Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 3, С. 64–79

УДК 517.9
DOI 10.46698/t8227-2101-5573-p

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

М. В. Донцова[1]

[1] Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Посвящается профессору
Стефану Григорьевичу Самко
по случаю его 80*-летнего юбилея*

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для одной системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Для указанной задачи Коши в исходных координатах с помощью метода дополнительного аргумента исследуется ее разрешимость; определены достаточные условия существования и единственности локального решения, при которых решение имеет такую же гладкость по независимой переменной, как и начальные функции задачи Коши. Сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности локального решения. Определены достаточные условия существования и единственности глобального решения. Сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности глобального решения. Доказательство глобальной разрешимости опирается на глобальные оценки.

Ключевые слова: метод дополнительного аргумента, задача Коши, уравнение в частных производных первого порядка.

Mathematical Subject Classification (2010): 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05.

Образец цитирования: *Донцова М. В.* Разрешимость задачи Коши для одной системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 3.—С. 64–79. DOI: 10.46698/t8227-2101-5573-p.

Введение

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + \big(a(t)u(t,x) + b(t)v(t,x) + h_1(t)\big)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + \big(c(t)u(t,x) + g(t)v(t,x) + h_2(t)\big)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ — неизвестные функции, $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $g(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ — известные функции.

Для системы уравнений (1) определим начальные условия

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad v(0,x) = \varphi_2(x), \tag{2}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — известные функции.

Задача (1), (2) рассматривается на множестве

$$\Omega_T = \bigl\{(t,x) \bigm| 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in [0,+\infty),\ T>0\bigr\}.$$

В работах [1, 2] для системы вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \bigl(a_1(t)u(t,x) + b_1(t)v(t,x)\bigr)\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2(t)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + \bigl(c_1(t)u(t,x) + g_1(t)v(t,x)\bigr)\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \tag{3}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ — неизвестные функции, $a_1(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $c_1(t)$, $g_1(t)$ — известные функции, a_2, g_2 — известные константы, с начальными условиями (2) на

$$\Omega = \bigl\{(t,x) \bigm| 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in (-\infty,+\infty),\ T>0\bigr\},$$

определены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши в исходных координатах, при которых решение имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши и достаточные условия существования и единственности глобального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка $t \in [0,T]$).

Аналогичные результаты получены работе [3] для системы вида

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{4}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ — неизвестные функции, $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$, S_1, S_2 — известные функции, с начальными условиями (2) на

$$\Omega = \bigl\{(t,x) \bigm| 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in (-\infty,+\infty),\ T>0\bigr\}.$$

В [4] такие же результаты получены с помощью метода дополнительного аргумента для системы вида (1) с начальными условиями (2) на Ω, при этом функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $g(t)$ предполагались положительными, $h_1(t) \equiv 0$, $h_2(t) \equiv 0$ на $[0,T]$.

В данной статье с помощью метода дополнительного аргумента для системы вида (1) с начальными условиями (2) на Ω_T мы определяем вариант достаточных условий в случае положительных $a(t)$, $c(t)$, отрицательных $b(t)$, $g(t)$, неположительных $h_1(t)$, $h_2(t)$ на $[0,T]$.

В работах [1–4] задача Коши рассматривается на

$$\Omega = \bigl\{(t,x) \bigm| 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in (-\infty,+\infty),\ T>0\bigr\}.$$

В данной работе задача Коши рассматривается на

$$\Omega_T = \bigl\{(t,x) \bigm| 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in [0,+\infty),\ T>0\bigr\}.$$

При замене Ω на Ω_T достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши усложняются, так как они включают дополнительные ограничения на функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$. В данной работе для случая положительных $a(t)$, $c(t)$, отрицательных $b(t)$, $g(t)$, неположительных $h_1(t)$, $h_2(t)$ на $[0,T]$ достаточные условия разрешимости задачи Коши (1), (2) на Ω_T отличаются от достаточных условий разрешимости задачи Коши (1), (2) на Ω тем, что достаточные условия разрешимости задачи Коши (1), (2) на Ω_T включают дополнительные условия

$$\varphi_1(x) \leqslant 0,\ \varphi_2(x) \geqslant 0 \ \text{ на } \ [0,+\infty), \quad f_1(t,x) \leqslant 0,\ f_2(t,x) \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Omega_T.$$

Условия

$$a(t) > 0,\ b(t) < 0,\ c(t) > 0,\ g(t) < 0,\ h_1(t) \leqslant 0,\ h_2(t) \leqslant 0, \qquad t \in [0,T],$$

$$\varphi_1(x) \leqslant 0,\ \varphi_2(x) \geqslant 0 \ \text{ на } \ [0,+\infty), \quad f_1(t,x) \leqslant 0,\ f_2(t,x) \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Omega_T$$

позволяют избежать задания граничных условий при $x = 0$.

С помощью метода дополнительного аргумента запишем для задачи (1), (2) расширенную характеристическую систему:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = a(s)w_1(s,t,x) + b(s)w_3(s,t,x) + h_1(s), \tag{5}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = c(s)w_4(s,t,x) + g(s)w_2(s,t,x) + h_2(s), \tag{6}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = f_1(s,\eta_1), \tag{7}$$

$$\frac{dw_2(s,t,x)}{ds} = f_2(s,\eta_2), \tag{8}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1), \quad w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2), \tag{9}$$

$$\eta_1(t,t,x) = x, \quad \eta_2(t,t,x) = x, \tag{10}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)), \quad w_2(0,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)). \tag{11}$$

Неизвестные функции η_i, w_j, $i = 1,2$, $j = 1,\ldots,4$, зависят не только t и x, но и от дополнительного аргумента s.

Интегрируя уравнения (5)–(8) по аргументу s и учитывая условия (9)–(11), получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int\limits_s^t \big(a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3 + h_1(\nu)\big)\,d\nu, \tag{12}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int\limits_s^t \big(c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2 + h_2(\nu)\big)\,d\nu, \tag{13}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_1(\nu,\eta_1)\,d\nu, \tag{14}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_2(\nu,\eta_2)\,d\nu, \tag{15}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1), \quad w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{16}$$

Подставим (12), (13) в (14)–(16), получим следующую систему:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1\Bigg(x - \int\limits_0^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3 + h_1(\nu))\,d\nu\Bigg)$$
$$+ \int\limits_0^s f_1\Bigg(\nu, x - \int\limits_\nu^t (a(\tau)w_1 + b(\tau)w_3 + h_1(\tau))\,d\tau\Bigg)d\nu, \tag{17}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2\Bigg(x - \int\limits_0^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2 + h_2(\nu))\,d\nu\Bigg)$$
$$+ \int\limits_0^s f_2\Bigg(\nu, x - \int\limits_\nu^t (c(\tau)w_4 + g(\tau)w_2 + h_2(\tau))d\tau\Bigg)d\nu, \tag{18}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2\Bigg(s, s, x - \int\limits_s^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3 + h_1(\nu))\,d\nu\Bigg), \tag{19}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1\Bigg(s, s, x - \int\limits_s^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2 + h_2(\nu))\,d\nu\Bigg). \tag{20}$$

Обозначим $\Gamma_T = \{(s,t,x)\,|\,0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ x \in [0,+\infty),\ T > 0\}$.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия*

$$a(t) > 0,\ b(t) < 0,\ c(t) > 0,\ g(t) < 0,\ h_1(t) \leqslant 0,\ h_2(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,T],$$

$$\varphi_1(x) \leqslant 0,\ \varphi_2(x) \geqslant 0\ \text{ на }\ [0,+\infty), \quad f_1(t,x) \leqslant 0,\ f_2(t,x) \geqslant 0\ \text{ на }\ \Omega_T.$$

Тогда $\eta_1(s,t,x) \in [0,+\infty)$, $\eta_2(s,t,x) \in [0,+\infty)$ *на* Γ_T.

$\lhd$ Из (14) при выполнении условий

$$\varphi_1(x) \leqslant 0\ \text{ на }\ [0,+\infty), \quad f_1(t,x) \leqslant 0\ \text{ на }\ \Omega_T,$$

получаем $w_1(s,t,x) \leqslant 0$ на Γ_T.

Из (15) при выполнении условий

$$\varphi_2(x) \geqslant 0\ \text{ на }\ [0,+\infty), \quad f_2(t,x) \geqslant 0\ \text{ на }\ \Omega_T,$$

получаем $w_2(s,t,x) \geqslant 0$ на Γ_T.

Так как $w_1(s,t,x) \leqslant 0$, $w_2(s,t,x) \geqslant 0$ на Γ_T, то из (16), получаем

$$w_4(s,t,x) \leqslant 0,\ w_3(s,t,x) \geqslant 0\ \text{ на }\ \Gamma_T.$$

Так как $x \in [0,+\infty)$, $w_1(s,t,x) \leqslant 0$, $w_3(s,t,x) \geqslant 0$ на Γ_T, то из (12) при выполнении условий

$$a(t) > 0,\ b(t) < 0,\ h_1(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,T],$$

получаем $\eta_1(s,t,x) \in [0,+\infty)$ на Γ_T.

Так как $x \in [0, +\infty)$, $w_4(s,t,x) \leqslant 0$, $w_2(s,t,x) \geqslant 0$ на Γ_T, то из (13) при выполнении условий

$$c(t) > 0,\ g(t) < 0,\ h_2(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,T],$$

получаем $\eta_2(s,t,x) \in [0, +\infty)$ на Γ_T. $\rhd$

Мы будем писать, что константы K_0, K_1, K_2, $\ldots$ определяются через исходные данные, если эти константы определяются через известные характеристики задачи, нормы и экстремумы известных функций при помощи конечных алгебраических, дифференциальных или интегральных выражений, т. е. в рамках исходной задачи могут быть выражены конкретным числом.

Лемма 2. *Пусть функции $w_1(s,t,x)$, $w_2(s,t,x)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений* (17)–(20), *являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными. Тогда функции*

$$u(t,x) = w_1(t,t,x), \quad v(t,x) = w_2(t,t,x)$$

будут решением задачи (1), (2) *на Ω_{T_0}, $T_0 \leqslant T$, где T_0 — константа.*

Лемма 2 составляет основу метода дополнительного аргумента и доказывается стандартным образом (см., например, [5]).

1. Существование локального решения

Обозначим

$$\Gamma_T = \big\{(s,t,x) \mid 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ x \in [0,+\infty),\ T > 0\big\},$$

$$C_\varphi = \max\left\{ \sup_{[0,+\infty)} \left|\varphi_i^{(l)}\right| \,\middle|\, i = 1,2,\ l = 0,1,2 \right\},$$

$$l = \max\left\{ \sup_{[0,T]} |a(t)|,\ \sup_{[0,T]} |b(t)|,\ \sup_{[0,T]} |c(t)|,\ \sup_{[0,T]} |g(t)| \right\},$$

$$C_f = \max\left\{ \sup_{\Omega_T} |f_1|,\ \sup_{\Omega_T} |f_2|,\ \sup_{\Omega_T} |\partial_x f_1|,\ \sup_{\Omega_T} |\partial_x f_2| \right\},$$

$$\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s,t,x)|, \quad \|f\| = \sup_{\Omega_T} |f(t,x)|,$$

$\overline{C}^{\,1,2,2}(\Omega_T)$ — пространство функций дифференцируемых по t, дважды дифференцируемых по x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T,

$\overline{C}^{\,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(\Omega_*)$ — пространство функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m = 1, \ldots, n$, на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset \mathbb{R}^n, n = 1, 2, \ldots$,

$C([0,T])$ — пространство функций, непрерывных на отрезке $[0,T]$.

Справедлива теорема, в которой сформулирован вариант условий существования и единственности локального решения задачи Коши (1), (2), при которых решение

$$u(t,x) = w_1(t,t,x), \quad v(t,x) = w_2(t,t,x)$$

имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \overline{C}^{\,2}([0,+\infty)), \quad f_1(t,x), f_2(t,x) \in \overline{C}^{\,2,2}(\Omega_T),$$

$$a(t), b(t), c(t), g(t), h_1(t), h_2(t) \in C([0,T])$$

и выполняются условия

$$a(t) > 0,\ b(t) < 0,\ c(t) > 0,\ g(t) < 0,\ h_1(t) \leqslant 0,\ h_2(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,T],$$

$$\varphi_1(x) \leqslant 0,\ \varphi_2(x) \geqslant 0,\ \varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0 \ \text{ на } [0,+\infty),$$

$$f_1(t,x) \leqslant 0,\ f_2(t,x) \geqslant 0,\ \partial_x f_1(t,x) \geqslant 0,\ \partial_x f_2(t,x) \leqslant 0 \ \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для всех $0 \leqslant t \leqslant T_2$, *где* $T_2 = \min\big(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\big)$, *задача Коши* (1), (2) *имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \overline{C}^{\,1,2,2}(\Omega_{T_2})$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (17)–(20).

Доказательство теоремы разбито на две леммы.

Лемма 3. *Пусть*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \overline{C}^{\,2}([0,+\infty)), \quad f_1(t,x), f_2(t,x) \in \overline{C}^{\,2,2}(\Omega_T),$$

$$a(t), b(t), c(t), g(t), h_1(t), h_2(t) \in C([0,T])$$

и выполняются условия

$$a(t) > 0,\ b(t) < 0,\ c(t) > 0,\ g(t) < 0,\ h_1(t) \leqslant 0,\ h_2(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,T],$$

$$\varphi_1(x) \leqslant 0,\ \varphi_2(x) \geqslant 0 \ \text{ на } [0,+\infty), \quad f_1(t,x) \leqslant 0,\ f_2(t,x) \geqslant 0 \ \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда система интегральных уравнений (17)–(20) *имеет единственное решение*

$$w_j \in \overline{C}^{\,1,1,1}(\Gamma_{T_2}),$$

где $j = 1,2,3,4$, $T_2 = \min\big(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\big)$.

$\lhd$ Нулевое приближение к решению системы уравнений (17)–(20) зададим равенствами

$$w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x),\ w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x),\ w_{30}(s,t,x) = \varphi_2(x),\ w_{40}(s,t,x) = \varphi_1(x).$$

Первое и последующие приближения системы уравнений (17)–(20) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений ($n = 1,2,\ldots$):

$$\begin{gathered} w_{1n} = \varphi_1\bigg(x - \int\limits_0^t \big(a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n} + h_1(\nu)\big)\,d\nu\bigg) \\ + \int\limits_0^s f_1\bigg(\nu, x - \int\limits_\nu^t \big(a(\tau)w_{1n} + b(\tau)w_{3n} + h_1(\tau)\big)\,d\tau\bigg)d\nu, \end{gathered} \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
w_{2n} &= \varphi_2\biggl(x - \int\limits_0^t \bigl(c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n} + h_2(\nu)\bigr)\,d\nu\biggr)\\
&+ \int\limits_0^s f_2\biggl(\nu, x - \int\limits_\nu^t \bigl(c(\tau)w_{4n} + g(\tau)w_{2n} + h_2(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr)d\nu,
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
w_{3n} = w_{2(n-1)}\biggl(s, s, x - \int\limits_s^t \bigl(a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n} + h_1(\nu)\bigr)\,d\nu\biggr), \tag{23}
$$

$$
w_{4n} = w_{1(n-1)}\biggl(s, s, x - \int\limits_s^t \bigl(c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n} + h_2(\nu)\bigr)\,d\nu\biggr). \tag{24}
$$

Для системы уравнений (21)–(24) нулевое приближение определим равенствами

$$
w_{jn}^0 = w_{j(n-1)}, \quad j = 1, 2, 3, 4.
$$

Для системы уравнений (21)–(24) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений:

$$
\begin{aligned}
w_{1n}^{k+1} &= \varphi_1\biggl(x - \int\limits_0^t \bigl(a(\nu)w_{1n}^k + b(\nu)w_{3n}^k + h_1(\nu)\bigr)\,d\nu\biggr)\\
&+ \int\limits_0^s f_1\biggl(\nu, x - \int\limits_\nu^t \bigl(a(\tau)w_{1n}^k + b(\tau)w_{3n}^k + h_1(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr)d\nu,
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{2n}^{k+1} &= \varphi_2\biggl(x - \int\limits_0^t \bigl(c(\nu)w_{4n}^k + g(\nu)w_{2n}^k + h_2(\nu)\bigr)\,d\nu\biggr)\\
&+ \int\limits_0^s f_2\biggl(\nu, x - \int\limits_\nu^t \bigl(c(\tau)w_{4n}^k + g(\tau)w_{2n}^k + h_2(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr)d\nu,
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
w_{3n}^{k+1} = w_{2(n-1)}\biggl(s, s, x - \int\limits_s^t \bigl(a(\nu)w_{1n}^k + b(\nu)w_{3n}^k + h_1(\nu)\bigr)\,d\nu\biggr), \tag{27}
$$

$$
w_{4n}^{k+1} = w_{1(n-1)}\biggl(s, s, x - \int\limits_s^t \bigl(c(\nu)w_{4n}^k + g(\nu)w_{2n}^k + h_2(\nu)\bigr)d\nu\biggr). \tag{28}
$$

В силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши для всех $0 \leqslant t \leqslant T_1$, где $T_1 = \min\bigl(\frac{C_\varphi}{2C_f}, \frac{1}{12C_\varphi l}\bigr)$, справедливы оценки:

$$
\bigl\|w_{jn}^k\bigr\| \leqslant 2C_\varphi, \quad j = 1, 2, 3, 4.
$$

Далее, при выполнении условий леммы 3 последовательные приближения (25)–(28) ограничены, непрерывны, сходятся к решению системы (21)–(24), справедливы оценки:

$$
\bigl\|w_{jn}\bigr\| \leqslant 2C_\varphi, \quad j = 1, 2, 3, 4.
$$

Дифференцируя (25)–(28) по x, получим

$$\begin{aligned} &w_{1nx}^{k+1}(s,t,x) \\ &= \varphi_1'\Big(x - \int\limits_0^t \big(a(\tau)w_{1n}^k + b(\tau)w_{3n}^k + h_1(\tau)\big)\,d\tau\Big)\Big(1 - \int\limits_0^t \big(a(\tau)w_{1nx}^k + b(\tau)w_{3nx}^k\big)d\tau\Big) \\ &\quad + \int\limits_0^s \partial_x f_1\Big(1 - \int\limits_\nu^t \big(a(\tau)w_{1nx}^k + b(\tau)w_{3nx}^k\big)\,d\tau\Big)d\nu, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &w_{2nx}^{k+1}(s,t,x) \\ &= \varphi_2'\Big(x - \int\limits_0^t \big(c(\tau)w_{4n}^k + g(\tau)w_{2n}^k + h_2(\tau)\big)d\tau\Big)\Big(1 - \int\limits_0^t \big(c(\tau)w_{4nx}^k + g(\tau)w_{2nx}^k\big)\,d\tau\Big) \\ &\quad + \int\limits_0^s \partial_x f_2\Big(1 - \int\limits_\nu^t \big(c(\tau)w_{4nx}^k + g(\tau)w_{2nx}^k\big)\,d\tau\Big)d\nu, \end{aligned} \tag{30}$$

$$w_{3nx}^{k+1}(s,t,x) = w_{2(n-1)x}\Big(1 - \int\limits_s^t \big(a(\tau)w_{1nx}^k + b(\tau)w_{3nx}^k\big)\,d\tau\Big), \tag{31}$$

$$w_{4nx}^{k+1}(s,t,x) = w_{1(n-1)x}\Big(1 - \int_s^t \big(c(\tau)w_{4nx}^k + g(\tau)w_{2nx}^k\big)\,d\tau\Big). \tag{32}$$

В силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши для всех $0 \leqslant t \leqslant T_1$, где $T_1 = \min\big(\frac{C_\varphi}{2C_f}, \frac{1}{12C_\varphi l}\big)$, справедливы оценки:

$$\|w_{1nx}^k\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|w_{2nx}^k\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|w_{3nx}^k\| \leqslant 8C_\varphi,\ \|w_{4nx}^k\| \leqslant 8C_\varphi.$$

Дифференцируя (21)–(24) по x, получим

$$\begin{aligned} w_{1nx} &= \varphi_1'\Big(x - \int\limits_0^t \big(a(\tau)w_{1n} + b(\tau)w_{3n} + h_1(\tau)\big)d\tau\Big)\Big(1 - \int\limits_0^t \big(a(\tau)w_{1nx} + b(\tau)w_{3nx}\big)d\tau\Big) \\ &\quad + \int\limits_0^s \partial_x f_1\Big(1 - \int\limits_\nu^t \big(a(\tau)w_{1nx} + b(\tau)w_{3nx}\big)\,d\tau\Big)d\nu, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} w_{2nx} &= \varphi_2'\Big(x - \int\limits_0^t \big(c(\tau)w_{4n} + g(\tau)w_{2n} + h_2(\tau)\big)d\tau\Big)\Big(1 - \int\limits_0^t \big(c(\tau)w_{4nx} + g(\tau)w_{2nx}\big)d\tau\Big) \\ &\quad + \int\limits_0^s \partial_x f_2\Big(1 - \int\limits_\nu^t \big(c(\tau)w_{4nx} + g(\tau)w_{2nx}\big)\,d\tau\Big)d\nu, \end{aligned} \tag{34}$$

$$w_{3nx} = w_{2(n-1)x}\Big(1 - \int\limits_s^t \big(a(\tau)w_{1nx} + b(\tau)w_{3nx}\big)\,d\tau\Big), \tag{35}$$

$$w_{4nx} = w_{1(n-1)x}\Big(1 - \int\limits_s^t \big(c(\tau)w_{4nx} + g(\tau)w_{2nx}\big)\,d\tau\Big). \tag{36}$$

При выполнении условий леммы 3 последовательные приближения w^k_{1nx}, w^k_{2nx}, w^k_{3nx}, w^k_{4nx} сходятся к w_{1nx}, w_{2nx}, w_{3nx}, w_{4nx} при $k \to \infty$, справедливы оценки:

$$\|\partial_x w_{1n}\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{2n}\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\| \leqslant 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\| \leqslant 8C_\varphi.$$

Последовательные приближения (21)–(24), сходятся к решению системы (17)–(20), справедливы оценки:

$$\|w_j\| \leqslant 2C_\varphi, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Дважды продифференцируем (21)–(24) по x и обозначим $\omega^n_j = w_{jnxx}$, $j = 1, 2, 3, 4$. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{gathered}\omega^n_1(s,t,x) = -\varphi'_1\Big(x - \int\limits_0^t \big(a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n} + h_1(\nu)\big)\,d\nu\Big) \int\limits_0^t \big(a(\nu)\omega^n_1 + b(\nu)\omega^n_3\big)\,d\nu \\ - \int\limits_0^s \partial_x f_1 \int\limits_\nu^t \big(a(\tau)\omega^n_1 + b(\tau)\omega^n_3\big)\,d\tau d\nu + G_1(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}),\end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered}\omega^n_2(s,t,x) = -\varphi'_2\Big(x - \int\limits_0^t \big(c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n} + h_2(\nu)\big)\,d\nu\Big) \int\limits_0^t \big(c(\nu)\omega^n_4 + g(\nu)\omega^n_2\big)\,d\nu \\ - \int\limits_0^s \partial_x f_2 \int\limits_\nu^t \big(c(\tau)\omega^n_4 + g(\tau)\omega^n_2\big)\,d\tau d\nu + G_2(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx}),\end{gathered} \tag{38}$$

$$\omega^n_3 = \omega^{n-1}_2\Big(1 - \int\limits_s^t \big(a(\tau)w_{1nx} + b(\tau)w_{3nx}\big)\,d\tau\Big)^2 - w_{2(n-1)x} \int\limits_s^t \big(a(\tau)\omega^n_1 + b(\tau)\omega^n_3\big)\,d\tau, \tag{39}$$

$$\omega^n_4 = \omega^{n-1}_1\Big(1 - \int\limits_s^t \big(c(\tau)w_{4nx} + g(\tau)w_{2nx}\big)\,d\tau\Big)^2 - w_{1(n-1)x} \int\limits_s^t \big(c(\tau)\omega^n_4 + g(\tau)\omega^n_2\big)\,d\tau, \tag{40}$$

где G_i, $i = 1, 2,$ — известные функции.

При выполнении условий леммы 3 для всех $0 \leqslant t \leqslant T_2$, где $T_2 = \min\big(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\big)$, справедливы оценки:

$$\big\|\omega^n_i\big\| \leqslant 18C_\varphi,\ i = 1, 2, \quad \big\|\omega^n_3\big\| \leqslant 111C_\varphi, \quad \big\|\omega^n_4\big\| \leqslant 111C_\varphi.$$

Обозначим

$$q_n = \begin{pmatrix} w_{1nx} \\ w_{2nx} \end{pmatrix}, \quad p_n = \sum_{j=1}^4 \big\|w_{j(n+1)} - w_{jn}\big\|$$

и введем норму

$$\|q_n\| = \|w_{1nx}\| + \|w_{2nx}\|.$$

При выполнении условий леммы 3, используя метод математической индукции, для всех $0 \leqslant t \leqslant T_2$, где $T_2 = \min\big(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\big)$, получаем

$$\sum_{n=0}^N \|q_{n+1} - q_n\| \leqslant \frac{97}{67}\|q_1 - q_0\| + \frac{123}{134}\sum_{n=1}^N p_n,$$

где $\sum_{n=1}^N p_n$ ограничены при любом N.

Следовательно, частичные суммы $\sum_{n=0}^{N}\|q_{n+1}-q_n\|$ ограничены при любом N и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\|q_{n+1}-q_n\|$ сходится.

Поэтому $w_{inx}\to w_{ix}=\partial_x w_i$, $i=1,2$. Далее,

$$w_{3nx}\to w_{3x}=\partial_x w_3 \quad \text{и} \quad w_{4nx}\to w_{4x}=\partial_x w_4.$$

Следовательно, $w_{jnx}\to w_{jx}=\partial_x w_j$, $j=1,2,3,4$, где функции $\partial_x w_j$ непрерывны по всем своим аргументам на Γ_{T_2}, $T_2=\min\big(\frac{C_\varphi}{4C_f},\frac{3}{40C_\varphi l}\big)$. Справедливы оценки:

$$\|\partial_x w_i\|\leqslant 4C_\varphi,\ i=1,2, \quad \|\partial_x w_3\|\leqslant 8C_\varphi, \quad \|\partial_x w_4\|\leqslant 8C_\varphi.$$

Аналогично w_j, $j=1,2,3,4$, имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t на Γ_{T_2}. Единственность решения доказывается так же, как в статье [6]. $\rhd$

Лемма 4. *Пусть*

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in\overline{C}^{\,2}([0,+\infty)), \quad f_1(t,x),f_2(t,x)\in\overline{C}^{\,2,2}(\Omega_T),$$

$$a(t),b(t),c(t),g(t),h_1(t),h_2(t)\in C([0,T])$$

и выполняются условия

$$a(t)>0,\ b(t)<0,\ c(t)>0,\ g(t)<0,\ h_1(t)\leqslant 0,\ h_2(t)\leqslant 0, \quad t\in[0,T],$$

$$\varphi_1(x)\leqslant 0,\ \varphi_2(x)\geqslant 0,\ \varphi_1'(x)\geqslant 0,\ \varphi_2'(x)\leqslant 0\ \text{ на }\ [0,+\infty),$$

$$f_1(t,x)\leqslant 0,\ f_2(t,x)\geqslant 0,\ \partial_x f_1(t,x)\geqslant 0,\ \partial_x f_2(t,x)\leqslant 0\ \text{ на }\ \Omega_T.$$

Тогда функции $\{w_j\}$, $j=1,2,3,4$, *представляющие собой решение системы уравнений* (17)–(20), *имеют непрерывные и ограниченные производные* $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x\partial t}$, $j=1,2,3,4$, *на* Γ_{T_2}, *где* $T_2=\min\big(\frac{C_\varphi}{4C_f},\frac{3}{40C_\varphi l}\big)$.

$\lhd$ Так как $\|w_{jn}\|\leqslant 2C_\varphi$, $j=1,2,3,4$, то для всех $0\leqslant t\leqslant T_2$, где $T_2=\min\big(\frac{C_\varphi}{4C_f},\frac{3}{40C_\varphi l}\big)$, получаем

$$\left|\int\limits_s^t\big(a(\tau)w_{1n}+b(\tau)w_{3n}+h_1(\tau)\big)\,d\tau\right|\leqslant t\big(l\|w_{1n}\|+l\|w_{3n}\|+h\big)\leqslant 4tlC_\varphi+ht\leqslant 0.3+hT_2,$$

$$\left|\int\limits_s^t\big(c(\tau)w_{4n}+g(\tau)w_{2n}\big)\,d\tau\right|\leqslant t\big(l\|w_{4n}\|+l\|w_{2n}\|+h\big)\leqslant 4tlC_\varphi+ht\leqslant 0.3+hT_2,$$

где $h=\max\big\{\sup_{[0,T]}|h_1(t)|,\sup_{[0,T]}|h_2(t)|\big\}$.

Зафиксируем точку $x_0\in[0,+\infty)$ и рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0}=\big\{x\ \big|\ 0\leqslant x\leqslant x_0+0.3+hT_2\big\}.$$

Пусть $x_1,x_2\in\Omega_{x_0}$. Докажем, что

$$\big|\eta_{1n}(s,t,x_1)-\eta_{1n}(s,t,x_2)\big|\leqslant|x_1-x_2|, \tag{41}$$

$$\big|\eta_{2n}(s,t,x_1)-\eta_{2n}(s,t,x_2)\big|\leqslant|x_1-x_2|, \tag{42}$$

где

$$\eta_{1n}(s,t,x)=x-\int\limits_s^t \big(a(\tau)w_{1n}(\tau,t,x)+b(\tau)w_{3n}(\tau,t,x)+h_1(\tau)\big)\,d\tau,$$

$$\eta_{2n}(s,t,x)=x-\int\limits_s^t \big(c(\tau)w_{4n}(\tau,t,x)+g(\tau)w_{2n}(\tau,t,x)+h_2(\tau)\big)\,d\tau.$$

Предположим, что

$$w_{1(n-1)x}\geqslant 0,\quad w_{2(n-1)x}\leqslant 0. \tag{43}$$

При выполнении условий леммы 4 для всех $n\in N$ на Γ_{T_2}, где $T_2=\min\big(\frac{C_\varphi}{4C_f},\frac{3}{40C_\varphi l}\big)$, справедливы неравенства

$$1-\int\limits_s^t \big(a(\tau)w_{1nx}+b(\tau)w_{3nx}\big)\,d\tau>0,\quad 1-\int\limits_s^t \big(c(\tau)w_{4nx}+g(\tau)w_{2nx}\big)\,d\tau>0. \tag{44}$$

Из (35), (43), (44), следует, что $w_{3nx}\leqslant 0$. Из (36), (43), (44), следует, что $w_{4nx}\geqslant 0$. Так как $w_{3nx}\leqslant 0$, то из (33), (44) в силу условий $\varphi_1'(x)\geqslant 0$ на $[0,+\infty)$, $\partial_x f_1\geqslant 0$ на Ω_T, получаем $w_{1nx}\geqslant 0$.

Из (34), (44) в силу условий $\varphi_2'(x)\leqslant 0$ на $[0,+\infty)$, $\partial_x f_2\leqslant 0$ на Ω_T, получаем $w_{2nx}\leqslant 0$.

Так как $w_{1nx}\geqslant 0$, $w_{2nx}\leqslant 0$, $w_{3nx}\leqslant 0$, $w_{4nx}\geqslant 0$, имеем

$$1-\int\limits_s^t \big(a(\tau)w_{1nx}+b(\tau)w_{3nx}\big)\,d\tau\leqslant 1,\quad 1-\int\limits_s^t \big(c(\tau)w_{4nx}+g(\tau)w_{2nx}\big)\,d\tau\leqslant 1. \tag{45}$$

В силу (44), (45) по теореме о конечных приращениях справедливы неравенства (41), (42).

Далее так же, как в [7], устанавливается равностепенная непрерывность функций ω_1^n, ω_2^n по x в выбранной, произвольной точке $x_0\in[0,+\infty)$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\widetilde{\omega}_1^n=-\varphi_1'\Big(x-\int\limits_0^t \big(a(\nu)w_1+b(\nu)w_3+h_1(\nu)\big)\,d\nu\Big)\int\limits_0^t \big(a(\nu)\widetilde{\omega}_1^n+b(\nu)\widetilde{\omega}_3^n\big)\,d\nu$$
$$-\int\limits_0^s \partial_x f_1\int\limits_\nu^t \big(a(\tau)\widetilde{\omega}_1^n+b(\tau)\widetilde{\omega}_3^n\big)\,d\tau d\nu+G_1(s,t,x,w_1,w_3,w_{1x},w_{3x}),$$

$$\widetilde{\omega}_2^n=-\varphi_2'\Big(x-\int\limits_0^t \big(c(\nu)w_4+g(\nu)w_2+h_2(\nu)\big)\,d\nu\Big)\int\limits_0^t \big(c(\nu)\widetilde{\omega}_4^n+g(\nu)\widetilde{\omega}_2^n\big)\,d\nu$$
$$-\int\limits_0^s \partial_x f_2\int\limits_\nu^t \big(c(\tau)\widetilde{\omega}_4^n+g(\tau)\widetilde{\omega}_2^n\big)\,d\tau d\nu+G_2(s,t,x,w_2,w_4,w_{2x},w_{4x}),$$

$$\widetilde{\omega}_3^n=\widetilde{\omega}_2^{n-1}\Big(1-\int\limits_s^t \big(a(\tau)w_{1x}+b(\tau)w_{3x}\big)d\tau\Big)^2-w_{2x}(s,s,\eta_1(s,t,x))\int\limits_s^t \big(a(\tau)\widetilde{\omega}_1^n+b(\tau)\widetilde{\omega}_3^n\big)d\tau,$$

$$\widetilde{\omega}_4^n = \widetilde{\omega}_1^{n-1}\biggl(1 - \int\limits_s^t \bigl(c(\tau)w_{4x} + g(\tau)w_{2x}\bigr)d\tau\biggr)^2 - w_{1x}(s,s,\eta_2(s,t,x))\int\limits_s^t \bigl(c(\tau)\widetilde{\omega}_4^n + g(\tau)\widetilde{\omega}_2^n\bigr)d\tau,$$

где G_i, $i = 1, 2$, — известные функции.

В силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши на Γ_{T_2} справедливы оценки:

$$\|\widetilde{\omega}_1^n\| \leqslant 2C_\varphi,\ \|\widetilde{\omega}_2^n\| \leqslant 2C_\varphi,\ \|\widetilde{\omega}_3^n\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\widetilde{\omega}_4^n\| \leqslant 4C_\varphi.$$

Далее, в силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши $\widetilde{\omega}_j^n \to \widetilde{\omega}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, на Γ_{T_2} справедливы оценки:

$$\|\widetilde{\omega}_1\| \leqslant 2C_\varphi,\ \|\widetilde{\omega}_2\| \leqslant 2C_\varphi,\ \|\widetilde{\omega}_3\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\widetilde{\omega}_4\| \leqslant 4C_\varphi.$$

Далее, $\omega_j^n \to \widetilde{\omega}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, при $n \to \infty$ на Γ_{T_2} справедливы оценки:

$$\|\widetilde{\omega}_1\| \leqslant 2C_\varphi,\ \|\widetilde{\omega}_2\| \leqslant 2C_\varphi,\ \|\widetilde{\omega}_3\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\widetilde{\omega}_4\| \leqslant 4C_\varphi.$$

Получаем $w_{jnxx} \to w_{jxx} = \widetilde{\omega}_j$, где функции $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $j = 1, 2, 3, 4$, непрерывны и ограниченны на Γ_{T_2}. Кроме того, существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$, $j = 1, 2, 3, 4$, на Γ_{T_2}. $\rhd$

2. Существование глобального решения

Теорема 2. *Пусть*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \overline{C}^{\,2}([0, +\infty)), \quad f_1(t,x), f_2(t,x) \in \overline{C}^{\,2,2}(\Omega_T),$$
$$a(t), b(t), c(t), g(t), h_1(t), h_2(t) \in C([0,T])$$

и выполняются условия

$$a(t) > 0,\ b(t) < 0,\ c(t) > 0,\ g(t) < 0,\ h_1(t) \leqslant 0,\ h_2(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1(x) \leqslant 0,\ \varphi_2(x) \geqslant 0,\ \varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0 \ \text{ на } [0, +\infty),$$
$$f_1(t,x) \leqslant 0,\ f_2(t,x) \geqslant 0,\ \partial_x f_1(t,x) \geqslant 0,\ \partial_x f_2(t,x) \leqslant 0 \ \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши* (1), (2) *имеет единственное решение*

$$u(t,x), v(t,x) \in \overline{C}^{\,1,2,2}(\Omega_T),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (17)–(20).

$\lhd$ Дифференцируя систему уравнений (1) по x и обозначая

$$p(t,x) = u_x(t,x), \quad q(t,x) = v_x(t,x),$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \partial_t p + \bigl(a(t)u + b(t)v + h_1(t)\bigr)\partial_x p = -a(t)p^2 - b(t)pq + \partial_x f_1, \\ \partial_t q + \bigl(c(t)u + g(t)v + h_2(t)\bigr)\partial_x q = -g(t)q^2 - c(t)pq + \partial_x f_2, \\ p(0,x) = \varphi_1'(x), \quad q(0,x) = \varphi_2'(x). \end{cases} \tag{46}$$

Добавим к (12)–(16) два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a(s)\gamma_1^2(s,t,x) - b(s)\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1) + \partial_x f_1(s,\eta_1), \\ \dfrac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g(s)\gamma_2^2(s,t,x) - c(s)\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x) + \partial_x f_2(s,\eta_2), \end{cases} \tag{47}$$

с условиями $\gamma_1(0,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)$, $\gamma_2(0,t,x) = \varphi_2'(\eta_2)$. Перепишем систему уравнений (47) в виде

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)\exp\Big(-\int\limits_0^s \big(a(\nu)\gamma_1 + b(\nu)\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1)\big)d\nu\Big) \\ \qquad + \int\limits_0^s \partial_x f_1 \exp\Big(-\int\limits_\tau^s \big(a(\nu)\gamma_1 + b(\nu)\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1)\big)d\nu\Big)d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2)\exp\Big(-\int\limits_0^s \big(c(\nu)\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2) + g(\nu)\gamma_2\big)d\nu\Big) \\ \qquad + \int\limits_0^s \partial_x f_2 \exp\Big(-\int\limits_\tau^s \big(c(\nu)\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2) + g(\nu)\gamma_2\big)d\nu\Big)d\tau. \end{cases} \tag{48}$$

В силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши, используя метод последовательных приближений, докажем существование непрерывного решения системы (48) на Γ_{T_2}, где $T_2 = \min\big(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\big)$. Определим последовательные приближения

$$\begin{cases} \gamma_1^{n+1} = \varphi_1'(\eta_1)\exp\Big(-\int\limits_0^s \big(a(\nu)\gamma_1^n + b(\nu)\gamma_2^n(\nu,\nu,\eta_1)\big)d\nu\Big) \\ \qquad + \int\limits_0^s \partial_x f_1 \exp\Big(-\int\limits_\tau^s \big(a(\nu)\gamma_1^n + b(\nu)\gamma_2^n(\nu,\nu,\eta_1)\big)d\nu\Big)d\tau, \\ \gamma_2^{n+1} = \varphi_2'(\eta_2)\exp\Big(-\int\limits_0^s \big(c(\nu)\gamma_1^n(\nu,\nu,\eta_2) + g(\nu)\gamma_2^n\big)d\nu\Big) \\ \qquad + \int\limits_0^s \partial_x f_2 \exp\Big(-\int\limits_\tau^s \big(c(\nu)\gamma_1^n(\nu,\nu,\eta_2) + g(\nu)\gamma_2^n\big)d\nu\Big)d\tau, \end{cases} \tag{49}$$

при этом $\gamma_1^0 = \varphi_1'(\eta_1)$, $\gamma_2^0 = \varphi_2'(\eta_2)$. В силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши на Γ_{T_2} справедливы оценки:

$$\big|\gamma_i^{n+1}\big| \leqslant 2.5C_\varphi, \ |\eta_{ix}| \leqslant 1, \ \big|\gamma_{ix}^{n+1}\big| \leqslant 5C_\varphi, \quad i = 1,2.$$

В силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши из неравенства

$$\big\|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n\big\| + \big\|\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n\big\| \leqslant 0.75\big(\big\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\big\| + \big\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\big\|\big)$$

следует, что последовательные приближения $\{\gamma_i^n\}$, $i = 1,2$, сходятся к непрерывному решению системы (48) на Γ_{T_2}.

В силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши на Γ_{T_2} справедливы оценки:

$$|\gamma_i| \leqslant 2.5C_\varphi, \quad i = 1, 2.$$

В силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши, по той же схеме, как в [2], доказывается существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (48). Следовательно,

$$\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так же, как в [4], устанавливается, что при всех t и x на Ω_T справедливы оценки:

$$\|u\| \leqslant C_\varphi + TC_f, \quad \|v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{50}$$

Из (48) в силу условий на коэффициенты, свободные члены, на начальные функции задачи Коши получаем, что $\gamma_1 \geqslant 0$, $\gamma_2 \leqslant 0$ на Γ_T и справедливы оценки:

$$\|\gamma_1\| \leqslant C_\varphi + TC_f, \quad \|\gamma_2\| \leqslant C_\varphi + TC_f.$$

Так как

$$\gamma_1(t,t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_2(t,t,x) = \frac{\partial v}{\partial x},$$

при всех t и x на Ω_T справедливы оценки:

$$\|\partial_x u\| \leqslant C_\varphi + TC_f, \quad \|\partial_x v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{51}$$

По той же схеме, как в [4], получаем при всех t и x оценки:

$$\left|\partial^2_{x^2} u\right| \leqslant E_{11} ch\big(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\,\big) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}}\, sh\big(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\,\big) + C_{12}C_{23}t^2, \tag{52}$$

$$\left|\partial^2_{x^2} v\right| \leqslant E_{21} ch\big(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\,\big) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}}\, sh\big(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\,\big) + C_{21}C_{13}t^2, \tag{53}$$

где E_{11}, E_{21}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{23} — постоянные. Полученные глобальные оценки (50), (51)–(53) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,T]$. Возьмем в качестве начальных значений $u(T_0,x)$, $v(T_0,x)$, используя теорему 1, продлим решение на $[T_0,\,T_1]$. Возьмем в качестве начальных значений $u(T_1,x)$, $v(T_1,x)$, используя теорему 1, продлим решение на промежуток $[T_1,\,T_2]$. В частности, $u(T_k,x), v(T_k,x) \in \overline{C}^{\,2}([0,+\infty))$ допускают оценки:

$$u(T_k,x), v(T_k,x) \in \overline{C}^{\,2}([0,+\infty)), \quad |u(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + TC_f, \quad |v(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + TC_f,$$
$$|\partial_x u(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + TC_f, \quad |\partial_x v(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + TC_f.$$

Для вторых производных справедливы оценки (52), (53), где в качестве t можно взять T. В результате за конечное число шагов решение можно продлить на любой заданный промежуток $[0,T]$.

Единственность решения задачи Коши (1), (2) доказывается с помощью оценок, аналогичных оценкам, которые использовались при доказательстве сходимости последовательных приближений. ▷

Литература

1. *Донцова М. В.* Исследование разрешимости задачи Коши в исходных координатах для системы квазилинейных уравнений // Проблемы мат. анализа.—2020.—№ 103.—С. 91–100.
2. *Донцова М. В.* Разрешимость задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$ // Уфим. мат. журн.—2019.—Т. 11, № 1.—С. 26–38.

3. *Донцова М. В.* Достаточные условия нелокальной разрешимости системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами // Изв. Ин-та матем. и информ. Удмурт. гос. ун-та.—2020.—Т. 55.—С. 60–78. DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-05.
4. *Донцова М. В.* Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов // Журн. Средневолж. мат. о-ва.—2017.—Т. 19, № 4.—С. 23–32. DOI: 10.15507/2079-6900.19.201704.23-32.
5. *Alekseenko S. N., Dontsova M. V., Pelinovsky P. E.* Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument // Applicable Analysis.—2017.—Vol. 96, № 9.—P. 1444–1465. DOI: 10.1080/00036811.2016.1208817.
6. *Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н.* К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Докл. РАН.—2001.—Т. 379, № 1.—С. 16–21.
7. *Донцова М. В.* Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфим. мат. журн.—2014.—Т. 6, № 4.—С. 71–82.

Статья поступила 5 марта 2021 г.

Донцова Марина Владимировна
Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
доцент кафедры дифференциальных уравнений,
математического и численного анализа
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2915-0881

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 3, P. 64–79

SOLVABILITY OF CAUCHY PROBLEM FOR ONE SYSTEM OF FIRST ORDER QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Dontsova, M. V.[1]

[1] National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Dedicated to the 80-th anniversary of Professor Stefan Samko

Abstract. We consider the Cauchy problem for a system of first-order quasilinear differential equations. The solvability of the problem is investigated in the initial coordinates using the additional argument method. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a local solution which has the same smoothness in the independent variable as the initial functions of the Cauchy problem are determined. An existence and uniqueness theorem of a local solution is proved. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a global solution are determined. The proof of the global solvability relies upon global estimates.

Key words: method of an additional argument, Cauchy problem, first-order partial differential equation.

Mathematical Subject Classification (2010): 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05.

For citation: *Dontsova, M. V.* Solvability of Cauchy Problem for One System of First Order Quasilinear Differential Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 64–79 (in Russian). DOI: 10.46698/t8227-2101-5573-p.

References

1. *Dontsova, M. V.* Solvability of the Cauchy Problem for a Quasilinear System in Original Coordinates, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 249, no. 6, pp. 918–928.
2. *Dontsova, M. V.* Solvability of Cauchy Problem for a System of First Order Quasilinear Equations with Right-Hand Sides $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$, *Ufa Mathematical Journal*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 27–41. DOI: 10.13108/2019-11-1-27.
3. *Dontsova, M. V.* Sufficient Conditions of a Nonlocal Solvability for a System of two Quasilinear Equations of the First Order with Constant Terms, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 60–78 (in Russian). DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-05.
4. *Dontsova, M. V.* The Nonlocal Solvability for a System with Constant Terms for the Case of Positive Coefficients, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Journal of the Middle Volga Mathematical Society], 2017, vol. 19, no. 4, pp. 23–32 (in Russian). DOI: 10.15507/2079-6900.19.201704.23-32.
5. *Alekseenko, S. N., Dontsova, M. V., Pelinovsky, P. E.* Global Solutions to the Shallow-Water System with a Method of an Additional Argument, *Applicable Analysis* 2017, vol. 96, no. 9, pp. 1444–1465. DOI: 10.1080/00036811.2016.1208817.
6. *Imanaliev, M. I., Alekseenko, S. N.* To the Question of the Existence of a Smooth Bounded Solution for a system of Two First-Order Nonlinear Partial Differential Equations *Doklady RAN* [Doklady Mathematics], 2001, vol. 379, no. 1, pp. 16–21 (in Russian).
7. *Dontsova, M. V.* Nonlocal Solvability Conditions for Cauchy Problem for a System of First Order Partial Differential Equations with Special Right-Hand Sides, *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 68–80. DOI: 10.13108/2014-6-4-68.

Received March 5, 2021

Marina V. Dontsova
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia,
Associate Professor of the Department of Differential Equations,
Mathematical and Numerical Analysis
E-mail: `dontsowa.marina2011@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2915-0881