Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 1, С. 109–120

УДК 517.5
DOI 10.46698/d2512-2100-1282-i

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ СОВМЕСТНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ И ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ГЛАДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Х. М. Хуромонов[1], **М. Ш. Шабозов**[2]

[1] Институт туризма, предпринимательства и сервиса,
Таджикистан, 734055, Душанбе, пр. Борбад, 48/5;
[2] Таджикский национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17

E-mail: `khuromon@mail.ru`, `shabozov@mail.ru`

Аннотация. Рассматривается экстремальная задача отыскания точных констант между наилучшими совместными полиномиальными приближениями аналитических функций и его промежуточных производных в пространстве Бергмана. Пусть $U := \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости, $B_2 := B_2(U)$ — пространство Бергмана функций f, аналитических в круге U, с конечной L_2 нормой; $B_2^{(r)} := B_2^{(r)}(U)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ B_2^{(0)} := B_2)$ — класс функций $f \in B_2$, у которых $f^{(r)} \in B_2$. В работе найдены точные константы в неравенствах типа Джексона — Стечкина для характеристики гладкости $\Lambda_m(f)$, $m \in \mathbb{N}$, определенных при помощи усреднения норм конечных разностей m-го порядка старшей производной функции f, принадлежащей пространству Бергмана B_2. Также решена экстремальная задача наилучшего совместного полиномиальная приближения класса $W_{2,m}^{(r)}(\Phi) := W_2^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ $(m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+)$ функций из $B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, у которой значение характеристики гладкости $\Lambda_m(f)$ ограничено сверху мажорантой Φ, и класса $W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h) := W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi, h)$ $(m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ h \in [0, 2\pi],\ 1 \leqslant p < \infty,\ \varphi$ — весовая на $[0, h]$ функция) из $B_2^{(r)}$, у которого усредненное с заданным весом значение характеристики гладкости $\Lambda_m(f)$ ограничено сверху единицей. Следует отметить, что изложенные в статье результаты являются обобщениями недавно опубликованные результаты второго автора [10] для совместного приближения периодических функций тригонометрическими полиномами на случай совместного приближения аналитических в единичном круге функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Бергмана.

Ключевые слова: неравенства типа Джексона — Стечкина, характеристики гладкости, обобщенный модуль непрерывности, верхние грани, наилучшие совместные полиномиальные приближения пространства Бергмана.

AMS Subject Classification: 30E10.

Образец цитирования: *Хуромонов Х. М., Шабозов М. Ш.* Неравенства типа Джексона — Стечкина между наилучшими совместными полиномиальными приближениями и одной характеристикой гладкости в пространстве Бергмана // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 1.—С. 109–120. DOI: 10.46698/d2512-2100-1282-i.

1. Введение

В работе рассматривается экстремальная задача вычисления точных значений верхних граней наилучших совместных полиномиальных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ функций f в пространстве Берг-

© 2022 Хуромонов Х. М., Шабозов М. Ш.

мана $B_2 := B_2(U)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^2\,d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{$*$}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ — элемент площади.

Отметим, что вопросы аппроксимации функций $f \in B_2$ рассмотрены в монографии [1, гл. III, с. 196–278]. В работах [2–6] изучается задача отыскания точной константы в неравенствах Джексона — Стечкина между величиною наилучшего среднеквадратичного полиномиального приближения функции $f \in B_2$ и обобщенным модулем непрерывности высшего порядка.

В данной работе продолжим наши исследования в этом направлении, пользуясь характеристикой гладкости функций, введенной К. В. Руновским [7].

Указанная характеристика гладкости была использована С. Б. Вакарчуком и В. И. Забутной [8], где также подробно изучены ее свойства.

Приходим к изложению некоторых фактов, используемых нами в дальнейшем. Очевидно норму $f \in B_2$ можно определить и равенством

$$\|f\| := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho\left|f(\rho e^{it})\right|^2\,d\rho\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Символом

$$\|\triangle_h^m(f)\| := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho\left|\triangle_h^m(f;\rho,u;h)\right|^2\,d\rho\,du\right)^{\frac{1}{2}}$$

обозначим норму разности m-го порядка

$$\triangle_h^m(f;\rho,u;h) := \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f\left(\rho e^{i(\tau+kh)}\right)$$

функции $f \in B_2$ по аргументу t в точке τ с шагом h.

Обычный модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in B_2$ определим равенством

$$\omega_m(f,t) := \sup\left\{\|\triangle_h^m(f)\| : \ |h| \leqslant t\right\}. \tag{1}$$

Под усредненной характеристикой гладкости функции $f \in B_2$ будем понимать величину

$$\Lambda_m(f,t) := \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \|\triangle_h^m(f)\|^2\,dh\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что при любом $t > 0$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m(f,t) \leqslant \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^2(f,h)\,dh\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \omega_m(f,t).$$

Пусть $\mathscr{P}_n$ — подпространство комплексных алгебраических полиномов степени n:

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f) := E(f, \mathscr{P}_n)_{B_2} = \inf\{\|f - p_n\| : \ p_n \in \mathscr{P}_n\} \tag{3}$$

называют наилучшим среднеквадратичным полиномиальным приближением функции $f \in B_2$ подпространством $\mathscr{P}_n$. Хорошо известно, что [1]

$$E_{n-1}(f) = \|f - T_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

где

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

— частичная сумма ряда Маклорена функции $f \in B_2$.

Для любых $r \in \mathbb{N}$ через $f^{(r)}(z) := \frac{d^r f}{dz^r}$ обозначим производную r-го порядка функции $f \in B_2$. Так как функция $f \in B_2$ аналитична в круге U, то из разложения f в ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$$

следует, что

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \tag{5}$$

где

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1) = \frac{k!}{(k-r)!}, \quad k \geqslant r, \ k, r \in \mathbb{N},$$

$c_k(f)$ — коэффициенты Маклорена функции f.

Всюду далее положим

$$B_2^{(r)} := \left\{f \in B_2 : \ \left\|z^r f^{(r)}\right\| < \infty\right\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \ B_2^{(0)} \equiv B_2.$$

Пользуясь равенством (5), для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ получаем

$$\triangle_h^m\big(z^r f^{(r)}; \rho, u; h\big) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) \rho^k e^{iku}\big(1 - e^{ikh}\big)^m.$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, после некоторых простых вычислений будем иметь

$$\left\|\triangle_h^m\big(z^r f^{(r)}\big)\right\|^2 = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh)^m.$$

Заметим, что если функция $f \in B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, то легко доказать, что

$$E_{n-1}\big(z^r f^{(r)}\big)_2 := \left\|z^r f^{(r)} - T_{n-1}\big(z^r f^{(r)}\big)\right\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Напомним, что под неравенствами типа Джексона — Стечкина понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую ее характеристику гладкости самой функции или ее производной заданного порядка. Введем следующее обозначение:

$$J_{k,m}^2(t) := \frac{1}{t}\int_0^t (1-\cos kh)^m dh, \quad k,m\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{R}_+. \tag{7}$$

Легко проверить, что

$$J_{k,m}(t) = J_{1,m}(kt). \tag{8}$$

Условимся, в дальнейшем, в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f\in B_2^{(r)}$, предполагать, что $f\notin \mathscr{P}_r$.

Теорема 1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$ и $t\in(0,2\pi]$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(z^r f^{(r)};\frac{t}{n}\big)_2} = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}J_{1,m}(t)}. \tag{9}$$

В частности, из (9) при $t=\pi$ вытекает равенство

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(z^r f^{(r)};\frac{\pi}{n}\big)_2} = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}, \tag{10}$$

где $C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

$\lhd$ Учитывая формулы (7) и (8), для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$ и любого $t\in(0,2\pi]$ получаем

$$\begin{aligned}\Lambda_m^2\big(z^r f^{(r)},t\big)_2 &= \frac{1}{t}\int_0^t \big\|\triangle_h^m\big(z^r f^{(r)},\cdot\big)\big\|^2 dh\\ = \frac{1}{t}\int_0^t \left\{2^m\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}(1-\cos kh)^m dh\right\} &= 2^m\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot J_{1,m}^2(kt).\end{aligned} \tag{11}$$

Оценим величину $\Lambda_m^2(z^r f^{(r)},t)$ снизу посредством наилучшего совместного приближения $E_{n-1}(z^s f^{(s)})$. Имеем

$$\begin{aligned}\Lambda_m^2\big(z^r f^{(r)},t\big)_2 &\geqslant 2^m\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}}\right)^2\cdot\alpha_{k,s}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot J_{1,m}^2(kt)\\ &\geqslant 2^m\min_{k\geqslant n}\left\{\left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}}\right)^2\cdot J_{1,m}^2(ku)\right\}\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{k,s}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\\ &= 2^m\min_{k\geqslant n}\left\{\left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}}\right)^2\cdot J_{1,m}^2(kt)\right\}\cdot E_{n-1}^2\big(z^s f^{(s)}\big)_2.\end{aligned} \tag{12}$$

Покажем, что при любых $k\geqslant n>r\geqslant s$

$$\min_{k\geqslant n}\left\{\left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}}\right)^2\cdot J_{1,m}^2(ku)\right\} = \left(\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\right)^2\cdot J_{1,m}^2(nt). \tag{13}$$

Заметим, что для $k,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих неравенству $k\geqslant n>r\geqslant s$, числа

$$\alpha_{k,r}:=k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)$$
$$=\underbrace{k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}\underbrace{(k-s)(k-s-1)\cdots[(k-s)-(r-s)+1]}$$
$$=\alpha_{k,s}\cdot\alpha_{k-s,r-s}.$$

Пользуясь этим равенством, введем функцию натурального аргумента

$$y(k):=\left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}}\right)^2\cdot J_{1,m}^2(kt)=\alpha_{k-s,r-s}^2\cdot J_{1,m}^2(kt).$$

Покажем, что при $k\geqslant n>r\geqslant s$ функция $y(k)$ является монотонно возрастающей. Для этого, переходя к функции непрерывного аргумента, покажем, что при $x\geqslant n>r\geqslant s$ производная $y'(x)>0$. Имеем:

$$y'(x)=2\alpha_{x-s,r-s}^2\sum_{k=s}^{r-1}\frac{1}{x-k}J_{1,m}^2(xt)+\alpha_{x-s,r-s}^2\cdot\left\{\frac{1}{x}(1-\cos xt)^m-\frac{1}{x^2t}\int\limits_0^{xt}(1-\cos u)^m\,du\right\}$$
$$>\ 2\alpha_{x-s,r-s}^2\sum_{k=s}^{r-1}\frac{1}{x-k}J_{1,m}^2(xt)+\alpha_{x-s,r-s}^2\cdot\frac{1}{x}\Big\{(1-\cos xt)^m-(1-\cos xt)^m\Big\}$$
$$=2\alpha_{x-s,r-s}^2\sum_{k=s}^{r-1}\frac{1}{x-k}J_{1,m}^2(xt)>0,$$

откуда сразу вытекает равенство (13). Учитывая (13), из (12) получаем

$$\Lambda_m^2\big(z^rf^{(r)};t\big)_2\geqslant 2^m\left(\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\right)^2\cdot E_{n-1}^2\big(z^sf^{(s)}\big)_2\cdot J_{1,m}^2(nt).$$

Отсюда вытекает оценка сверху величины в левой части равенства (9):

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(z^rf^{(r)};\frac{t}{n}\big)_2}\leqslant\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}J_{1,m}(t)}.\tag{14}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу указанной экстремальной характеристики введем в рассмотрение функцию $f_0(z)=z^n\in B_2^{(r)}$, $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geqslant s$, для которой в силу равенств (6) и (11) получаем

$$E_{n-1}\left(z^sf_0^{(s)}\right)_2=\frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n+1}},\quad \Lambda_m\left(z^rf_0^{(r)},\frac{t}{n}\right)_2=\frac{2^{\frac{m}{2}}\alpha_{n,r}J_{1,m}(t)}{\sqrt{n+1}}.\tag{15}$$

Пользуясь равенствами (15), запишем оценки снизу указанной величины:

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(z^rf^{(r)};\frac{t}{n}\big)_2}\geqslant\frac{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}E_{n-1}\big(z^sf_0^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(z^rf_0^{(r)};\frac{t}{n}\big)_2}=\frac{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{2^{\frac{m}{2}}\alpha_{n,r}\cdot J_{1,m}(t)}{\sqrt{n+1}}}=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}J_{1,m}(t)}.\tag{16}$$

Сопоставляя оценки сверху (14) с оценкой снизу (16), получаем требуемое равенство (9). Для получения равенства (10) воспользуемся тождеством (см., например, [9, формула 1.320 (1)]):

$$\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{2m}=2^m\,(1-\cos t)^m=C_{2m}^m-2\sum_{k=1}^m(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos kt$$

и формулой (7) при $t=\pi$. Непосредственным вычислением получаем

$$2^{\frac{m}{2}}J_{1,m}(\pi)=\left\{\frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\cos t)^m\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{C_{2m}^m}, \tag{17}$$

откуда и следует равенство (10). $\rhd$

2. Основной результат

Условимся под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию φ не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$ $r\geqslant s$, $1\leqslant p<\infty$ и $h\in(0,2\pi/n]$ — произвольное число, φ — весовая на $[0,h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{2^{\frac{m}{2}}\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p\big(z^rf^{(r)};t\big)_2\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^hJ_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{18}$$

$\lhd$ Из (14) для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$ следует неравенство

$$\Lambda_m\big(z^rf^{(r)},t\big)_2\geqslant2^{\frac{m}{2}}\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\,E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_2\cdot J_{1,m}(nt). \tag{19}$$

Возведем обе части (19) в степень p $(1\leqslant p<\infty)$, умножим на весовую функцию φ и проинтегрируем от 0 до h, где $h\in(0,2\pi/n]$, затем, снова возведя обе части вновь полученного неравенства в степень $\frac{1}{p}$ $(1\leqslant p<\infty)$, получаем

$$\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p\big(z^rf^{(r)},t\big)_2\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant2^{\frac{m}{2}}\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_2\cdot\left(\int\limits_0^hJ_{1,m}^p(nt)\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из последнего неравенство сразу следует оценка сверху экстремальной характеристики из левой части равенства (18):

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{2^{\frac{m}{2}}\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\,E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p\big(z^rf^{(r)};t\big)_2\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}\leqslant\frac{1}{\left(\int\limits_0^hJ_{1,m}^p(nt)\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{20}$$

Учитывая равенства (15), запишем оценку снизу указанной экстремальной характеристики:

$$\begin{aligned}\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{2^{\frac{m}{2}}\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p\big(z^rf^{(r)};t\big)_2\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}&\geqslant\frac{2^{\frac{m}{2}}\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}E_{n-1}\big(z^sf_0^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p\big(z^rf_0^{(r)};t\big)_2\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}\\&=\frac{2^{\frac{m}{2}}\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n+1}}}{2^{\frac{m}{2}}\frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}}\left(\int\limits_0^hJ_{1,m}^p(nt)\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^hJ_{1,m}^p(nt)\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}.\end{aligned} \tag{21}$$

Из сопоставления неравенств (20) и (21) получаем равенство (18), чем и завершаем доказательство теоремы 2. $\rhd$

Из теоремы 2 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 2 *при* $p = 2$, $m = 1$, $h \in (0, 3\pi/4n]$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\, E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^2\big(z^r f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)\, dt\right)^{\frac12}} = \left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)\varphi(t)\, dt\right)^{-\frac12}, \tag{22}$$

где

$$\operatorname{sinc} u := \begin{cases} \frac{\sin u}{u}, & u \neq 0;\\ 1, & u = 0. \end{cases}$$

Следствие 2. *Из* (22) *соответственно при* $\varphi(t) \equiv 1$ *и* $\varphi(t) = t$ *вытекают равенства*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\, E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^2\big(z^r f^{(r)}, t\big)_2\, dt\right)^{\frac12}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{\frac12}, \tag{23}$$

где $Si(x) := \int_0^x \operatorname{sinc} u\, du$ *— интегральный синус;*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\, E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h t\Lambda_1^2\big(z^r f^{(r)}, t\big)_2\, dt\right)^{\frac12}} = \frac{n}{\left\{(nh)^2 - \big(2\sin\big(\frac{nh}{2}\big)\big)^2\right\}^{\frac12}}. \tag{24}$$

Следствие 3. *Если в соотношениях* (23) *и* (24) *полагать* $nh = \pi$, *то соответственно получаем*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\, E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \Lambda_1^2\big(z^r f^{(r)}, t\big)_2\, dt\right)^{\frac12}} = \left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{\frac12},$$

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{n^{-1}\cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\, E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} t\Lambda_1^2\big(z^r f^{(r)}, t\big)_2\, dt\right)^{\frac12}} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2-4}}.$$

3. Некоторые приложения теоремы 2

Пусть Φ — произвольная на $[0, h]$ ($h \in [0, 2\pi]$) возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Символом $W_{2,m}^{(r)}(\Phi) := W_2^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in [0, 2\pi]$ выполняется условие

$$\Lambda_m\big(z^r f^{(r)}, h\big)_2 \leqslant \Phi(h).$$

Пусть $h \in [0, 2\pi]$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant p < \infty$, φ — весовая на $[0, h]$ функция. Символом $W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h) := W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, для которых

$$\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(z^r f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)\, dt \leqslant 1.$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторое множество функций $f \in B_2^{(r)}$, то требуется при любом $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ найти величину

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M})_2 := \sup\Big\{E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_2 : f \in \mathfrak{M}\Big\}. \tag{25}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geqslant s$, $t \in (0, 2\pi/n]$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_{2,m}^{(r)}(\Phi)\right)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} J_{1,m}(nt)} \cdot \Phi(t). \tag{26}$$

В частности, при $t = \frac{\pi}{n}$ из (26) следует, что

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_{2,m}^{(r)}(\Phi)\right)_2 = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{27}$$

$\lhd$ Из равенства (9) для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}\left(z^s f^{(s)}\right)_2 \leqslant \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\Lambda_m\big(z^r f^{(r)}, t\big)_2}{2^{\frac{m}{2}} J_{1,m}(nt)},$$

откуда в предположении, что $f \in B_2^{(r)} \cap W_{2,m}^{(r)}(\Phi)$, получаем оценку сверху

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_{2,m}^{(r)}(\Phi)\right)_2 \leqslant \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\Phi(t)}{2^{\frac{m}{2}} J_{1,m}(nt)}. \tag{28}$$

Для получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение функцию

$$g_0(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\Phi(t)}{2^{\frac{m}{2}} J_{1,m}(nt)} \cdot z^n.$$

Для этой функции при всех $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ имеем

$$z^s g_0^{(s)}(z) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} \cdot \Phi(t)}{2^{\frac{m}{2}} J_{1,m}(nt)} \cdot z^n, \tag{29}$$

$$E_{n-1}(z^s g_0^{(s)})_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\Phi(t)}{2^{\frac{m}{2}} J_{1,m}(nt)}. \tag{30}$$

Из (29) при $s = r$ получим

$$z^r g_0^{(r)}(z) = \frac{\sqrt{n+1} \cdot \Phi(t)}{2^{\frac{m}{2}} J_{1,m}(nt)} \cdot z^n,$$

пользуясь которым в силу (11) получаем

$$\Lambda_m\left(z^r g_0^{(r)}, t\right)_2 = 2^{\frac{m}{2}} \alpha_{n,r} \cdot \frac{J_{1,m}(nt)}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\Phi(t)}{2^{\frac{m}{2}} J_{1,m}(nt)} = \Phi(t),$$

которое означает, что функция $g_0 \in W_{2,m}^{(r)}(\Phi)$. Теперь, пользуясь равенством (30), получаем соответствующую оценку снизу

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_{2,m}^{(r)}(\Phi)\right)_2 \geqslant E_{n-1}\left(z^s g_0^{(s)}\right)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\Phi(t)}{2^{\frac{m}{2}} J_{1,m}(nt)}. \tag{31}$$

Из сравнения неравенств (28) и (31) получаем требуемое равенство (26). Равенство (27) получается при $t = \frac{\pi}{n}$ из (26) в силу равенства (17), чем и завершаем доказательство теоремы 3. $\rhd$

Теорема 4. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geqslant s$, $1 \leqslant p < \infty$, $h \in (0, 2\pi/n]$ — произвольное число, φ — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда при любом $s = 0, 1, \ldots, r$ имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)\right)_2 = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{32}$$

$\lhd$ В самом деле, из неравенства (20) для любой функции $f \in B_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}\left(z^s f^{(s)}\right)_2 \leqslant \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\left(\int_0^h \Lambda_m^p\big(z^r f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

В предположении, что функция $f \in B_2^{(r)} \cap W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)$, из последнего неравенства вытекает

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)\right)_2 \leqslant \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{33}$$

Далее введем в рассмотрение функцию

$$f_1(z) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot z^n,$$

для которой при любом $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geqslant s$ находим

$$z^s f_1^{(s)}(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{p}} z^n,$$

откуда

$$E_{n-1}\left(z^s f_1^{(s)}\right)_2 = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{34}$$

Для функции f_1 в силу равенства (11) имеем

$$\Lambda_m\left(z^r f_1^{(r)}, t\right)_2 = \frac{2^{\frac{m}{2}}\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}} \cdot J_{1,m}(nt) \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{2^{\frac{m}{2}}\alpha_{n,r}} \left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{J_{1,m}(nt)}{\left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^h \Lambda_m^p \left(z^r f_1^{(r)}, t\right)_2 \varphi(t)\,dt = 1.$$

Последнее равенство означает, что $f_1 \in W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)$, а потому, используя (34), запишем оценки снизу

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)} \left(W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)\right)_2 \geqslant E_{n-1}\left(z^s f_1^{(s)}\right)_2 = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{35}$$

Требуемое равенство (32) получаем из сопоставления неравенств (33) и (35), чем и завершаем доказательство теоремы 4. ⊳

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 4. *В условиях теоремы* 4 *при* $p = 2$, $m = 1$, $h \in (0, 3\pi/4n]$ *и соответственно* $\varphi(t) = 1$ *и* $\varphi(t) = t$ *имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)} \left(W_{2,1}^{(r)}(1, h)\right)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)} \left(W_{2,1}^{(r)}(t, h)\right)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{n}{\left\{(nh)^2 - \left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Литература

1. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.—М.–Л.: Наука, 1964.
2. *Абилов В. А., Абилова Ф. В., Керимов М. К.* Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2010.—Т. 50, № 6.—С. 999–1004.
3. *Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С.* Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, № 1.—С. 86–97. DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11400.
4. *Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С.* Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников // Мат. заметки.—2018.—Т. 103, вып. 4.—С. 617–631. DOI: 10.4213/mzm11864.
5. *Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С.* Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. Института математики и механики УрО РАН.—2019.—Т. 25, № 2.—С. 258–272. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-258-272.
6. *Шабозов М. Ш., Хуромонов Х. М.* О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана // Изв. вузов.—2020.—№ 2.—С. 74–92. DOI: 10.26907/0021-3446-2020-2-74-92.
7. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб.—1994.—Т. 185, № 8.—С. 81–102.
8. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Мат. заметки.—2016.—Т. 99, № 2.—С. 215–238. DOI: 10.4213/mzm10506.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений.—М.: Наука, 1971.—1108 с.

Статья поступила 9 марта 2021 г.

Хуромонов Хуромон Мамадамонович
Институт туризма, предпринимательства и сервиса,
старший преподаватель кафедры Математика и информационные технологии в экономике
Таджикистан, 734055, Душанбе, пр. Борбад, 48/5
E-mail: khuromon@mail.ru

Шабозов Мирганд Шабозович
Таджикский национальный университет,
профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудкаи, 17
E-mail: shabozov@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 1, P. 109–120

JACKSON–STECHKIN TYPE INEQUALITIES BETWEEN THE BEST JOINT POLYNOMIALS APPROXIMATION AND A SMOOTHNESS CHARACTERISTIC IN BERGMAN SPACE

Khuromonov, Kh. M.[1] and Shanozov, M. Sh.[2]

[1] Institut of Tourism, Entrepreneurship and Service,
48/5 Borbad Ave., Dushanbe 734055, Tajikistan;
[2] Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,
E-mail: khuromon@mail.ru, shabozov@mail.ru

Abstract. We consider the extremal problem of finding the exact constants between the best joint polynomial approximations of analytic functions and their intermediate derivatives in the Bergman space. Let $U := \{z : |z| < 1\}$ be the unit disc on the complex plane, $B_2 := B_2(U)$ the Bergman space of functions f analytic in the disc with finite L_2 norm; $B_2^{(r)} := B_2^{(r)}(U)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $B_2^{(0)} := B_2$) is a class of functions $f \in B_2$, for which $f^{(r)} \in B_2$. In this paper, exact constants in Jackson–Stechkin type inequalities for $\Lambda_m(f)$, $m \in \mathbb{N}$, the smoothness characteristic determined by averaging the norms of finite differences of the m-th order of the highest derivative of a function f belonging to the Bergman space B_2 are found. Also we solve the extremal problem of the best joint polynomial approximation of the class $W_{2,m}^{(r)}(\Phi) := W_2^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ ($m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$) of functions from $B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, for which the value of the smoothness characteristic $\Lambda_m(f)$ is bounded from above by the majorant Φ and the class $W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h) := W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi, h)$ ($m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in [0, 2\pi]$, $0 < p \leqslant \infty$, φ is a weighted function on $[0, h]$) from B_2, for which the value of the smoothness characteristics of the $\Lambda_m(f)$ averaged with a given weight, is bounded from above by one. It should be noted that the results presented in the article are generalizations of the recently published results of the second author [10] for the joint approximation of periodic functions by trigonometric polynomials to the case of joint approximation of functions analytic in the unit circle by complex algebraic polynomials in the Bergman space.

Key words: Jackson–Stechkin type inequalities, characteristic of smoothness, generalized modulus of continuity, upper bounds, best joint polynomial approximation of Bergman spaces.

AMS Subject Classification: 30E10.

For citation: *Khuromonov, Kh. M. and Shanozov, M. Sh.* Jackson–Stechkin Type Inequalities Between the Best Joint Polynomials Approximation and a Smoothness Characteristic in Bergman Space, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 24, no. 1, pp. 109–120 (in Russian). DOI: 10.46698/d2512-2100-1282-i.

References

1. *Smirnov, V. I. and Lebedev, N. A. Konstruktivnaya teoriya funkczij kompleksnogo peremennogo* [Constructive Theory of Functions of a Complex Variable], Moscow, Nauka, 1964, 750 p. (in Russian).
2. *Abilov, V. A., Abilova, F. V. and Kerimov, M. K.* Sharp Estimates for the Convergence Rate of Fourier Series of Complex Variable Functions in $L_2(D, p(z))$, *Computational Mathematics and Mathematics Physics*, 2010, vol. 50, no. 6, pp. 999–1004 (in Russian).
3. *Shabozov, M. Sh. and Saidusainov, M. S.* Mean-Square Approximation of Complex Variable Functions by Fourier Series in the Weighted Bergman Space, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 1, pp. 86–97 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11400.
4. *Shabozov, M. Sh. and Saidusainov, M. S.* Upper Bounds for the Approximation of Certain Classes of Functions of a Complex Variable by Fourier Series in the Space L_2 and n-Widths, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 4, pp. 617–631 (in Russian). DOI: 10.4213/mzm11864.
5. *Shabozov, M. Sh. and Saidusainov, M. S.* Mean-Square Approximation of Functions of a Complex Variable by Fourier Sums in Orthogonal Systems, *Trudi Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 1–14 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-258-272.
6. *Shabozov, M. Sh. and Khuromonov, Kh. M.* On the Best Approximation in the Mean of Functions of a Complex Variable by Fourier Series in the Bergman Space, *Izvestiya vuzov*, 2020, no. 2, pp. 74–92 (in Russian). DOI: 10.26907/0021-3446-2020-2-74-92.
7. *Runovskiy, K. V.* Approximation by Sets of Linear Polynomial Operators in the L_p, $0 < p < 1$, Space, *Matematicheskiy Sbornik*, 1994, vol. 185, no. 8, pp. 81–102 (in Russian).
8. *Vakarchuk, S. B. and Zabutnaya, V. I.* Inequalities Between the Best Polynomial Approximations and Some Characteristics of Smoothness in the L_2 Space and the Widths of Classes of Functions, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 2, pp. 215–238 (in Russian). DOI: 10.4213/mzm10506.
9. *Gradshtein, I. S. and Rizhik, I. M. Table of Integrals of Sums, Series and Products*, Moscow, Nauka, 1971, 1108 p. (in Russian).

Received March 9, 2021

Khuromon M. Khuromonov
Institute of Tourism, Entrepreneurship and Service,
48/5 Borbad Ave., Dushanbe 734055, Tajikistan,
Senior Lecturer of Department of the Mathematics and Information Technology in Economics
E-mail: khuromon@mail.ru

Mirgand Sh. Shabozov
Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,
Professor of the Department of Functional Analysis and Differential Equations
E-mail: shabozov@mail.ru