

УДК 519.17

DOI 10.46698/y2738-1800-0363-i

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С МАССИВАМИ
ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ И $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ НЕ СУЩЕСТВУЮТ#

А. А. Махнев¹, В. В. Биткина², А. К. Гутнова^{2,3}

¹ Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

² Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46

³ Северо-Кавказский центр математических исследований ВЦ РАН,
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 19,

E-mail: makhnev@imm.uran.ru, bviktoriyav@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com

Аннотация. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 без треугольников, u — вершина графа Γ , $\Delta^i = \Gamma_i(u)$ и $\Sigma^i = \Delta_{2,3}^i$. Тогда Σ^i — регулярный граф без 3-клик степени $k' = k_i - a_i - 1$ на $v' = k_i$ вершинах. Заметим, что для несмежных вершин $y, z \in \Sigma^i$ имеем $\Sigma^i = \{y, z\} \cup \Sigma^i(y) \cup \Sigma^i(z)$. Поэтому для $\mu' = |\Sigma^i(y) \cap \Sigma^i(z)|$ имеем равенство $v' = 2k' + 2 - \mu'$. Отсюда граф Σ является ко-реберно регулярным с параметрами (v', k', μ') . В работе доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ не существует. В статье М. С. Нировой «On distance-regular graphs with $\theta_2 = -1$ » показано, что если существует сильно регулярный граф с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, в котором окрестности вершин являются 7×7 -решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$. М. П. Голубятников заметил, что для дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ граф Γ_2 является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$. С помощью этого результата и вычисления тройных чисел пересечений доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ и $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ не существуют.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, граф без треугольников, тройные числа пересечений.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

Образец цитирования: Махнев А. А., Биткина В. В., Гутнова А. К. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ и $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ не существуют // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 3.—С. 68–76. DOI: 10.46698/y2738-1800-0363-i.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53013. Третий автор поддержан Министерством науки и высшего образования РФ, соглашение №075-02-2021-1552.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d . Для $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) = i$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = t + 1$, то геометрия называется двойственной 2-схемой.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 без треугольников, u — вершина графа Γ , $\Delta^i = \Gamma_i(u)$ и $\Sigma^i = \Delta_{2,3}^i$. Тогда граф Σ^i является кореберно регулярным с параметрами (v', k', μ') , где $v' = k_i$, $k' = k_i - a_i - 1$ и $\mu' = 2k' + 2 - v'$.

Приведем примеры допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов диаметра 3 без треугольников из [1, с. 425–431].

1. $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$ (нечетный граф на 7 точках).
2. $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$ (граф Сильвестра).
3. $\{5, 4, 3; 1, 1, 2\}$ (граф не существует по [2]).
4. $\{6, 5, 2; 1, 1, 3\}$ (граф Перкеля).
5. $\{7, 6, 5; 1, 1, 3\}$ (свернутый 7-куб).
6. $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$.
7. $\{8, 7, 5; 1, 1, 4\}$.
8. $\{11, 10, 4; 1, 1, 5\}$.
9. $\{15, 14, 12; 1, 1, 9\}$ (граф из [1, § 11.4В]).
10. $\{17, 16, 10; 1, 2, 8\}$, $q_{33}^3 = 0$.
11. $\{21, 20, 10; 1, 1, 12\}$.
12. $\{21, 20, 16; 1, 2, 12\}$ (граф смежных классов дважды усеченного бинарного кода Голя).
13. $\{22, 21, 4; 1, 2, 14\}$.
14. $\{22, 21, 20; 1, 2, 6\}$ (граф смежных классов усеченного бинарного кода Голя), $q_{33}^3 = 0$.
15. $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$.
16. $\{25, 24, 9; 1, 1, 20\}$.
17. $\{31, 30, 17; 1, 2, 15\}$.

В работе доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ не существует.

Теорема 1. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ не существует.

В [3] получен следующий результат.

Предложение 1. Если существует сильно регулярный граф с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, в котором окрестности вершин являются 7×7 -решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$.

Следствие 1. Не существует сильно регулярный граф с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, в котором окрестности вершин являются 7×7 -решетками.

М. П. Голубятников заметил, что для дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ граф Γ_2 является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$.

Теорема 2. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ не существует.

Теорема 2 дает другое доказательство несуществования дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$.

В работе используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d . Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ , r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d , то $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что

$$d(w, u_i) = r_i, \quad \left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right] = \left| \left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\} \right|.$$

Числа $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ , $W = d(u, v)$, $U = d(v, w)$, $V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW} \delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW} \delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU} \delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим

$$\sum_{l=1}^d [ljh] = p_{jh}^U - [0jh], \quad \sum_{l=1}^d [ilh] = p_{ih}^V - [i0h], \quad \sum_{l=1}^d [ijl] = p_{ij}^W - [ij0]. \quad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p_{ij}^W = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix} \right].$$

Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \left\{ \begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix} \right\}$, $[ijh] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix} \right]$, $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ihj \end{smallmatrix} \right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ jih \end{smallmatrix} \right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ hji \end{smallmatrix} \right]$. В случаях $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$ или $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ вычисление чисел $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ihj \end{smallmatrix} \right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ jih \end{smallmatrix} \right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ hji \end{smallmatrix} \right]$ (симметризация массива тройных

чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. Граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$. Тогда Γ имеет спектр $7^1, 3^{66}, -1^{77}, -4^{32}, 1 + 7 + 42 + 126 = 176$ вершин и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 66 & 77 & 32 \\ 1 & \frac{198}{7} & -11 & -\frac{128}{7} \\ 1 & \frac{22}{7} & -11 & \frac{48}{7} \\ 1 & -\frac{22}{7} & \frac{11}{3} & -\frac{32}{21} \end{pmatrix}.$$

По [5, лемма 3] граф $\Sigma = \Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{15}(21, 5)$.

Лемма 1. Γ имеет следующие числа пересечений:

- (1) $p_{11}^1 = 0, p_{21}^1 = 6, p_{32}^1 = 36, p_{22}^1 = 0, p_{33}^1 = 90;$
- (2) $p_{11}^2 = 1, p_{12}^2 = 0, p_{13}^2 = 6, p_{22}^2 = 11, p_{23}^2 = 30, p_{33}^2 = 90;$
- (3) $p_{12}^3 = 2, p_{13}^3 = 5, p_{22}^3 = 10, p_{23}^3 = 30, p_{33}^3 = 90.$

◁ Прямые вычисления. ▷

Пусть u, v, w — вершины графа Γ , $\{rst\} = \left\{ \begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix} \right\}$ и $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix} \right]$. Положим $\Sigma = \Gamma_3(u)$ и $\Lambda = \Sigma_3$. Тогда Λ является регулярным графом степени 90 на 126 вершинах.

Лемма 2. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3$ и $d(v, w) = 1$. Тогда тройные числа пересечений равны:

- (1) $[123] = [132] = 2, [133] = 3;$
- (2) $[212] = [221] = 2, [223] = [232] = 8, [233] = 22;$
- (3) $[312] = [321] = 4, [323] = [332] = 26, [333] = 64$

◁ Упрощение формул (+). ▷

По лемме 2 имеем $[333] = 64$.

Лемма 3. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3$ и $d(v, w) = 2$. Тогда тройные числа пересечений равны:

- (1) $[122] = -r_4 + r_6 - 18, [123] = [132] = r_4 - r_6 + 20, [133] = -r_4 + r_6 - 15;$
- (2) $[211] = r_5, [213] = [231] = -r_5 + 2, [222] = r_4, [223] = [232] = -r_4 + 10, [233] = r_4 + r_5 + 18;$
- (3) $[311] = -r_5 + 1, [313] = [331] = r_5 + 4, [322] = -r_6 + 29, [323] = [332] = r_6, [333] = -r_5 - r_6 + 86,$

где $r_4 \in \{0, 1, \dots, 10\}, r_5 \in \{0, 1\}, r_6 \in \{18, 19, \dots, 29\}$.

◁ Упрощение формул (+). ▷

По лемме 3 имеем $56 \leq [333] = -r_5 - r_6 + 86 \leq 68$.

Лемма 4. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$. Тогда тройные числа пересечений равны:

- (1) $[122] = -r_7 + 2, [123] = [132] = r_7, [133] = -r_7 + 5;$
- (2) $[212] = -r_{10} + 2, [213] = r_{10}, [221] = -r_8 + 2, [222] = r_9, [223] = r_8 - r_9 + 8, [231] = r_8, [232] = r_{10} - r_9 + 8, [233] = -r_{10} - r_8 + r_9 + 22;$

(3) $[312] = r_{10}$, $[313] = -r_{10} + 5$, $[321] = r_8$, $[322] = r_7 - r_9 + 8$, $[323] = -r_7 - r_8 + r_9 + 22$,
 $[331] = -r_8 + 5$, $[332] = -r_{10} - r_7 + r_9 + 22$, $[333] = r_{10} + r_7 + r_8 - r_9 + 62$,

где $r_7, r_8, r_{10} \in \{0, 1, 2\}$, $r_9 \in \{0, 1, \dots, 10\}$.

◁ С помощью упрощения формул (+) получим равенства

$$[122] = -r_7 + 2, [123] = [132] = r_7, [133] = -r_7 + 5;$$

$$[212] = -r_{10} + 2, [213] = r_{10}, [221] = -r_8 + 2, [222] = r_9, [223] = r_8 - r_9 + 8, [231] = r_8,$$

$$[232] = r_{10} - r_9 + 8, [233] = -r_{10} - r_8 + r_9 + 22;$$

$$[312] = r_{10}, [313] = -r_{10} + 5, [321] = r_8, [322] = r_7 - r_9 + 8, [323] = -r_7 - r_8 + r_9 + 22,$$

$$[331] = -r_8 + 5, [332] = -r_{10} - r_7 + r_9 + 22, [333] = r_{10} + r_7 + r_8 - r_9 + 62,$$

где $r_7, r_8, r_{10} \in \{0, 1, 2\}$, $r_9 \in \{0, 1, \dots, 10\}$.

Симметризация. Имеем равенства

$$[222] = r_9 = r'_9 = r_9^* = r_{13}^{\sim}, \quad [123] = [132] = r_7 = r'_7, \quad [213] = r_{10} = [231]' = r'_8,$$

$$[213] = [312] = r_{10} = r_{10}^{\sim}, \quad [231] = [321] = r_8 = r_8^*.$$

Далее, $[312] = r_{10} = r_{10}^{\sim}$, поэтому

$$r_{10}^{\sim} = (r_{10}^*)^{\sim} \quad \text{и} \quad [321] = r_8 = [132]^{\sim} = r_7^{\sim}.$$

Аналогично $[231] = [321] = r_8 = r_8^*$, поэтому

$$r_8^* = (r_8^{\sim})^* \quad \text{и} \quad [213] = r_{10} = [132]^* = r_7^*.$$

Лемма доказана. ▷

Теперь $r_7 \leq 2$, $r_9 \leq r_7 + 8 \leq 10$, поэтому

$$52 \leq [333] = r_{10} + r_7 + r_8 - r_9 + 62 \leq 68.$$

Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит $180 - [333]$ вершин, то

$$54 \leq [333] = r_{10} + r_7 + r_8 - r_9 + 62 \leq 68 \quad \text{и} \quad r_9 - r_{10} - r_7 - r_8 \leq 8.$$

Ввиду лемм 2–3 для числа ребер e между $\Lambda(w)$ и $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$ верны неравенства

$$1900 = 5 \cdot 56 + 30 \cdot 54 \leq e = 5 \cdot 68 + 30 \cdot 68 = 2380.$$

С другой стороны, по лемме 4 имеем

$$e = 90 \cdot 89 - \sum_i [333]^i = 90 \cdot 89 - \sum_i (r_{10}^i + r_7^i + r_8^i - r_9^i) - 90 \cdot 62,$$

поэтому

$$1900 \leq e = 2430 - \sum_i (r_{10}^i + r_7^i + r_8^i - r_9^i) \leq 2380, \quad 50 \leq \sum_i (r_{10}^i + r_7^i + r_8^i - r_9^i) \leq 530,$$

$$0.55 \leq \sum_i \frac{r_{10}^i + r_7^i + r_8^i - r_9^i}{90} \leq 5.89.$$

Противоречие с тем, что $8 \leq r_{10} + r_7 + r_8 - r_9$.

Итак, граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ не существует.

Теорема 1 доказана.

3. Граф с массивом пересечений $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$. Тогда Γ имеет спектр $42^1, 9^{32}, 2^{66}, -6^{77}, 1 + 42 + 126 + 7 = 176$ вершин и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 32 & 66 & 77 \\ 1 & \frac{48}{7} & \frac{22}{7} & -11 \\ 1 & -\frac{32}{21} & -\frac{22}{7} & \frac{11}{3} \\ 1 & -\frac{128}{7} & \frac{198}{7} & -11 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. Γ имеет следующие числа пересечений:

- (1) $p_{11}^1 = 11, p_{21}^1 = 30, p_{32}^1 = 6, p_{22}^1 = 90, p_{33}^1 = 1;$
- (2) $p_{11}^2 = 10, p_{12}^2 = 30, p_{13}^2 = 2, p_{22}^2 = 90, p_{23}^2 = 5, p_{33}^2 = 0;$
- (3) $p_{12}^3 = 36, p_{13}^3 = 6, p_{22}^3 = 90, p_{23}^3 = 0, p_{33}^3 = 0.$

◁ Прямые вычисления. ▷

Ввиду леммы 5 граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(176, 126, 90, 90)$ и неглавными собственными значениями $6, -6$. Далее, граф Γ_3 является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ , $\{rst\} = \{rst\}$ и $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$. Положим $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени 90 на 126 вершинах.

Лемма 6. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2$ и $d(v, w) = 1$. Тогда тройные числа пересечений равны:

- (1) $[111] = r_2 + r_3 - 19, [112] = [121] = -r_2 - r_3 + 29, [122] = r_2, [123] = [132] = r_3 + 1, [133] = -r_3 + 1;$
- (2) $[211] = -r_1 - r_2 - r_3 + 30, [212] = [221] = r_1 + r_2 + r_3 - 12, [222] = -r_1 - r_2 + 86, [223] = [232] = -r_3 + 5, [233] = r_3;$
- (3) $[311] = r_1, [312] = [321] = -r_1 + 2, [322] = r_3 + 3,$

где $r_1 \in \{0, 1, 2\}, r_2 \in \{18, 19, \dots, 29\}, r_3 \in \{0, 1\}$.

◁ Упрощение формул (+). ▷

По лемме 6 имеем $56 \leq [222] = -r_1 - r_2 + 86 \leq 68$.

Лемма 7. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2$ и $d(v, w) = 3$. Тогда тройные числа пересечений равны:

- (1) $[112] = [121] = 8, [122] = 22, [113] = [131] = 2;$
- (2) $[212] = [221] = 26, [213] = [231] = 4, [222] = 64;$
- (3) $[312] = [321] = 2, [322] = 3.$

◁ Упрощение формул (+). ▷

По лемме 7 имеем $[222] = 64$.

Лемма 8. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда тройные числа пересечений равны:

- (1) $[111] = r_6 - r_7 + 8, [112] = -r_4 - r_5 + 30, [113] = r_4 + r_5 - r_6 + r_7 - 28, [121] = r_4 - r_6 + r_7, [122] = r_5, [123] = -r_4 - r_5 + r_6 - r_7 + 30, [131] = -r_4 + 2, [132] = r_4;$
- (2) $[211] = r_7, [212] = r_4 + r_5 - r_6, [213] = -r_4 - r_5 + r_6 - r_7 + 30, [221] = -r_4 - r_5 + 30, [222] = -r_5 + r_6 + 84, [223] = r_4 + r_5 - r_6 + r_7 - 25, [231] = r_4, [232] = -r_4 + 5;$

$$(3) [311] = -r_6 + 2, [312] = [321] = r_6, [322] = -r_6 + 5,$$

где $r_4, r_6 \leq 2, r_7 \leq r_6 + 8 \leq 10, 15 \leq r_6 + 25 - r_4 - r_7 \leq r_5 \leq r_4 + 30 \leq 32$.

◁ Упрощение формул (+). ▷

По лемме 8 имеем $54 \leq [222] = -r_5 + r_6 + 84 \leq 73$.

Пусть $d(u, v) = 2$. Ввиду лемм 6, 7 для числа ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ верны неравенства

$$2000 = 30 \cdot 56 + 5 \cdot 64 \leq d \leq 30 \cdot 68 + 5 \cdot 64 = 2360.$$

С другой стороны, по лемме 8 имеем $[222] = -r_5 + r_6 + 84$, поэтому

$$2000 \leq d = 90 \cdot 89 + \sum_i (r_5^i - r_6^i) - 90 \cdot 84 \leq 2360, \quad 17.222 \leq \sum_i \frac{r_5^i - r_6^i}{90} \leq 20.112.$$

Симметризация. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда верны равенства

$$[122] = r_5 = r'_5, \quad [211] = r_7 = r'_7, \quad [131] = -r_4 + 2,$$

поэтому

$$r_4 = r_4^{\sim}, \quad r_4 = [132] = [312]^* = r_6^*, \quad [311] = -r_6 + 2 \quad \text{и} \quad r_6 = r'_6.$$

Далее, $[122] = r_5 = r'_5$ влечет $r_5^* = (r_5^{\sim})'$, поэтому

$$[212] = r_4 + r_5 - r_6 = [221]' = -r'_4 - r'_5 + 30 \quad \text{и} \quad r_4 + r'_4 + 2r_5 = r_6 + 30.$$

Аналогично $[211] = r_7 = r'_7$ влечет $r_7^* = (r_7^{\sim})'$, поэтому

$$[121] = r_4 - r_6 + r_7 = [112]' = -r'_4 - r'_5 + 30 \quad \text{и} \quad r_4 + r'_4 + r_5 + r_7 = r_6 + 30.$$

Сравнивая с $r_4 + r'_4 + 2r_5 = r_6 + 30$, получим $r_5 = r_7$. Противоречие с тем, что $r_7 \leq 10$ и $13 \leq r_5$.

Итак, граф с массивом пересечений $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ не существует.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs.—Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989.
2. Fon Der Flaas D. There exists no distance-regular graph with intersection array $\{5, 4, 3; 1, 1, 2\}$ // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14, № 5.—P. 409–412. DOI: 10.1006/eujc.1993.1045.
3. Нирова М. С. О дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2018.—Т. 24, № 2.—С. 215–228. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-215-228.
4. Coolsaet K., Jurishich A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory. Ser. A.—2008.—Vol. 115, № 6.—P. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. Махнев А. А., Нирова М. С. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Мат. заметки.—2018.—Т. 103, № 5.—С. 730–744. DOI: 10.4213/mzm11503.

Статья поступила 14 декабря 2020 г.

МАХНЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСЕЕВИЧ
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2868-6713>

БИТКИНА ВИКТОРИЯ ВАСИЛЬЕВНА
 Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
 доцент кафедры прикладной математики и информатики
 РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
 E-mail: bviktoriyav@mail.ru

ГУТНОВА АЛИНА КАЗБЕКОВНА
 Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
 доцент кафедры алгебры и анализа
 РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46;
 Северо-Кавказский центр математических исследований ВЦ РАН,
 РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 19
 E-mail: gutnovaalina@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-7467-724X>

Vladikavkaz Mathematical Journal
 2021, Volume 23, Issue 4, P. 68–76

DISTANCE-REGULAR GRAPHS WITH INTERSECTION ARRAYS $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ AND $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ DO NOT EXIST

Makhnev, A. A.¹, Bitkina, V. V.² and Gutnova, A. K.^{2,3}

¹ N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
 16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia;

²North Ossetian State University, 44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

³North Caucasus Center for Mathematical Research,
 19 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: makhnev@imm.uran.ru, bviktoriyav@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com

Abstract. Let Γ be a distance-regular graph of diameter 3 without triangles, u be a vertex of the graph Γ , $\Delta^i = \Gamma_i(u)$ and $\Sigma^i = \Delta_{2,3}^i$. Then Σ^i is a regular graph without 3-cocliques of degree $k' = k_i - a_i - 1$ on $v' = k_i$ vertices. Note that for non-adjacent vertices $y, z \in \Sigma^i$ we have $\Sigma^i = \{y, z\} \cup \Sigma^i(y) \cup \Sigma^i(z)$. Therefore, for $\mu' = |\Sigma^i(y) \cap \Sigma^i(z)|$ we have the equality $v' = 2k' + 2 - \mu'$. Hence the graph Σ is coedge regular with parameters (v', k', μ') . It is proved in the paper that a distance-regular graph with intersection array $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ does not exist. In the article by M. S. Nirova “On distance-regular graphs with $\theta_2 = -1$ ” is proved that if there is a strongly regular graph with parameters $(176, 49, 12, 14)$, in which the neighborhoods of the vertices are 7×7 -lattices, then there also exists a distance-regular graph with intersection array $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$. M. P. Golubyatnikov noticed that for a distance-regular graph Γ with intersection array $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ graph Γ_2 is distance regular with intersection array $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$. With this result and calculations of the triple intersection numbers, it is proved that the distance-regular graphs with intersection arrays $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ and $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ do not exist.

Key words: distance-regular graph, triangle-free graph, triple intersection numbers.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D05.

For citation: Makhnev, A. A., Bitkina, V. V. and Gutnova, A. K. Distance-Regular Graphs with Intersection Arrays $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ and $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ Do not Exist, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 68–76 (in Russian). DOI: 10.46698/y2738-1800-0363-i.

References

1. Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. *Distance-Regular Graphs*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1989.
2. Fon Der Flaas, D. There Exists no Distance-Regular Graph with Intersection Array $\{5, 4, 3; 1, 1, 2\}$, *European Journal of Combinatorics*, 1993, vol. 14, no. 5, pp. 409–412. DOI: 10.1006/eujc.1993.1045.

3. Nirova, M. S. On Distance-Regular Graphs with $\theta_2 = -1$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 212–219 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-215-228.
4. Coolsaet, K. and Jurishich, A. Using Equality in the Krein Conditions to Prove Nonexistence of Certain Distance-Regular Graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 2008, vol. 115, pp. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. Makhnev, A. A. and Nirova, M. S. Distance-Regular Shilla Graphs with $b_2 = c_2$, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 5–6, pp. 780–792. DOI: 10.1134/S0001434618050103.

Received December 14, 2020

ALEXANDER A. MAKHNEV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,

Head of Departament of Algebra and Topology

E-mail: makhnev@imm.uran.ru

<https://orcid.org/0000-0003-2868-6713>

VIKTORIYA V. BITKINA

North Ossetian State University,

44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,

*Associate Professor of the Department
of Applied Mathematics and Informatics*

E-mail: bviktoriyav@mail.ru

ALINA K. GUTNOVA

North Ossetian State University,

44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,

Associate Professor of the Department of Algebra and Analysis;

North Caucasus Center for Mathematical Research,

19 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,

E-mail: gutnovaalina@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-7467-724X>