволяют указать неявное точное решение для слабо-нелинейных уравнений без ограничений (6.2), т. е. для общих уравнений

$$R^1_t + \lambda^1\big(R^2\big)R^1_x = 0, \quad R^2_t + \lambda^2\big(R^1\big)R^2_x = 0. \tag{6.3}$$

Заметим, что приводимый ниже результат подчеркивает эффективность использования формулы (5.4). Вычисляя коэффициенты (2.13), (3.5), с учетом (6.1) имеем

$$a^\varphi = \frac{\lambda^1_{R^2}}{\lambda^1 - \lambda^2}, \quad b^\varphi = -\frac{\lambda^2_{R^1}}{\lambda^1 - \lambda^2}, \quad c^\varphi = c^t = 0, \quad a^t = -\frac{\lambda^2_{R^2}}{\lambda^1 - \lambda^2} = 0, \quad b^t = \frac{\lambda^1_{R^1}}{\lambda^1 - \lambda^2} = 0.$$

Это означает, что задача (3.6)–(3.8) для определения функции Римана — Грина $T(R^1, R^2\,|\,r^1, r^2)$ имеет очевидное решение $T(R^1, R^2\,|\,r^1, r^2) = 1$, в то время как решение задачи (2.14)–(2.16) не столь очевидно, но использование (5.4) позволяет сразу записать

$$\varphi\big(R^1, R^2\,\big|\,r^1, r^2\big) = \frac{2}{\lambda^2(R^1) - \lambda^1(R^2)}.$$

Окончательно, функции $t(a,b)$, $x(a,b)$ определяются формулами

$$t(a,b) = \int\limits_a^b \frac{d\tau}{\lambda^2\big(R^1_0(\tau)\big) - \lambda^1\big(R^2_0(\tau)\big)}, \quad x(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{\lambda^2\big(R^1_0(\tau)\big) + \lambda^1\big(R^2_0(\tau)\big)}{\lambda^2\big(R^1_0(\tau)\big) - \lambda^1\big(R^2_0(\tau)\big)}\,d\tau.$$

Заметим, что ввиду независимости подынтегральных выражений от a, b, производные t_a, t_b вычисляются без труда (совпадают с подынтегральными функциями в различных точках) и задача (2.20)–(2.22) для определения явного решения на изохронах имеет простой вид (правые части не содержат интегралов). В случае, когда система (6.3) является гиперболической в узком смысле ($\lambda^1 \neq \lambda^2$, см., например, [1, с. 24]) не может быть неоднозначности решения (опрокидывания), сильные разрывы могут быть заданы лишь в начальный момент времени (не возникают в процессе эволюции) и движутся по характеристикам. Для слабо-нелинейных уравнений также невозможны автомодельные решения.

Заключение

С точки зрения авторов, метод годографа на основе закона сохранения более гибкий и допускает различные модификации, в частности, использование замены условий (2.7) на более удобные для конкретной задачи (замены констант ± 1 на некоторые функции, см. абзац после формулы (2.17)). Именно при помощи этого метода был решен ряд задач для уравнений электрофореза, мелкой воды, солитонного газа [3, 6–9], опрокинутой мелкой воды [10] (см. также [2], где приведено множество примеров использования метода). Метод годографа на основе закона сохранения без труда применим и в том случае, когда начальные данные для задачи Коши заданы не при $t = 0$, а на произвольной нехарактеристической кривой. Пример использования метода в случае задачи Гурса, т. е. при задании начальных данных на характеристиках, имеется в работе [6], в которой исследовано взаимодействие слабых разрывов решений. В этой же работе указан способ построения автомодельных и разрывных решений гиперболических уравнений для задачи зонального электрофореза. Алгоритм метода п. 2.4 позволяет строить решения многозначные по координате x (см. замечание 6).

Изложенные результаты справедливы для гиперболических уравнений. Однако, без каких-либо существенных изменений, основное из которых приводит к уравнению, отличному от (2.21), результаты справедливы и для уравнений эллиптического типа (см. [3, с. 94–116], [10, 19]). Отметим работу [20], в которой указана возможность сведения неоднородных систем двух квазилинейных уравнений к однородным (при наличии некоторых групповых симметрий), что существенно расширяет возможности использования метода годографа.

Следует сказать, что использование функции Римана — Грина для построения решения вовсе необязательно — достаточно указать решение задачи (2.3), (2.7). В частности, все приведенные в [2] примеры непосредственно не используют построение решения при помощи функции Римана — Грина. Укажем, что для определения функций φ, ψ в законе сохранения (2.1) в некоторых случаях удается использовать естественные законы сохранения исходных уравнений, например, для задачи электрофореза [3, с. 38, 39] и задачи о поведении солитонного газа [3, с. 72, 73].

Интересно отметить, что для достаточно большого количества задач — для уравнений зонального электрофореза [3], уравнений хроматографии [1, с. 661–665], [21, 22], уравнений мелкой воды [1, с. 659], уравнений политропного газа, некоторых уравнений двухслойной мелкой воды [23, модель III], [24, с. 36], бездисперсионного приближения нелинейного уравнения Шредингера, нелинейной оптики и Бозе — Эйнштейн конденсата [25], всех примеров эллиптических уравнений из монографии [26], инварианты Лапласа удовлетворяют равенству $h = k$ и определение функции Римана — Грина либо сводится к решению уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (классификационная теорема [5, с. 133]), либо к уравнению вида $U_{R^1R^2} - h(R^1, R^2)U = 0$, где $h(R^1, R^2)$ — инвариант Лапласа для исходного уравнения [15]. Хотя авторам неизвестны примеры реальных физических уравнения, для которых равенство $h = k$ не удовлетворяется, теоретическое обоснование равенства получить не удается — возможно лишь указать условия (в форме уравнений в частных производных) для функций λ^1, λ^2, выполнение которых гарантирует равенство инвариантов Лапласа.

Наконец, отметим, что при решении конкретных задач выбор того или иного метода желательно осуществлять на основе оценки сложности построения функции Римана — Грина на основе уравнений (2.14), (3.6), (4.6) (с учетом выражений для коэффициентов) и использования полученного соотношения (5.4).

Литература

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений.—М.: Наука, 1978.—668 с.
2. *Senashov S. I., Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA.—2012.—Vol. 8.—16 p. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071.
3. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015.—126 с.
4. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 54, № 5.—С. 1048–1068.
5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—339 с.
6. *Елаева М. С., Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Взаимодействие слабых разрывов и метод годографа для задачи о фракционировании двухкомпонентной смеси электрическим полем // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2016.—Т. 56, № 8.—С. 1455–1469. DOI: 10.7868/S0044466916080056.
7. *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu.* Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part I. The Shallow Water Equations.—2014.—19 p.—arXiv: 1410.2832.
8. *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu.* Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part II. The Zonal Electrophoresis Equations.—2014.—23 p.—arXiv: 1503.01762.

9. *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu.* Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part III. Two-Beam Reduction of the Dense Soliton Gas Equations.—2015.—22 p.—arXiv: 1512.06710.
10. *Долгих Т. Ф.* Задача об опрокинутой мелкой воде // Современные проблемы механики сплошной среды: сб. тр. XX Междунар. конф. Т. I.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2020.—С. 94–98.
11. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.—М.: Мир, 1964.—830 с.
12. *Copson E. T.* On the Riemann-Green function // Arch. Ration. Mech. Anal.—1958.—Vol. 1.—P. 324–348. DOI: 10.1007/BF00298013.
13. *Zeitsch P. J.* On the Riemann function // Mathematics.—2018.—Vol. 6.—P. 316. DOI: 10.3390/math6120316.
14. *Ибрагимов Н. Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли) // Успехи мат. наук.—1992.—Т. 47, № 4 (286).—С. 83–144.
15. *Daggit E. A.* The use of infinitesimal transformations in predicting the form of the Riemann (-Green) function // J. Math. Anal. Appl.—1970.—Vol. 29, № 1.—P. 91–108. DOI: 10.1016/0022-247X(70)90103-4.
16. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.—2-е изд., доп.—М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.—488 с.
17. *El G. A., Kamchatnov A. M.* Kinetic equation for a dense soliton gas // Phys. Rev. Lett.—2005.—Vol. 95, № 20.—P. 204101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.204101.
18. *Peng Y.-J.* Explicit solutions for 2×2 linearly degenerate systems // Appl. Math. Lett.—1998.—Vol. 11, № 5.—P. 75–78. DOI: 10.1016/S0893-9659(98)00083-4.
19. *Сенашов, С. И., Филюшина Е. В., Гомонова О. В.* Построение упруго-пластических границ с помощью законов сохранения // Вестн. СибГАУ.—Т. 16, № 2.—С. 343–359.
20. *Curro C., Oliveri F.* Reduction of nonhomogeneous quasilinear 2×2 systems to homogeneous and autonomous form // J. Math. Phys.—2008.—Vol. 49.—P. 103504. DOI: 10.1063/1.2992482.
21. *Кузнецов Н. Н.* Некоторые математические вопросы хроматографии // Вычислит. методы и программирование.—1967.—№ 6.—С. 242–258.
22. *Ферапонтов Е. В., Царев С. П.* Системы гидродинамического типа, возникающие в газовой хроматографии. Инварианты Римана и точные решения // Мат. моделирование.—1991.—Т. 3, № 2.—С. 82–91.
23. *Овсянников Л. В.* Модели двухслойной «мелкой воды» // Прикл. мех. и техн. физика.—1979.—Т. 20, № 2.—С. 3–14.
24. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1985.—319 с.
25. *Ivanov S. K., Kamchatnov A. M.* Collision of rarefaction waves in Bose–Einstein condensates // Phys. Rev. A.—2019.—Vol. 99.—P. 013609-1–013609-5. DOI:10.1103/PhysRevA.99.013609.
26. *Жданов Б. А., Трубников С. К.* Квазиустойчивые газовые среды.—М.: Наука, 1991.—176 с.

Статья поступила 27 января 2021 г.

Долгих Татьяна Фёдоровна
Институт механики, математики и компьютерных наук
им. И. И. Воровича ЮФУ, *ассистент*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `dolgikh@sfedu.ru`

Жуков Михаил Юрьевич
Институт механики, математики и компьютерных наук
им. И. И. Воровича ЮФУ, *профессор*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `myuzhukov@mail.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 2, P. 34–50

VARIANTS OF THE HODOGRAPH METHOD FOR SOLVING A SYSTEM OF TWO QUASILINEAR EQUATIONS

Dolgikh, T. F.[1] and Zhukov, M. Yu.[1,2]

[1] I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences SFedU,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: dolgikh@sfedu.ru, myuzhukov@mail.ru

Abstract. The solution of the Cauchy problem for a system of two quasilinear homogeneous first-order partial differential equations is constructed using the hodograph method, which allows us transform the solution of quasilinear first-order partial differential equations to the solution of some second-order linear partial differential equation with variable coefficients. It is shown that various variants of the hodograph method (standard method, method based on the conservation law, and generalized hodograph method) to construct a solution to the Cauchy problem in implicit form, ultimately lead to the same result and differ only in the amount of technical work. The proof is given by calculating the Laplace invariants of the second-order linear partial differential equation in the canonical form. In the case when the equations permit an explicit connection of the initial variables with Riemann invariants and the corresponding linear equation of the hodograph method allows us to specify the explicit form of the Riemann-Green function, a method for constructing an explicit solution on the level-lines of the implicit solution is described. The Cauchy problem for a system of two quasilinear first-order partial differential equations reduces to the Cauchy problem for a certain system of ordinary differential equations. An exact implicit solution for a system of the linear degenerate equations is given as an example. All the methods presented and the method of constructing an explicit solution can be used for hyperbolic and elliptic equations. In the case of hyperbolic equations, it is possible to construct self-similar and discontinuous solutions (after adding discontinuity conditions), as well as multi-valued solutions in the spatial coordinate (if such solutions are allowed by the problem statement). Despite the fact that at the final stage of the method, the Cauchy problem for ordinary differential equations has to be solved numerically, no approximations of partial differential equations typical for the finite difference method, the finite element method, the finite volume method, etc. are used. The method is accurate in the sense that the error of calculations is related only to the accuracy of integration of ordinary differential equations.

Key words: hodograph method, quasilinear first-order partial differential equation, Laplace invariants, linear degenerate equation.

Mathematical Subject Classification (2010): 35F55, 35L60, 35L40, 35L15.

For citation: *Dolgikh, T. F and Zhukov, M. Yu.* Variants of the Hodograph Method for Solving a System of Two Quasilinear Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 34–50 (in Russian). DOI: 10.46698/x8869-5899-2064-l.

References

1. *Rozhdestvenskiy, B. L. and Yanenko, N. N. Sistemy kvazilineynykh uravneniy* [Systems of Quasilinear Equations], Moscow, Nauka, 1978, 668 p. (in Russian).
2. *Senashov, S. I. and Yakhno, A.* Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2012, vol. 8, 16 p. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071.
3. *Zhukov, M. Yu., Shiryaeva, E. V. and Dolgikh, T. F. Metod godografa dlya resheniya giperbolicheskikh i ellipticheskikh kvazilineynykh uravneniy* [The Method of the Hodograph for the Solution of Hyperbolic and Elliptic Quasilinear Equations], Rostov-on-Don, SFedU Publ., 2015, 126 p. (in Russian).
4. *Tsarev, S. P.* The Geometry of Hamiltonian Systems of Hydrodynamic Type. The Generalized Hodograph Method, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1991, vol. 37, no. 2, pp. 397–419. DOI: 10.1070/IM1991v037n02ABEH002069.

5. *Ovsyannikov, L. V. Gruppovoy analiz differentsial'nykh uravneniy* [Group Analysis of Differential Equations], Moscow, Nauka, 1978, 339 p. (in Russian).
6. *Elaeva, M. S., Zhukov M., Yu. and Shiryaeva, E. V.* Interaction of Weak Discontinuities and the Hodograph Method as Applied to Electric Field Fractionation of a Two-Component Mixture, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 8, pp. 1440—1453. DOI: 10.1134/S0965542516080054.
7. *Shiryaeva, E. V. and Zhukov, M. Yu. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part I. The Shallow Water Equations*, 2014, arXiv: 1410.2832.
8. *Shiryaeva, E. V. and Zhukov, M. Yu. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part II. The Zonal Electrophoresis Equations*, 2014, arXiv: 1503.01762.
9. *Shiryaeva, E. V. and Zhukov, M. Yu. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part III. Two-Beam Reduction of the Dense Soliton Gas Equations*, 2015, arXiv: 1512.06710.
10. *Dolgikh, T. F.* The Problem of Overturned Shallow Water, *Sovremennye problemy mekhaniki sploshnoy sredy: Sbornik trudov XX Mezhdunarodnoy konferencii. T. I*, 2020, pp. 94–98 (in Russian).
11. *Kurant, R. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Moscow, Mir, 1964, 830 p. (in Russian).
12. *Copson, E. T.* On the Riemann–Green Function, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, vol. 1, pp. 324–348. DOI: 10.1007/BF00298013.
13. *Zeitsch, P. J.* On the Riemann Function, *Mathematics*, 2018, vol. 6, p. 316. DOI: 10.3390/math6120316.
14. *Ibragimov, N. Kh.* Group Analysis of Ordinary Differential Equations and the Invariance Principle in Mathematical Physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie), *Russian Mathematical Surveys*, 1992, vol. 47, no. 4, pp. 89–156. DOI: 10.1070/RM1992v047n04ABEH000916.
15. *Daggit, E. A.* The Use of Infinitesimal Transformations in Predicting the Form of the Riemann (-Green) Function, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1970, vol. 29, no. 1, pp. 91–108. DOI: 10.1016/0022-247X(70)90103-4.
16. *Bautin, N. N. and Leontovich, E. A. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskih sistem na ploskosti* [Methods and Techniques of the Qualitative Study of Dynamical Systems in Plane], 2nd ed., Moscow, Nauka, 1990, 488 p. (in Russian).
17. *El, G. A. and Kamchatnov, A. M.* Kinetic Equation for a Dense Soliton Gas, *Physical Review Letters*, 2005, vol. 95, no. 20, pp. 204101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.204101.
18. *Peng, Y.-J.* Explicit Solutions for 2×2 Linearly Degenerate Systems, *Applied Mathematics Letters*, 1998, vol. 11, no. 5, pp. 75–78. DOI: 10.1016/S0893-9659(98)00083-4.
19. *Senashov, S. I., Filyushina, E. V. and Gomonova, O. V.* Construction of Elasto-Plastic Boundaries Using Conservation Laws, *Vestnik Sibirskogo Gosudarstvennogo Aerokosmicheskogo Universiteta Imeni Akademika M. F. Reshetneva*, vol. 16, no. 2, pp. 343–359.
20. *Curro, C. and Oliveri, F.* Reduction of Nonhomogeneous Quasilinear 2×2 Systems to Homogeneous and Autonomous Form, *Journal of Mathematical Physics*, 2008, vol. 49, pp. 103504. DOI: 10.1063/1.2992482.
21. *Kuznetsov, N. N.* Some Mthematical Questions of Chromatography, *Vychislitelnye metody i programmirovanie* [Numerical Methods and Programming], 1967, no. 6, pp. 242–258 (in Russian).
22. *Ferapontov, E. V. and Tsarev, S. P.* Systems of Hydrodynamic Type that Arise in Gas Chromatography. Riemann Invariants and Exact Solutions, *Matematicheskoe modelirovanie*, 1991, vol. 3, no. 2, pp. 82–91 (in Russian).
23. *Ovsyannikov, L. V.* Models of Two-Layer "Shallow Water", *Prikladnaya Matematika i Tekhnicheskaya Fizika*, 1979, no. 2, pp. 3–14 (in Russian).
24. *Ovsyannikov, L. V., Makarenko, N. I., Nalimov, V. I. et al. Nelineynye problemy teorii poverhnostnykh i vnutrennikh voln* [Nonlinear Problems of the Theory of Surface and Internal Waves], Novosibirsk, Nauka, 1985, 319 p. (in Russian).
25. *Ivanov, S. K. and Kamchatnov, A. M.* Collision of Rarefaction Waves in Bose–Einstein Condensates, *Physical Review A*, 2019, vol. 99, pp. 013609-1–013609-5. DOI: 10.1103/PhysRevA.99.013609.
26. *Zhdanov, B. A. and Trubnikov, S. K. Kvaziustoychivye Gazovye Sredy*, Moscow, Nauka, 1991, 176 p. (in Russian).

Received January 27, 2021

Tatiana F. Dolgikh
I. I. Vorovich Institute of Mathematics,
Mechanics and Computer Sciences SFedU,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia,
Assistent
E-mail: dolgikh@sfedu.ru

Michael Yu. Zhukov
I. I. Vorovich Institute of Mathematics,
Mechanics and Computer Sciences SFedU,
8 a, Milchakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia,
Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Professor;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markusa St., Vladikavkaz, 362027, Russia,
Leading Researcher
E-mail: myuzhukov@mail.ru