Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 3, С. 5–15

УДК 519.633
DOI 10.46698/p3608-5250-8760-g

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА[#]

А. А. Алиханов[1], А. М. Апеков[1], А. Х. Хибиев[2]

[1] Северо-Кавказский центр математических исследований СКФУ,
Россия, 355017, Ставрополь, Пушкина, 1;
[2] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, Шортанова, 89 а

E-mail: aaalikhanov@gmail.com, aslkbsu@yandex.ru, akkhibiev@gmail.com

Посвящается профессору
Стефану Григорьевичу Самко
к его восьмидесятилетию

Аннотация. В данной работе рассматривается первая краевая задача для уравнения Аллера дробного по времени порядка с обобщенными функциями памяти. Для численного решения поставленной задачи построены две разностные схемы повышенного порядка аппроксимации. В случае переменных коэффициентов предложена разностная схема второго порядка аппроксимации, как по времени, так и по пространству. А для обобщенного уравнения Аллера с постоянными коэффициентами предложена компактная разностная схема четвертого порядка аппроксимации по пространственной переменной и второго порядка по времени. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решений предложенных разностных схем. Доказана их безусловная устойчивость и сходимость. Показано, что скорость сходимости совпадает с порядком погрешности аппроксимации в случае достаточно гладкого решения исходной задачи. На базе предложенных алгоритмов проведены численные расчеты тестовых задач, подтверждающие полученные теоретические результаты. Все вычисления выполнялись с помощью языка программирования Julia v1.5.1.

Ключевые слова: дробная производная, обобщенная функция памяти, априорные оценки, уравнение диффузии дробного порядка, разностные схемы, устойчивость, сходимость.

Mathematical Subject Classification (2010): 65M06, 65N06, 65N12.

Образец цитирования: *Алиханов А. А., Апеков А. М., Хибиев А. Х.* Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для обобщенного уравнения Аллера дробного порядка // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 3.—С. 5–15. DOI: 10.46698/p3608-5250-8760-g.

1. Введение

Дифференциальные уравнения дробного порядка служат хорошим математическим аппаратом для более точного описания процессов в физике, химии и т. д., для которых необходимо учитывать предысторию (память) процесса [1–5]. Характеристиками, позволяющими учитывать память процесса в таких уравнениях, являются функции памяти, которые представляют собой ядра интегралов, определяющих операторы дробного интегро-дифференцирования. Для операторов дробного интегро-дифференцирования такой функцией памяти служит степенная функция. Показатель степенной функции памяти определяет порядок производной и связан с фрактальной размерностью сре-

[#]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта 19-31-90094.

ды, в которой протекает исследуемый процесс. Для более точного описания процесса в неоднородных пористых средах используются дифференциальные уравнения с дробными производными переменного и/или распределенного порядков [6, 7]. Для описания более сложных процессов могут привлекаться функции памяти более сложной структуры, чем степенная функция.

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Аллера дробного порядка с обобщенными функциями памяти:

$$\partial_{0t}^{\alpha,\lambda(t)} u = \mathscr{L}_1 u + \partial_{0t}^{\alpha,\mu(t)} \mathscr{L}_2 u + f(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

где

$$\mathscr{L}_r u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_r(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q_r(x)u, \quad r = 1,2,$$

$$\partial_{0t}^{\alpha,\delta(t)} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\lambda(t-\eta)}{(t-\eta)^\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,\eta)\,d\eta$$

— обобщенная дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, с весовой функцией $\delta(t) \in \mathscr{C}^2[0,T]$, причем $\delta(t) > 0$, $\delta'(t) \leqslant 0$ для всех $t \in [0,T]$; $0 < c_1 \leqslant k_r(x) \leqslant c_2$, $q_r(x) \geqslant 0$ для всех $(x,t) \in \bar{Q}_T$, $r = 1,2$.

Обобщенные уравнение диффузии и уравнение Фоккера — Планка — Смолуховского с различными функциями памяти были рассмотрены в работе [8]. Полученные в этой работе результаты показывают, что выбор функций памяти в обобщенном уравнении диффузии непосредственно влияет на поведение момента второго порядка, что соответствует скорости распространения концентрации вещества, и могут описать широкий спектр экспериментальных явлений. Например, когда функция памяти представляет собой экспоненциальную функцию ($\delta(t) = e^{-bt}$, $b > 0$), дисперсия в окрестности начального момента времени имеет вид $2t^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$, а при достаточно больших значениях временной переменной имеет вид $2b^{1-\alpha}t$. Таким образом, экспоненциальная функция памяти позволяет моделировать диффузионные процессы, в которых аномальная (медленная) диффузия переходит с течением времени в нормальную (классическую) диффузию.

В работах [6, 7, 9–12] методом энергетических неравенств как для дифференциальных, так и для разностных задач получены априорные оценки решений уравнения диффузии дробного, переменного и распределенного порядков. В работе [13] для нагруженного уравнения Аллера дробного порядка построены компактные разностные схемы и доказаны их устойчивость и сходимость, проведены численные расчеты для тестовых задач.

Для обобщенной дробной производной Капуто с весовой функцией в работе [14] построен дискретный аналог ($L1$-формула) с порядком аппроксимации $2-\alpha$. В работе [15] построен разностный аналог для дробной производной Капуто дискретно-распределенного порядка с произвольными функциями памяти с порядком $2-\max\alpha_r$. На базе предложенных дискретных аналогов построены разностные схемы и доказаны их устойчивость и сходимость.

В работе [16] построен разностный аналог второго порядка аппроксимации для обобщенной дробной производной с весовой функцией. На основе предложенного разностного аналога построены разностные схемы второго порядка аппроксимации по временной переменной для уравнения диффузии дробного по времени порядка с обобщенной функцией памяти, а также доказаны их устойчивость и сходимость.

В данной работе, на базе разностного аналога повышенного порядка аппроксимации, предложенного в работе [16], построены разностные схемы со вторым порядком аппроксимации как по временной, так и по пространственной переменным при всех значениях $\alpha \in (0,1)$. Доказаны устойчивость и сходимость предложенных разностных схем. А также проведены численные расчеты тестовых задач.

2. Разностные схемы второго порядка аппроксимации. Устойчивость и сходимость

Рассмотрим равномерную сетку $\bar\omega_{h\tau} = \bar\omega_h \times \bar\omega_\tau$, где $\bar\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, N, hN = 1\}$, $\bar\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots, M, \tau M = T\}$. Дискретный аналог обобщенной дробной производной Капуто $\partial_{0t}^{\alpha,\lambda} v(t)$ в промежуточных точках $t_{j+\sigma}$, $\sigma = 1-\alpha/2$, $j \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$, где $v(t) \in \mathscr{C}^3[0,T]$, имеет вид (см. [16]):

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\delta(t)} v = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\delta)} v_{t,s},$$

где

$$a_0^{(\alpha)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha},$$

$$b_l^{(\alpha)} = \frac{1}{2-\alpha}\left[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\right] - \frac{1}{2}\left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\right], \quad l \geqslant 1,$$

$$c_0^{(\alpha,\delta)} = \delta_{\sigma-1/2} a_0^{(\alpha)} \quad \text{при} \quad j = 0; \quad \text{а при} \quad j \geqslant 1$$

$$c_s^{(\alpha,\delta)} = \begin{cases} \delta_{\sigma-1/2} a_0^{(\alpha)} + \delta_\sigma b_1^{(\alpha)}, & s = 0, \\ \delta_{s+\sigma-1/2} a_s^{(\alpha)} + \delta_{s+\sigma} b_{s+1}^{(\alpha)} - \delta_{s+\sigma} b_s^{(\alpha)}, & 1 \leqslant s \leqslant j-1, \\ \delta_{j+\sigma-1/2} a_j^{(\alpha)} - \delta_{j+\sigma} b_j^{(\alpha)}, & s = j, \end{cases} \tag{3}$$

$$\delta_s = \delta(t_s), \quad v_{t,s} = \frac{v(t_{s+1}) - v(t_s)}{\tau},$$

Лемма 1 [16]**.** *Для любых* $\alpha \in (0,1)$ *и* $v(t) \in \mathscr{C}^3[0, t_{j+1}]$ *имеет место следующее равенство:*

$$\partial_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\delta(t)} v = \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\delta(t)} v + \mathscr{O}(\tau^2), \tag{4}$$

где $\delta(t) > 0$, $\delta'(t) \leqslant 0$ *и* $\delta(t) \in \mathscr{C}^2[0, t_{j+1}]$.

Лемма 2 [16]**.** *Для любых* $\alpha \in (0,1)$ *и* $c_s^{(\alpha)} (0 \leqslant s \leqslant j,\ j \geqslant 1)$, *определенных по формуле* (3), *имеют место следующие неравенства:*

$$c_j^{(\alpha,\delta)} > \frac{1-\alpha}{2} \frac{\delta_{j+\sigma}}{(j+\sigma)^\alpha}, \quad (2\sigma - 1) c_0^{(\alpha,\delta)} - \sigma c_1^{(\alpha,\delta)} > 0,$$

$$c_0^{(\alpha,\delta)} > c_1^{(\alpha,\delta)} > c_2^{(\alpha,\delta)} > \ldots > c_{j-1}^{(\alpha,\delta)} > c_j^{(\alpha,\delta)},$$

где $\sigma = 1 - \alpha/2$.

Лемма 3 [10, 16]**.** *Для любой функции* $v(t)$, *заданной на сетке* $\bar\omega_\tau$, *справедливо неравенство*

$$\left(\sigma v^{j+1} + (1-\sigma) v^j\right) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\delta(t)} v \geqslant \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\delta(t)} v^2. \tag{5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что решение $u(x,t)$ задачи (1)–(2) принадлежит классу $\mathscr{C}_{x,t}^{4,3}$, а коэффициенты уравнения (1) и функции $f(x,t)$ и $u_0(x)$ удовлетворяют условиям, необходимым для построения разностных схем второго порядка аппроксимации.

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (1)–(2) следующую разностную схему:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} y_i = \Lambda_1 y_i^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \Lambda_2 y_i + \varphi_i^{j+\sigma}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 0, 1, \ldots, M-1, \tag{6}$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{7}$$

где

$$\Lambda_r y_i = \left(\left(a^{(r)} y_{\bar{x}}\right)_x - d^{(r)} y\right)_i = \frac{a_{i+1}^{(r)} y_{i+1} - (a_{i+1}^{(r)} + a_i^{(r)}) y_i + a_i^{(r)} y_{i-1}}{h^2} - d_i^{(r)} y_i,$$

$i = 1, \ldots, N-1$, $r = 1, 2$, $y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j$, $y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$, $y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, $a_i^{(r)} = k_r(x_{i-1/2})$, $d_i^{(r)} = q_r(x_i)$, $\varphi_i^{j+\sigma} = f(x_i, t_{j+\sigma})$.

Разностная схема (6)–(7) аппроксимирует дифференциальную задачу (1)–(2) с порядком $\mathscr{O}(h^2 + \tau^2)$.

Теорема 1. *Разностная схема (6)–(7) безусловно устойчива, а для ее решения справедлива следующая априорная оценка:*

$$\begin{gathered} \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(c_{j-s}^{(\alpha,\lambda)} \|y^{s+1}\|_0^2 + c_{j-s}^{(\alpha,\mu)} \|y_{\bar{x}}^{s+1}]|_0^2 \right) + \sum_{s=0}^{j} \|\sigma y_{\bar{x}}^{s+1} + (1-\sigma) y_{\bar{x}}^{s}]|_0^2 \tau \\ \leqslant M_1 \left(\|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0]|_0^2 + \sum_{s=0}^{j} \|\varphi^{s+\sigma}\|_0^2 \tau \right), \end{gathered} \tag{8}$$

где $M_1 > 0$ *— известная постоянная, не зависящая от шагов сетки* h *и* τ*.*

$\lhd$ Умножив уравнение (6) скалярно на $y^{(\sigma)}$, получим

$$\left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} y\right) - \left(y^{(\sigma)}, \Lambda_1 y^{(\sigma)}\right) - \left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \Lambda_2 y\right) = \left(y^{(\sigma)}, \varphi^{j+\sigma}\right), \tag{9}$$

где

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h, \quad \|y\|_0^2 = (y, y), \quad \|y]|_0^2 = (y, y].$$

Преобразуем слагаемые равенства (9):

$$\left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} y\right) \geqslant \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} \|y\|_0^2,$$

$$-\left(y^{(\sigma)}, \Lambda_1 y^{(\sigma)}\right) = \left(a_1, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\right] + \left(d_1, (y^{(\sigma)})^2\right) \geqslant c_1 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2,$$

$$-\left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \Lambda_2 y\right) \geqslant \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \left(a_2, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\right] + \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \left(d_2, (y^{(\sigma)})^2\right),$$

$$\left(y^{(\sigma)}, \varphi^{j+\sigma}\right) \leqslant c_1 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4c_1} \|\varphi^{j+\sigma}\|_0^2 \leqslant \frac{c_1}{2} \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4c_1} \|\varphi^{j+\sigma}\|_0^2.$$

Из равенства (9), с учетом приведенных выше преобразований, приходим к неравенству

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \left(\left(a_2, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\right] + \left(d_2, (y^{(\sigma)})^2\right) \right) + c_1 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leqslant \frac{1}{2c_1} \|\varphi^{j+\sigma}\|_0^2. \tag{10}$$

Поменяем в неравенстве (10) индекс j на s, затем умножим его на τ и просуммируем по s от 0 до j. В результате получим априорную оценку (8). $\rhd$

2.1. Численные результаты. Численные расчеты проведены для тестовой задачи, когда функция

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\left(1 + \frac{6 - (6 + 6bt + 3b^2t^2 + b^3t^3)e^{-bt}}{b^4}\right)$$

является точным решением задачи (1)–(2) с $\lambda(t) = \mu(t) = e^{-bt}$, $b \geqslant 0$, и коэффициентами $k_1(x) = k_2(x) = 2 - \cos(x)$, $q_1(x) = 1 - \sin(x)$, $q_2(x) = 0$, $T = 1$.

Таблица 1

Норма погрешности и порядок сходимости в сеточной L_2-норме
и максимальная погрешность для случая $\tau = 3h$

b	α	h	$\max\limits_{0\leqslant n\leqslant M} \|z^n\|_0$	ПС in $\|\cdot\|_0$	$\|z\|_{C(\bar\omega_{h\tau})}$	ПС in $\|\cdot\|_{C(\bar\omega_{h\tau})}$
1.0	0.9	1/10	$1.686758e-4$		$2.400286e-4$	
		1/20	$3.879799e-5$	2.1201	$5.524562e-5$	2.1192
		1/40	$8.830971e-6$	2.1353	$1.258693e-5$	2.1339
		1/80	$1.991746e-6$	2.1485	$2.842093e-6$	2.1469
		1/160	$4.454965e-7$	2.1605	$6.365923e-7$	2.1585
		1/320	$9.724255e-8$	2.1957	$1.392294e-7$	2.1929
2.0	0.5	1/10	$2.379210e-4$		$3.355047e-4$	
		1/20	$6.388791e-5$	1.8968	$9.009528e-5$	1.8968
		1/40	$1.676101e-5$	1.9304	$2.363703e-5$	1.9304
		1/80	$4.334482e-6$	1.9511	$6.112896e-6$	1.9511
		1/160	$1.110008e-6$	1.9652	$1.565463e-6$	1.9652
		1/320	$2.824466e-7$	1.9745	$3.983459e-7$	1.9744
3.0	0.1	1/10	$2.097866e-4$		$2.958210e-4$	
		1/20	$5.621718e-5$	1.8998	$7.927590e-5$	1.8997
		1/40	$1.456899e-5$	1.9481	$2.054674e-5$	1.9479
		1/80	$3.731217e-6$	1.9651	$5.262258e-6$	1.9651
		1/160	$9.511609e-7$	1.9718	$1.341467e-6$	1.9718
		1/320	$2.419551e-7$	1.9749	$3.412420e-7$	1.9749

Таблица 2

Норма погрешности и порядок сходимости в сеточной L_2-норме
и максимальная погрешность для случая $h = 1/10000$

b	α	h	$\max\limits_{0\leqslant n\leqslant M} \|z^n\|_0$	ПС in $\|\cdot\|_0$	$\|z\|_{C(\bar\omega_{h\tau})}$	ПС in $\|\cdot\|_{C(\bar\omega_{h\tau})}$
1.0	0.9	1/10	$3.199863e-4$		$45244451e-4$	
		1/20	$7.671360e-5$	2.0604	$1.084675e-4$	2.0604
		1/40	$1.833206e-5$	2.0651	$2.591992e-5$	2.0651
		1/80	$4.400001e-6$	2.0587	$6.222589e-6$	2.0584
0.5	0.5	1/10	$4.067277e-5$		$5.750501e-4$	
		1/20	$9.683129e-5$	2.0705	$1.369005e-4$	2.0705
		1/40	$2.306729e-5$	2.0696	$3.261182e-5$	2.0696
		1/80	$5.523500e-6$	2.0621	$7.808799e-6$	2.0622
0.3	0.1	1/10	$1.043818e-4$		$1.475543e-4$	
		1/20	$2.546621e-5$	2.0352	$3.599792e-5$	2.0352
		1/40	$6.236303e-6$	2.0298	$8.815180e-6$	2.0298
		1/80	$1.532578e-6$	2.0247	$2.166326e-6$	2.0247

В таблице 1 приводятся погрешность $z = y - u$ и порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{\mathscr{C}(\bar\omega_{h\tau})}$, где $\|y\|_{\mathscr{C}(\bar\omega_{h\tau})} = \max_{(x_i,t_j)\in\bar\omega_{h\tau}} |y|$.

Результаты расчетов, приведенные в таблице 1, показывают, что при уменьшении шагов сетки по правилу $\tau = 3h$, погрешность разностной схемы z уменьшается пропорционально квадрату шага сетки по времени, и соответственно скорость сходимости, при таких h и τ равна $\mathscr{O}(h^2) = \mathscr{O}(\tau^2)$. Порядок сходимости вычислялся по формуле ПС$=\log_{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$ (z_i — погрешность, соответствующая шагу τ_i).

Результаты, приведенные в таблице 2, показывают, что если взять достаточно малое $h = 1/10000$ и при этом уменьшать шаг сетки по времени, то погрешность будет уменьшатся со скоростью $\mathscr{O}(\tau^2)$.

Таким образом, численные результаты полученные в таблицах 1 и 2 подтверждают второй порядок аппроксимации разностной схемы (6)–(7).

3. Компактная разностная схема для обобщенного уравнения Аллера с постоянными коэффициентами

В этом параграфе для задачи (1)–(2) с достаточно гладким решением строится компактная разностная схема с порядком аппроксимации $\mathscr{O}(h^4 + \tau^2)$ в случае постоянных коэффициентов, т. е. $k_r(x) = k_r$ и $q_r(x) = q_r$.

Дифференциальной задаче (1)–(2) в случае постоянных коэффициентов $k_r(x) = k_r > 0$ и $q_r(x) = q_r \geqslant 0$ поставим в соответствие компактную разностную схему:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} \mathscr{H}_h y_i = k_1 y_{\bar{x}x,i}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \left(k_2 y_{\bar{x}x,i} - q_2 \mathscr{H}_h y\right) - q_1 \mathscr{H}_h y_i^{(\sigma)} + \mathscr{H}_h \varphi_i^{j+\sigma}, \tag{11}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad j = 0, 1, \ldots, M-1,$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{12}$$

где $\mathscr{H}_h v_i = v_i + h^2 v_{\bar{x}x,i}/12$, $i = 1, \ldots, N-1$, $\varphi_i^{j+\sigma} = f(x_i, t_{j+\sigma})$, $y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j$.

Из леммы 1 следует, что если решение $u \in \mathscr{C}_{x,t}^{6,3}$, то разностная схема имеет порядок аппроксимации $\mathscr{O}(\tau^2 + h^4)$.

Теорема 2. *Разностная схема (11)–(12) является безусловно устойчивой, и для ее решения справедлива априорная оценка* (8).

$\lhd$ Умножив уравнение (11) скалярно на $y^{(\sigma)}$, получим

$$\begin{gathered}\left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} \mathscr{H}_h y\right) - k_1 \left(y^{(\sigma)}, y_{\bar{x}x}^{(\sigma)}\right) - k_2 \left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} y_{\bar{x}x}\right) \\ + q_2 \left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \mathscr{H}_h y\right) + q_1 \left(y^{(\sigma)}, \mathscr{H}_h y^{(\sigma)}\right) = \left(y^{(\sigma)}, \mathscr{H}_h \varphi^{j+\sigma}\right).\end{gathered} \tag{13}$$

Преобразуем слагаемые равенства (13), как это показано ниже:

$$\left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} \mathscr{H}_h y\right) \geqslant \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} \|y\|_{\mathscr{H}_h}^2,$$

$$-\left(y^{(\sigma)}, y_{\bar{x}x}^{(\sigma)}\right) = \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2,$$

$$-\left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} y_{\bar{x}x}\right) = \left(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} y_{\bar{x}}\right] \geqslant \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \|y_{\bar{x}}]|_0^2,$$

$$\begin{gathered}\left\|y^{(\sigma)}\right\|_{\mathscr{H}_h}^2 = \left(y^{(\sigma)}, \mathscr{H}_h y^{(\sigma)}\right) = \left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2 + \frac{h^2}{12} \left(y^{(\sigma)}, y_{\bar{x}x}^{(\sigma)}\right) \\ = \left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2 - \frac{h^2}{12} \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \geqslant \left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2 - \frac{1}{3} \|y^{(\sigma)}]|_0^2 = \frac{2}{3} \left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2,\end{gathered}$$

$$\left(y^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \mathscr{H}_h y\right) \geqslant \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \|y\|_{\mathscr{H}_h}^2,$$

$$\left(y^{(\sigma)}, \mathscr{H}_h\varphi^{j+\sigma}\right) \leqslant \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4}\|\mathscr{H}_h\varphi^{j+\sigma}\|_0^2 \leqslant \frac{1}{2}\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4}\|\mathscr{H}_h\varphi^{j+\sigma}\|_0^2.$$

Из (13) с учетом приведенных выше преобразований приходим к неравенству

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha,\lambda(t)}\|y\|_{\mathscr{H}_h}^2 + k_2\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + q_2\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)}\|y\|_{\mathscr{H}_h}^2 + k_1\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\mathscr{H}_h\varphi^{j+\sigma}\|_0^2. \qquad (14)$$

Поменяем в неравенстве (14) индекс j на s, затем умножим его на τ и просуммируем по s от 0 до j. В результате получим априорную оценку (8). $\triangleright$

3.1. Численные результаты. Рассмотрим следующую тестовую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha,\lambda(t)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \partial_{0t}^{\alpha,\mu(t)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + f(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant 1, \qquad (15)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (16)$$

где $\lambda(t) = \mu(t) = e^{-bt}$, $b \geqslant 0$,

$$f(x,t) = (\pi^2+1)\left(g(t) + \frac{2t^{3-\alpha}e^{-bt}}{\Gamma(4-\alpha)}\right)\sin(\pi x),$$

с известным точным решением $u(x,t) = g(t)\sin(\pi x)$, где функция $g(t)$ определяется по следующей формуле:

$$g(t) = 1 + \frac{2-(2+2bt+b^2t^2)e^{-bt}}{b^3}.$$

В таблице 3 приведены погрешность в сеточной L_2-норме, а также максимальная погрешность во всех узловых точках сетки для различных значений $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ при достаточно малом $h = 1/500$. Расчеты показывают, что разностная схема (11)–(12) с уменьшением шага сетки по времени дает второй порядок сходимости.

Таблица 3

Норма погрешности и порядок сходимости в сеточной L_2-норме
и максимальная погрешность для случая $h = 1/500$

b	α	τ	$\max\limits_{0\leqslant n\leqslant M}\|z^n\|_0$	ПС in $\|\cdot\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	ПС in $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
2.0	0.9	1/10	$8.429097e-5$		$1.192054e-4$	
		1/20	$1.973251e-5$	2.0948	$2.790599e-5$	2.0948
		1/40	$4.603254e-6$	2.0998	$6.509984e-6$	2.0998
		1/80	$1.069034e-6$	2.1063	$1.511844e-6$	2.1063
		1/160	$2.474973e-7$	2.1108	$3.500155e-7$	2.1108
		1/320	$5.774520e-8$	2.0996	$8.166591e-8$	2.0996
1.5	0.5	1/10	$8.066530e-5$		$1.140779e-4$	
		1/20	$1.700579e-5$	2.2459	$2.404981e-5$	2.2459
		1/40	$3.649556e-6$	2.2202	$5.161252e-6$	2.2202
		1/80	$7.974240e-7$	2.1943	$1.127728e-6$	2.1943
		1/160	$1.782916e-7$	2.1611	$2.521424e-7$	2.1611
		1/320	$4.084016e-8$	2.1261	$2.521424e-7$	2.1261
1.0	0.1	1/10	$3.577966e-5$		$5.060008e-5$	
		1/20	$7.702414e-6$	2.2157	$1.089285e-5$	2.2157
		1/40	$3.137835e-6$	1.2955	$4.437569e-6$	1.2955
		1/80	$9.441722e-7$	1.7326	$1.335261e-6$	1.7326
		1/160	$2.566255e-7$	1.8793	$3.629234e-7$	1.8793
		1/320	$6.677725e-8$	1.9422	$9.443737e-8$	1.9422

В таблице 4 также приведены погрешность в сеточной L_2-норме, а также максимальная погрешность во всех узловых точках сетки при достаточно малом $\tau = 1/4000$. Из таблицы видно, что компактная разностная схема (11)–(12) имеет четвертый порядок аппроксимации по пространственной переменной.

Таблица 4

Норма погрешности и порядок сходимости в сеточной L_2-норме
и максимальная погрешность для случая $\tau = 1/4000$

b	α	h	$\max\limits_{0\leqslant n\leqslant M}\|z^n\|_0$	ПС in $\|\cdot\|_0$	$\|z\|_{C(\bar\omega_{h\tau})}$	ПС in $\|\cdot\|_{C(\bar\omega_{h\tau})}$
1.0	0.9	1/4	$8.414272e-4$		$1.189957e-3$	
		1/8	$5.161477e-5$	4.0269	$7.299431e-5$	4.0269
		1/16	$3.197345e-6$	4.0128	$4.521728e-6$	4.0128
		1/32	$1.858119e-7$	4.1049	$2.627778e-7$	4.1049
2.0	0.5	1/4	$8.559808e-4$		$1.603353e-3$	
		1/8	$5.252828e-5$	4.0264	$7.428621e-5$	4.0264
		1/16	$3.274688e-6$	4.0036	$4.631108e-6$	4.0036
		1/32	$2.058304e-7$	3.9918	$2.910882e-7$	3.9918
3.0	0.1	1/4	$7.003644e-4$		$9.904648e-4$	
		1/8	$4.297780e-5$	4.0264	$6.077979e-5$	4.0266
		1/16	$2.678401e-6$	4.0041	$3.787831e-6$	4.0066
		1/32	$1.718088e-7$	3.9624	$2.429744e-7$	3.9624

В таблице 5 приведены расчеты для случая, когда размеры расчетной сетки уменьшаются по правилу $\tau = 16h^2$. Как мы видим результаты расчетов, так же показывают сходимость со скоростью $\mathscr{O}(h^4+\tau^2) = \mathscr{O}(\tau^2)$.

Таблица 5

Норма погрешности и порядок сходимости в сеточной L_2-норме
и максимальная погрешность для случая $\tau = 16h^2$

b	α	τ	$\max\limits_{0\leqslant n\leqslant M}\|z^n\|_0$	ПС in $\|\cdot\|_0$	$\|z\|_{C(\bar\omega_{h\tau})}$	ПС in $\|\cdot\|_{C(\bar\omega_{h\tau})}$
1.0	0.9	1/10	$2.459150e-4$		$3.477764e-4$	
		1/20	$5.863733e-5$	2.0682	$8.292571e-5$	2.0682
		1/40	$1.397700e-5$	2.0687	$1.976646e-5$	2.0687
		1/80	$3.318996e-6$	2.0742	$4.693770e-6$	2.0742
		1/160	$7.919853e-7$	2.0672	$1.120036e-6$	2.0672
		1/320	$1.886750e-7$	2.0695	$2.668268e-7$	2.0695
		1/640	$4.518829e-8$	2.0618	$6.390580e-8$	2.0618
		1/1280	$1.082340e-8$	2.0617	$1.530677e-8$	2.0617
0.5	0.5	1/10	$2.788817e-4$		$3.943984e-4$	
		1/20	$6.486018e-5$	2.1042	$9.172615e-5$	2.1042
		1/40	$1.528230e-5$	2.0854	$2.161244e-5$	2.0854
		1/80	$3.634152e-6$	2.0721	$5.139468e-6$	2.0721
		1/160	$8.780090e-7$	2.0493	$1.241692e-6$	2.0493
		1/320	$2.134375e-7$	2.0404	$3.018462e-7$	2.0404
		1/640	$5.244403e-8$	2.0249	$7.416709e-8$	2.0249
		1/1280	$1.290852e-8$	2.0224	$1.825542e-8$	2.0224
0.1	0.1	1/10	$1.296022e-4$		$1.832852e-4$	
		1/20	$3.099764e-5$	2.0638	$4.383728e-5$	2.0638
		1/40	$7.503022e-6$	2.0466	$1.061087e-5$	2.0466
		1/80	$1.818637e-6$	2.0446	$2.571942e-6$	2.0446
		1/160	$4.477262e-7$	2.0221	$6.331805e-7$	2.0221
		1/320	$1.101485e-7$	2.0231	$1.557735e-7$	2.0231
		1/640	$2.738633e-8$	2.0079	$3.873013e-8$	2.0079
		1/1280	$6.770612e-9$	2.0160	$9.575094e-9$	2.0160

Литература

1. *Samko S. G, Kilbas A. A. and Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.—Florida: CRC Press, 1993.—1006 p.
2. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus.—N. Y.: Academic Press, 1974.—322 p.

3. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations.—San Diego: Academic Press, 1999.—340 p.
4. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics.—Singapore: World Scientific, 2000.—472 p.
5. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo, J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations.—Amsterdam: Elsevier, 2006.—540 p.
6. *Alikhanov A. A.* Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Appl. Math. Comput.—2012.—Vol. 219, № 8.—P. 3938–3946. DOI: 10.1016/j.amc.2012.10.029.
7. *Alikhanov A. A.* Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation // Appl. Math. Comput.—2015.—Vol. 268.—P. 12–22. DOI: 10.1016/j.amc.2015.06.045.
8. *Sandev T., Chechkin A., Kantz H., Metzler R.* Diffusion and Fokker–Planck–Smoluchowski equations with generalized memory kernel // Fract. Calc. Appl. Anal.—2015.—Vol. 18, № 4.—P. 1006–1038. DOI: 10.1515/fca-2015-0059.
9. *Alikhanov A. A.* A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations // Differ. Equ.—2011.—Vol. 46, № 5.—P. 660–666. DOI: 10.1134/S0012266110050058.
10. *Alikhanov A. A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. of Comp. Phys.—2015.—Vol. 280.—P. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
11. *Alikhanov A. A.* Stability and convergence of difference schemes for boundary value problems for the fractional-order diffusion equation // Comput. Math. and Math. Phys.—2016.—Vol. 56, № 4.—P. 561–575. DOI: 10.1134/S0965542516040035.
12. *Alikhanov A. A.* A time-fractional diffusion equation with generalized memory kernel in differential and difference settings with smooth solutions // Comput. Methods Appl. Math.—2017.—Vol. 17, № 4.—P. 647–660. DOI: 10.1515/cmam-2017-0035.
13. *Alikhanov A., Beshtokov M., Mehra M.* The Crank–Nicolson type compact difference scheme for a loaded time-fractional Hallaire's equation // Frac. Calc. Appl. Anal.—2021.—Vol. 24, № 4.—P. 1231–1256. DOI: 10.1515/fca-2021-0053.
14. *Gao G. H., Alikhanov A. A., Sun Z. Z.* The temporal second order difference schemes based on the interpolation approximation for solving the time multi-term and distributed-order fractional sub-diffusion equations // J. Sci. Comput.—2017.—Vol. 73, № 1.—P. 93–121. DOI: 10.1007/s10915-017-0407-x.
15. *Хибиев А. Х.* Устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2019.—Т. 23, № 3.—С. 582–597. DOI: 10.14498/vsgtu1690.
16. *Khibiev A., Alikhanov A., Huang C.* A second order difference scheme for time fractional diffusion equation with generalized memory kernel.—2021. arXiv:2108.10596 [cs, math].

Статья поступила 28 мая 2021 г.

Алиханов Анатолий Алиевич
Северо-Кавказский центр математических исследований СКФУ,
декан факультета математики и компьютерных наук
РОССИЯ, 355017, Ставрополь, Пушкина, 1
E-mail: `aaalikhanov@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0003-0684-6667

Апеков Аслан Мартинович
Северо-Кавказский центр математических исследований СКФУ,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 355017, Ставрополь, Пушкина, 1
E-mail: `aslkbsu@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-6269-3717

Хибиев Асланбек Хизирович
Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН, *аспирант*
РОССИЯ, 360005, Нальчик, Шортанова, 89 а
E-mail: `akkhibiev@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0002-5727-7540

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 3, P. 5–15

HIGHER-ORDER APPROXIMATION DIFFERENCE SCHEME FOR THE GENERALIZED ALLER EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

Alikhanov, A. A.[1], Apekov, A. M.[1] and Khibiev, A. Kh.[2]
[1] North Caucasus Center for Mathematical Research NCFU,
1 Pushkin St., Stavropol 355017, Russia;
[2] Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 a Shortanova St., Nalchik 360005, Russia
E-mail: aaalikhanov@gmail.com, aslkbsu@yandex.ru, akkhibiev@gmail.com

Dedicated to Professor Stefan Grigorievich Samko
on his 80th birthday

Abstract. In this paper, the first boundary value problem for the Aller equation of fractional time order with generalized memory functions was considered. For the numerical solution of the problem, two difference schemes of an increased order of approximation are constructed. In the case of variable coefficients, a second-order difference scheme of approximation is proposed, both in time and in space. A compact difference scheme of the fourth order of approximation in space and the second order in time for the generalized Aller equation with constant coefficients is proposed. A priori estimates for solutions of the mentioned difference schemes are obtained by the method of energy inequalities. Their unconditional stability and convergence are proved. It is shown that the convergence rate coincides with the order of approximation error in the case of a sufficiently smooth solution of the original problem. On the basis of the proposed algorithms, numerical calculations of test problems were carried out, confirming the obtained theoretical results. All calculations were performed using the Julia v1.5.1 programming language.

Key words: fractional derivative, generalized memory kernel, a priori estimates, fractional order diffusion equation, difference schemes, stability, convergence.

Mathematical Subject Classification (2010): 65M06, 65N06, 65N12.

For citation: *Alikhanov, A. A., Apekov, A. M. and Khibiev, A. Kh.* Higher-Order Approximation Difference Scheme for the Generalized Aller Equation of Fractional Order, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 5–15 (in Russian). DOI: 10.46698/p3608-5250-8760-g.

References

1. *Samko, S. G, Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Florida, CRC Press, 1993, 1006 p.
2. *Oldham, K. B. and Spanier, J. The Fractional Calculus*, New York, Academic Press, 1974, 322 p.
3. *Podlubny, I. Fractional Differential Equations*, San Diego, Academic Press, 1999, 340 p.
4. *Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics*, Singapore, World Scientific, 2000, 472 p.
5. *Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam, Elsevier, 2006, 540 p.
6. *Alikhanov, A. A.* Boundary Value Problems for the Diffusion Equation of the Variable Order in Differential and Difference Settings, *Applied Mathematics and Computation*, 2012, vol. 219, no. 8, pp. 3938–3946. DOI: 10.1016/j.amc.2012.10.029.
7. *Alikhanov, A. A.* Numerical Methods of Solutions of Boundary Value Problems for the Multi-Term Variable-Distributed Order Diffusion Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 268, pp. 12–22. DOI: 10.1016/j.amc.2015.06.045.
8. *Sandev, T., Chechkin, A., Kantz, H. and Metzler, R.* Diffusion and Fokker–Planck–Smoluchowski Equations with Generalized Memory Kernel, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2015, vol. 18, no. 4, pp. 1006–1038. DOI: 10.1515/fca-2015-0059.
9. *Alikhanov, A. A.* A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, *Differential Equations*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. DOI: 10.1134/S0012266110050058.

10. *Alikhanov, A. A.* A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
11. *Alikhanov, A. A.* Stability and Convergence of Difference Schemes for Boundary Value Problems for the Fractional-Order Diffusion Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 4, pp. 561–575. DOI: 10.1134/S0965542516040035.
12. *Alikhanov, A. A.* A Time-Fractional Diffusion Equation with Generalized Memory Kernel in Differential and Difference Settings with Smooth Solutions, *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 647–660. DOI: 10.1515/cmam-2017-0035.
13. *Alikhanov, A., Beshtokov, M. and Mehra, M.* The Crank–Nicolson Type Compact Difference Scheme for a Loaded Time-Fractional Hallaire'S Equation, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 1231–1256. DOI: 10.1515/fca-2021-0053.
14. *Gao, G. H., Alikhanov, A. A. and Sun, Z. Z.* The Temporal Second Order Difference Schemes Based on the Interpolation Approximation for Solving the Time Multi-Term and Distributed-Order Fractional Sub-Diffusion Equations, *Journal of Scientific Computing*, 2017, vol. 73, no. 1, pp. 93–121. DOI: 10.1007/s10915-017-0407-x.
15. *Khibiev, A. Kh.* Stability and Convergence of Difference Schemes for the Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equation with Generalized Memory Kernels, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 582–597 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1690.
16. *Khibiev, A., Alikhanov, A. and Huang, C.* A Second Order Difference Scheme for Time Fractional Diffusion Equation with Generalized Memory Kernel, 2021. arXiv:2108.10596 [cs, math].

Received May 28, 2021

Anatoly A. Alikhanov
North Caucasus Center for Mathematical Research NCFU,
1 Pushkin St., Stavropol 355017, Russia,
Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Sciences
E-mail: aaalikhanov@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0684-6667

Aslan M. Apekov
North Caucasus Center for Mathematical Research NCFU,
1 Pushkin St., Stavropol 355017, Russia,
Leading Researcher
E-mail: aslkbsu@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-6269-3717

Aslanbek Kh. Khibiev
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 a Shortanova St., Nalchik 360005, Russia,
Postgraduate Student
E-mail: akkhibiev@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5727-7540