

УДК 517.927.2

DOI 10.46698/s6842-7321-6945-1

## РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

С. И. Митрохин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

**Аннотация.** В статье предложена методика вычисления регуляризованного следа для дифференциального оператора с кусочно-гладким потенциалом и многоточечными граничными условиями. Весовая функция дифференциального оператора является разрывной. С помощью метода Наймарка на участках непрерывности потенциала и весовой функции при больших значениях спектрального параметра получена асимптотика решений дифференциальных уравнений, задающих изучаемый оператор. Полученная асимптотика решений позволяет изучить условия «сопряжения» в точке разрыва коэффициентов. Необходимость условий «сопряжения» следует из физических соображений. Изучаемые краевые задачи возникают при изучении колебаний стержней, балок и мостов, составленных из материалов различной плотности. Изучены многоточечные граничные условия, определяющие оператор. Успешно выполнена технически сложная часть исследования — изучена индикаторная диаграмма уравнения, корни которого являются собственными значениями оператора. Вычислена асимптотика собственных значений оператора. С помощью асимптотики собственных значений методом Лидского — Садовниченко вычислен первый регуляризованный след дифференциального оператора.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор, спектральный параметр, многоточечные граничные условия, собственные значения, индикаторная диаграмма, регуляризованный след оператора.

**AMS Subject Classification:** 34B09, 34B10, 34L15, 47A75.

**Образец цитирования:** Митрохин С. И. Регуляризованный след многоточечной краевой задачи с разрывной весовой функцией // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 1.—С. 65–86. DOI: 10.46698/s6842-7321-6945-1.

### 1. Постановка задачи

Изучим спектральные свойства многоточечной краевой задачи с разрывной весовой функцией, задаваемой на отрезке  $[0; \pi]$  дифференциальными уравнениями четвертого порядка

$$y_1^{(4)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^4 y_1(x), \quad 0 \leq x < x_1, \quad a > 0, \quad \frac{2\pi}{3} < x_1 < \pi, \quad (1)$$

$$y_2^{(4)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda b^4 y_2(x), \quad x_1 < x \leq \pi, \quad b > 0, \quad (2)$$

$Q(x) = \begin{cases} q_1(x), & 0 \leq x < x_1, \\ q_2(x), & x_1 < x \leq \pi, \end{cases}$  — потенциал,  $\rho(x) = \begin{cases} a^4, & 0 \leq x < x_1, \\ b^4, & x_1 < x \leq \pi, \end{cases}$  — разрывная весовая функция, с граничными условиями вида

$$y_1(0) = y_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_1\left(\frac{2\pi}{3}\right) = y_2(\pi) = 0, \quad (3)$$

при этом в точке  $x_1$  разрыва коэффициентов требуем выполнения следующих условий «сопряжения»:

$$y_1(x_1 - 0) = y_2(x_1 + 0); \quad \frac{y_1^{(m)}(x_1 - 0)}{a^m} = \frac{y_2^{(m)}(x_1 + 0)}{b^m}, \quad m = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Мы предполагаем, что функции  $q_1(x)$  и  $q_2(x)$  удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$q_1(x) \in C^4[0, x_1]; \quad q_2(x) \in C^4(x_1; \pi]. \quad (5)$$

## 2. Исторический обзор

Спектральные свойства дифференциальных операторов второго и четвертого порядков с разрывной весовой функцией были изучены в работах [1] и [2]. В этих работах была изучена сходимостъ разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов (потенциала и весовой функции). В работе [3] были приведены примеры изоспектральных операторов, у которых множества собственных значений совпадают, а весовые функции различные (и при этом разрывные). В случае изоспектральных операторов обратная задача не имеет единственного решения. Дифференциальные операторы порядка выше четвертого с разрывными весовыми функциями фактически не изучались: с возрастанием порядка оператора сильно возрастает сложность математических выкладок.

Дифференциальные операторы с многоточечными граничными условиями фактически также не изучены. В работе [4] был изучен дифференциальный оператор четвертого порядка с многоточечными граничными условиями, но одна из серий собственных значений была вычислена неправильно (следствие того, что не до конца была исследована индикаторная диаграмма возникающего при изучении уравнения на собственные значения оператора). Мы фактически показываем методику отыскания собственных значений многоточечных краевых задач с помощью индикаторной диаграммы.

Впервые регуляризованный след оператора Штурма — Лиувилля был вычислен в работе [5]. Эта работа дала начало бурному развитию теории вычисления регуляризованных следов дифференциальных операторов (вначале с гладкими коэффициентами). Регуляризованный след для самосопряженных дифференциальных операторов высших порядков (с разделенными и самыми удобными граничными условиями  $y^{(2m)}(0) = y^{(2m)}(\pi) = 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами были вычислены в работе [6]. В работе [7] предложен общий метод вычисления регуляризованных следов дифференциальных операторов в случае регулярного распределения корней функции, которая задает собственные значения оператора (и которая зависит от граничных условий и гладкости коэффициентов).

В работах автора [8] и [9] были впервые вычислены регуляризованные следы для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами. В работе [10] изучен дифференциальный оператор с разрывной кусочно-постоянной весовой функцией и вычислен его след. В работе [11] изучались операторы второго порядка с разрывными весовыми функциями, также были приведены примеры изоспектральных операторов. В работе [12] изучен эффект «расщепления» кратных в главном собственных значений многоточечных краевых задач для дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами.

### 3. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1), (2) при $\lambda \rightarrow \infty$

Пусть  $\lambda = s^4$ ,  $s = \sqrt[4]{\lambda}$ , причем зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой  $\sqrt[4]{1} = +1$ . Обозначим через  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) различные корни четвертой степени из единицы

$$\begin{aligned} \omega_k^4 = 1; \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi i}{4}(k-1)}, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i, \\ \omega_3 = e^{\frac{4\pi i}{4}} = \omega_2^2 = -1, \quad \omega_4 = e^{\frac{6\pi i}{4}} = \omega_2^3 = -i. \end{aligned} \quad (6)$$

Для чисел  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) из (6) справедливы следующие свойства:

$$\sum_{k=1}^4 \omega_k^m = 0, \quad m = 1, 2, 3; \quad \sum_{k=1}^4 \omega_k^m = 4, \quad m = 0, 4; \quad \sum_{k=0}^3 \omega_m^k = 0, \quad m = 2, 3, 4. \quad (7)$$

Методами монографии [13, гл. 2] устанавливаются следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид*

$$y_1(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_{1k} y_{1k}(x, s); \quad y_1^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_{1k} y_{1k}^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, 3, \quad x \in [0, x_1), \quad (8)$$

где  $C_{1k}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) — произвольные постоянные, при этом для фундаментальной системы  $\{y_{1k}(x, s)\}_{k=1}^4$  справедливы следующие асимптотические разложения и оценки:

$$y_{1k}(x, s) = e^{a\omega_k s x} \left[ 1 + \frac{\omega_k A_3(x)}{s^3} + \frac{A_4^0(x)}{s^4} + \underline{O} \left( \frac{e^{|\operatorname{Im}s|ax}}{s^5} \right) \right], \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y_{1k}^{(m)}(x, s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x} \left[ 1 + \frac{\omega_k A_3(x)}{s^3} + \frac{A_4^m(x)}{s^4} + \underline{O} \left( \frac{e^{|\operatorname{Im}s|ax}}{s^5} \right) \right], \\ k = 1, 2, 3, 4, \quad m = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (10)$$

$$A_3(x) = -\frac{1}{4a^3} \int_0^x q_1(t) dt, \quad A_3(0) = 0; \quad A_3'(x) = \frac{-q_1(x)}{4a^3}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} A_4^0(x) = \frac{3q_1(x) - 3q_1(0)}{8a^4}, \quad A_4^1(x) = \frac{q_1(x) - 3q_1(0)}{8a^4}; \quad A_4^2(x) = \frac{-q_1(x) - 3q_1(0)}{8a^4}; \\ A_4^3(x) = \frac{-3q_1(x) - 3q_1(0)}{8a^4}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для коэффициентов асимптотических разложений (9)–(12) справедливы следующие свойства:

$$\sum_{k=0}^3 A_4^k(x) = \sum_{k=0}^3 A_4^k(0) = D_4 = -\frac{3q_1(0)}{2a^4}. \quad (13)$$

Выполняются также следующие начальные условия:

$$A_3(0) = 0; \quad A_4^0(0) = 0; \quad y_{1k}(0, s) = 1; \\ y_{1k}^{(m)}(0, s) = (a\omega_k s)^m \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{A_4^m(0)}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3. \quad (14)$$

**Теорема 2.** *Общее решение дифференциального уравнения (2) имеет вид*

$$y_2(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_{2k} y_{2k}(x, s); \quad y_2^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_{2k} y_{2k}^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, 3, \quad x \in (x_1, \pi], \quad (15)$$

где  $C_{2k}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) — произвольные постоянные, при этом для фундаментальной системы  $\{y_{2k}(x, s)\}_{k=1}^4$  справедливы следующие асимптотические разложения, оценки и свойства:

$$y_{2k}(x, s) = e^{b\omega_k s x} \left[ 1 + \frac{\omega_k B_3(x)}{s^3} + \frac{B_4^0(x)}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|bx}}{s^5}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (16)$$

$$y_{2k}^{(m)}(x, s) = (b\omega_k s)^m e^{b\omega_k s x} \left[ 1 + \frac{\omega_k B_3(x)}{s^3} + \frac{B_4^m(x)}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|bx}}{s^5}\right) \right], \quad (17) \\ k = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3;$$

$$B_3(x) = -\frac{1}{4b^3} \int_{x_1}^x q_2(t) dt, \quad B_3(x_1) = 0; \quad B_3'(x) = \frac{-q_2(x)}{4b^3}; \quad (18)$$

$$B_4^0(x) = \frac{3q_2(x) - 3q_2(x_1)}{8b^4}, \quad B_4^1(x) = \frac{q_2(x) - 3q_2(x_1)}{8b^4}; \quad B_4^2(x) = \frac{-q_2(x) - 3q_2(x_1)}{8b^4}; \quad (19) \\ B_4^3(x) = \frac{-3q_2(x) - 3q_2(x_1)}{8b^4}; \quad B_4^0(x_1) = 0;$$

$$\sum_{k=0}^3 B_4^k(x) = \sum_{k=0}^3 B_4^k(x_1) = \sum_{k=0}^3 B_4^k(\pi) = E_4 = -\frac{3q_2(x_1)}{2b^4}; \quad (20)$$

$$B_3(x_1) = 0; \quad B_4^0(x_1) = 0; \quad y_{2k}(x_1, s) = e^{b\omega_k s x_1};$$

$$y_{2k}^{(m)}(x_1, s) = (b\omega_k s)^m e^{b\omega_k s x_1} \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{B_4^m(x_1)}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right], \quad (21) \\ k = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3.$$

Пусть  $\Delta_{02}(x, s)$  — определитель Вронского фундаментальной системы решений  $\{y_{2k}(x, s)\}_{k=1}^4$  из (16)–(19)

$$\Delta_{02}(x, s) = \det \operatorname{Wr}[y_{21}(x, s), y_{22}(x, s), y_{23}(x, s), y_{24}(x, s)] \\ = \begin{vmatrix} y_{21}(x, s) & y_{22}(x, s) & y_{23}(x, s) & y_{24}(x, s) \\ \frac{y'_{21}(x, s)}{bs} & \frac{y'_{22}(x, s)}{bs} & \frac{y'_{23}(x, s)}{bs} & \frac{y'_{24}(x, s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{21}^{(3)}(x, s)}{(bs)^3} & \frac{y_{22}^{(3)}(x, s)}{(bs)^3} & \frac{y_{23}^{(3)}(x, s)}{(bs)^3} & \frac{y_{24}^{(3)}(x, s)}{(bs)^3} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Обозначим через  $\Delta_{00}$  определитель Вандермонда чисел  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) из (6):

$$\begin{aligned} \Delta_{00} &= \det \text{Wandermound}'s(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \omega_4^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 & \omega_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k>m; \\ k,m=1,2,3,4}} (\omega_k - \omega_m) = -16i \neq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда матрица  $(\delta_{km})$  ( $k, m = 1, 2, 3, 4$ ) алгебраических миноров к элементам  $b_{km}$  определителя  $\Delta_{00}$  из (23) имеет следующий вид:

$$(\delta_{km}) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \dots & \delta_{44} \end{pmatrix} = \frac{\Delta_{00}}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -\omega_1^{-1} & \omega_2^{-1} & -\omega_3^{-1} & \omega_4^{-1} \\ \omega_1^{-2} & -\omega_2^{-2} & \omega_3^{-2} & -\omega_4^{-2} \\ -\omega_1^{-3} & \omega_2^{-3} & -\omega_3^{-3} & \omega_4^{-3} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Аналогичное свойство матрицы  $(\delta_{km})$  для определителя Вандермонда шестого порядка доказано автором в работе [14].

Подставляя формулы (16)–(20) в (22), раскладывая определитель  $\Delta_{02}(x, s)$  на сумму определителей по столбцам и используя другие свойства определителей, применяя формулы (23), (24), выводим

$$\Delta_{02}(x, s) = \Delta_{02}(s) = \Delta_{02}(x_1, s) = \Delta_{00} \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{E_4}{s^4} + \underline{Q} \left( \frac{1}{s^5} \right) \right] \neq 0, \quad (25)$$

т. е. видим, что  $\Delta_{02}(x, s) = \Delta_{02}(s)$  не зависит от  $x$  (это известное свойство линейных дифференциальных уравнений вида (2)),  $\Delta_{02}(x, s)$  не равен нулю, это подтверждает справедливость асимптотических формул (16)–(21).

Для определителя Вронского  $\Delta_{01}(x, s)$  фундаментальной системы решений  $\{y_{1k}(x, s)\}_{k=1}^4$  дифференциального уравнения (1) справедлива аналогичная формула

$$\begin{aligned} \Delta_{01}(x, s) &= \det \text{Wr} \left[ y_{11}(x, s); y_{12}(x, s); y_{13}(x, s); y_{14}(x, s) \right] \\ &= \Delta_{01}(0, s) = \Delta_{01}(s) = \Delta_{00} \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{D_4}{s^4} + \underline{Q} \left( \frac{1}{s^5} \right) \right] \neq 0, \end{aligned}$$

т. е. он тоже не равен нулю и не зависит от  $x$ .

#### 4. Изучение условий «сопряжения» (4)

Подставляя формулы (9)–(12) и (16)–(20) в условия «сопряжения» (4), имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(x_1 + 0, s) \stackrel{(4)}{=} y_1(x_1 - 0, s) \iff \sum_{k=1}^4 C_{21} y_{2k}(x_1 + 0, s) \\ \hspace{15em} = \sum_{k=1}^4 C_{1k} y_{1k}(x_1 - 0, s); \\ \frac{y_2^{(m)}(x_1+0,s)}{(bs)^m} \stackrel{(4)}{=} \frac{y_1^{(m)}(x_1-0,s)}{(as)^m} \iff \sum_{k=1}^4 C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x_1+0,s)}{(bs)^m} = \sum_{k=1}^4 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m)}(x_1-0,s)}{(as)^m}, \\ m = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (26)$$

Система (26) — система из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными  $C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}$  (при этом  $C_{1k}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) — параметры), определитель которой не равен нулю, поэтому по методу Крамера она имеет единственное решение

$$C_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(x_1, s) \neq 0}; \quad C_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(x_1, s)}; \quad C_{23} = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{02}(x_1, s)}; \quad C_{24} = \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{02}(x_1, s)}, \quad (27)$$

при этом определители  $\Delta_{2k}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) получаются из определителя  $\Delta_{02}(x_1, s)$  из (22) заменой  $k$ -го столбца на столбец

$$\left( \sum_{k=1}^4 C_{1k} y_{1k}(x_1 - 0, s); \sum_{k=1}^4 C_{1k} \frac{y'_{1k}(x_1 - 0, s)}{as}; \dots; \sum_{k=1}^4 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(3)}(x_1 - 0, s)}{(as)^3} \right)^*. \quad (28)$$

Раскладывая определители  $\Delta_{2k}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) из (27), (28) на сумму определителей по  $k$ -му столбцу, получаем

$$\Delta_{21} = C_{11}\Delta_{211} + C_{12}\Delta_{212} + C_{13}\Delta_{213} + C_{14}\Delta_{214} = \sum_{k=1}^4 C_{1k}\Delta_{21k}, \quad (29)$$

$$\Delta_{22} = \sum_{k=1}^4 C_{1k}\Delta_{22k}; \quad \Delta_{23} = \sum_{k=1}^4 C_{1k}\Delta_{23k}, \quad \Delta_{24} = \sum_{k=1}^4 C_{1k}\Delta_{24k}. \quad (30)$$

Таким образом, для нахождения определителей  $\Delta_{2mk}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) имеем

$$\Delta_{211} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ \frac{y'_{11}}{as} & \frac{y'_{22}}{bs} & \frac{y'_{23}}{bs} & \frac{y'_{24}}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{11}^{(3)}}{(as)^3} & \frac{y_{22}^{(3)}}{(bs)^3} & \frac{y_{23}^{(3)}}{(bs)^3} & \frac{y_{24}^{(3)}}{(bs)^3} \end{vmatrix}_{x_1 \pm 0}; \quad \Delta_{21k} = \begin{vmatrix} y_{1k} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ \frac{y'_{1k}}{as} & \frac{y'_{22}}{bs} & \frac{y'_{23}}{bs} & \frac{y'_{24}}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{1k}^{(3)}}{(as)^3} & \frac{y_{22}^{(3)}}{(bs)^3} & \frac{y_{23}^{(3)}}{(bs)^3} & \frac{y_{24}^{(3)}}{(bs)^3} \end{vmatrix}_{x_1 \pm 0}, \quad (31)$$

$k = 2, 3, 4;$

$$\Delta_{22k} = \begin{vmatrix} y_{21} & y_{1k} & y_{23} & y_{24} \\ \frac{y'_{21}}{bs} & \frac{y'_{1k}}{as} & \frac{y'_{23}}{bs} & \frac{y'_{24}}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{x_1 \pm 0}; \quad \Delta_{23k} = \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{1k} & y_{24} \\ \frac{y'_{21}}{bs} & \frac{y'_{22}}{bs} & \frac{y'_{1k}}{as} & \frac{y'_{24}}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{x_1 \pm 0}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (32)$$

Подставляя в формулу (31) для  $\Delta_{211}$  формулы (16)–(20) и (9)–(12) и применяя свойства определителей, имеем

$$\Delta_{211} = e^{a\omega_1 s x_1} e^{b\omega_2 s x_1} e^{b\omega_3 s x_1} e^{b\omega_4 s x_1} \times \begin{vmatrix} 1 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_3}{s^3} + \frac{A_4^0}{s^4} + \dots \right] & 1 \cdot \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{B_4^0}{s^4} + \dots \right] & u_{13} & u_{14} \\ \omega_1 \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_3}{s^3} + \frac{A_4^1}{s^4} + \dots \right] & \omega_2 \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{B_4^1}{s^4} + \dots \right] & u_{23} & u_{24} \\ \omega_1^2 \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_3}{s^3} + \frac{A_4^2}{s^4} + \dots \right] & \omega_2^2 \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{B_4^2}{s^4} + \dots \right] & u_{33} & u_{34} \\ \omega_1^3 \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_3}{s^3} + \frac{A_4^3}{s^4} + \dots \right] & \omega_2^3 \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{B_4^3}{s^4} + \dots \right] & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix}_{x_1 \pm 0}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{“} + \dots \text{”} &= +\underline{Q} \left( \frac{1}{s^5} \right); \quad u_{k3} = \omega_3^{k-1} \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{B_4^{k-1}}{s^4} + \dots \right]; \\ u_{k4} &= \omega_4^{k-1} \left[ 1 + \frac{0}{s^3} + \frac{B_4^{k-1}}{s^4} + \dots \right], \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (34)$$

Из (33), (34) и формул (7), (23), (24), следует

$$\Delta_{211} = e^{a\omega_1 s x_1} e^{-b\omega_1 s x_1} \left[ \Delta_{00} + \frac{\omega_1 A_3(x_1) \Delta_{00}}{s^3} + \frac{\Delta_{211,4}}{s^4} + \underline{Q} \left( \frac{1}{s^5} \right) \right], \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{211,4} &\stackrel{(24)}{=} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \omega_1^k A_4^k(x_1) \delta_{k+1,1} + \sum_{m=1}^4 (-1)^{m-1} \omega_2^{m-1} \delta_{m2} B_4^{m-1}(x_1) \\ &+ \sum_{m=1}^4 (-1)^m \omega_3^{m-1} \delta_{m3} B_4^{m-1}(x_1) + \sum_{m=1}^4 (-1)^{m-1} \omega_4^{m-1} \delta_{m4} B_4^{m-1}(x_1) \\ &\stackrel{(24)}{=} \frac{\Delta_{00}}{4} \left[ \sum_{k=0}^3 A_4^k(x_1) + 3 \sum_{k=0}^3 B_4^k(x_1) \right] \stackrel{(13),(20)}{=} \frac{\Delta_{00}(D_4 + 3E_4)}{4}; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\Delta_{211} \stackrel{(35),(36)}{=} \Delta_{00} e^{(a\omega_1 - b\omega_1) s x_1} \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_3(x_1)}{s^3} + \frac{D_4 + 3E_4}{4s^4} + \underline{Q} \left( \frac{1}{s^5} \right) \right]. \quad (37)$$

Для вычисления определителя  $\Delta_{21k}$  ( $k = 2, 3, 4$ ) из (31) нужно в  $\Delta_{211}$  из (33) на место первого столбца поставить столбец

$$\begin{aligned} e^{a\omega_k s x_1} \left( 1 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_3(x_1)}{s^3} + \frac{A_4^0}{s^4} + \dots \right]_{x_1=0}; \quad \omega_k \left[ 1 + \frac{\omega_k A_3(x_1)}{s^3} + \frac{A_4^1}{s^4} + \dots \right]_{x_1=0}; \dots; \right. \\ \left. \omega_k^3 \left[ 1 + \frac{\omega_k A_3(x_1)}{s^3} + \frac{A_4^3}{s^4} + \dots \right]_{x_1=0} \right)^*, \end{aligned}$$

затем из первого столбца вычесть  $k$ -й столбец и получившийся определитель разложить по первому столбцу

$$\Delta_{21k} = e^{a\omega_k s x_1} e^{-b\omega_k s x_1} \left[ 0 + \frac{\omega_k A_3(x_1) \cdot 0}{s^3} + \frac{\Delta_{21k,4}}{s^4} + \underline{Q} \left( \frac{1}{s^5} \right) \right], \quad k = 2, 3, 4, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{21k,4} &= \sum_{m=1}^4 (-1)^{m-1} \omega_k^{m-1} \delta_{m1} (A_4^{m-1}(x_1) - B_4^{m-1}(x_1)) \\ &\stackrel{(24)}{=} \frac{\Delta_{00}}{4} \sum_{m=1}^4 A_4^{m-1}(x_1) \left( \frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^{m-1} - \frac{\Delta_{00}}{4} \sum_{m=1}^4 B_4^{m-1}(x_1) \left( \frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^{m-1}, \\ &k = 2, 3, 4, \quad \omega_1 = 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя в формулу (39) формулы (12), (20), учитывая формулы (6), (7), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{21k,4} &= \frac{\Delta_{00}}{4} \frac{1}{8a^4} \left[ (-3)q_1(0) \sum_{n=0}^3 \omega_k^{n-1} + q_1(x_1 - 0) (3 + \omega_k - \omega_k^2 - 3\omega_k^3) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta_{00}}{4} \frac{1}{8b^4} \left[ (-3)q_2(x_1) \sum_{n=0}^3 \omega_k^{n-1} + q_2(x_1 + 0) (3 + \omega_k - \omega_k^2 - 3\omega_k^3) \right] \\ &= -\frac{\Delta_{00}\tilde{H}_k}{8} \Delta\tilde{q}(x_1); \quad \tilde{H}_2 = 1 + i, \quad \tilde{H}_3 = 1, \quad \tilde{H}_4 = 1 - i = \tilde{H}_2, \quad k = 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (40)$$

где введено обозначение  $\Delta\tilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1+0)}{b^4} - \frac{q_1(x_1-0)}{a^4}$  — так называемый «обобщенный скачок» потенциала  $Q(x)$  в точке разрыва  $x_1$ .

Вычисляя аналогично формулам (33)–(40) определители  $\Delta_{2mk}$  ( $m = 2, 3, 4; k = 1, 2, 3, 4$ ) из (32) придем к выводу о справедливости следующего утверждения.

**Теорема 3.** Возникающая при изучении условий «сопряжения» матрица  $\Delta_{2mk}$  ( $m, k = 1, 2, 3, 4$ ) из (27)–(30) имеет следующий вид:

$$\Delta_{2kk} = \Delta_{00} e^{(a\omega_k - b\omega_k)sx_1} \left[ 1 + \frac{\omega_k A_3(x_1)}{s^3} + \frac{H_1}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (41)$$

$$\Delta_{21k} = \Delta_{00} e^{(a\omega_k - b\omega_1)sx_1} \left[ 0 + \frac{0}{s^3} + \frac{H_k}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right], \quad k = 2, 3, 4, \quad (42)$$

$$\Delta_{2mk} = \Delta_{00} e^{(a\omega_k - b\omega_m)sx_1} \left[ 0 + \frac{0}{s^3} + \frac{H_{k-m+1}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right], \quad m, k = 1, 2, 3, 4, \quad m \neq k;$$

$$H_{m\pm 4} = H_m; \quad H_1 = \frac{D_4 + 3E_4}{4}; \quad H_k = -\frac{\tilde{H}_k \Delta\tilde{q}(x_1)}{8}, \quad k = 2, 3, 4;$$

$$\tilde{H}_2 = 1 + i, \quad \tilde{H}_3 = 1, \quad \tilde{H}_4 = 1 - i; \quad \Delta\tilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1 + 0)}{b^4} - \frac{q_2(x_1 - 0)}{a^4}. \quad (43)$$

### 5. Изучение граничных условий (3)

Подставляя формулы (8) в первые три из граничных условий (3), получим

$$y_1\left(\frac{\pi m}{3}, s\right) \stackrel{(3)}{=} 0 \iff \sum_{k=1}^4 C_{1k} y_{1k}\left(\frac{\pi m}{3}, s\right) = 0, \quad m = 0, 1, 2. \quad (44)$$

Из последнего из граничных условий (3) с помощью формул (15) и (27)–(30) получаем

$$\begin{aligned} y_2(\pi, s) \stackrel{(3)}{=} 0 &\iff \sum_{k=1}^4 C_{2k} y_{2k}(\pi, s) = 0 \iff \sum_{k=1}^4 \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s)} y_{2k}(\pi, s) = 0 \\ &\iff \frac{1}{\Delta_{02}(s)} \sum_{k=1}^4 \left( \sum_{n=1}^4 C_{1n} \Delta_{2kn} \right) y_{2k}(\pi, s) = 0 \iff \frac{1}{\Delta_{02}(s)} \sum_{k=1}^4 C_{1k} \phi_{4k}(\pi, s) = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\phi_{4k}(\pi, s) = \sum_{n=1}^4 \Delta_{2nk} y_{2k}(\pi, s), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (46)$$

Применяя формулы (41)–(43) и (16), можно уточнить вид функции  $\phi_{4k}(\pi, s)$  из (46)

$$\begin{aligned} \phi_{41}(\pi, s) &= e^{(a\omega_1 - b\omega_1)sx_1} \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_3(x_1)}{s^3} + \frac{H_1}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] \\ &\times e^{b\omega_1 s\pi} \left[ 1 + \frac{\omega_1 B_3(\pi)}{s^3} + \frac{B_4^0(\pi)}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] + \frac{H_2}{s^4} e^{(a\omega_2 - b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_2 s\pi} \\ &+ e^{(a\omega_3 - b\omega_1)sx_1} \frac{H_3}{s^4} e^{b\omega_3 s\pi} + \frac{H_4}{s^4} e^{(a\omega_4 - b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_4 s\pi} \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \phi_{42}(\pi, s) &= e^{(a\omega_2 - b\omega_2)sx_1} \left[ 1 + \frac{\omega_2 A_3(x_1)}{s^3} + \frac{H_1}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] \\ &\times e^{b\omega_2 s\pi} \left[ 1 + \frac{\omega_2 B_3(\pi)}{s^3} + \frac{B_4^0(\pi)}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] + \frac{H_{12}}{s^4} e^{(a\omega_2 - b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_4 s\pi} \\ &+ \frac{H_{14}}{s^4} e^{(a\omega_2 - b\omega_3)sx_1} e^{b\omega_3 s\pi} + \frac{H_{13}}{s^4} e^{(a\omega_2 - b\omega_4)sx_1} e^{b\omega_4 s\pi} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right); \dots \end{aligned} \quad (48)$$

Введя обозначение  $M = ax_1 + b(\pi - x_1)$ , формулы (47), (48) можно переписать в виде

$$\phi_{41}(\pi, s) = e^{M\omega_1 s} \left[ 1 + \frac{\omega_1 G_3}{s^3} + \frac{G_4}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] + \frac{R_{41}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right),$$

$$G_3 = A_3(x_1) + B_3(\pi); \quad G_4 = H_1 + B_4^0(\pi);$$

$$R_{41} = H_2 e^{(a\omega_2 - b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_2 s\pi} + H_3 e^{(a\omega_3 - b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_3 s\pi} + H_4 e^{(a\omega_4 - b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_4 s\pi}, \quad (49)$$

$$\phi_{42}(\pi, s) = e^{M\omega_2 s} \left[ 1 + \frac{\omega_2 G_3}{s^3} + \frac{G_4}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] + \frac{R_{42}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right),$$

$$R_{42} = H_{12} e^{(a\omega_2 - b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_1 s\pi} + H_{14} e^{(a\omega_2 - b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_3 s\pi} + H_{13} e^{(a\omega_2 - b\omega_4)sx_1} e^{b\omega_4 s\pi}. \quad (50)$$

Однородная система (44)–(46) линейных уравнений относительно неизвестных  $C_{2k}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(5) имеет следующий вид:

$$f(s) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11}(0, s) & y_{12}(0, s) & y_{13}(0, s) & y_{14}(0, s) \\ y_{11}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) & y_{12}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) & y_{13}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) & y_{14}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) \\ y_{11}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) & y_{12}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) & y_{13}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) & y_{14}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) \\ \frac{\phi_{41}(\pi, s)}{\Delta_{00}\Delta_{02}(s)} & \frac{\phi_{42}(\pi, s)}{\Delta_{00}\Delta_{02}(s)} & \frac{\phi_{43}(\pi, s)}{\Delta_{00}\Delta_{02}(s)} & \frac{\phi_{44}(\pi, s)}{\Delta_{00}\Delta_{02}(s)} \end{vmatrix} = 0. \quad (51)$$

Подставляя в уравнение (51) формулы (16), (21), (49), (50), получаем

$$b_{1n} = y_{1n}(0, s) = z^{0\omega_n} = 1;$$

$$b_{2n} = y_{1n}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) = z^{\omega_n} \left[ 1 + \frac{\omega_n A_3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{s^3} + \frac{A_4^0\left(\frac{\pi}{3}\right)}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right];$$

$$b_{3n} = y_{1n}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) = z^{2\omega_n} \left[ 1 + \frac{\omega_n A_3\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{s^3} + \frac{A_4^0\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right];$$

$$b_{4n} = \frac{\phi_{4n}(\pi, s)}{\Delta_{00}\Delta_{02}(s)} = \frac{1}{\Delta_{00}\Delta_{02}(s)} \times \left\{ e^{M\omega_n s} \left[ 1 + \frac{\omega_n G_3}{s^3} + \frac{G_4}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] + \frac{R_{4n}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right\},$$

$$n = 1, 2, 3, 4. \quad (52)$$

Учитывая формулы (52), раскладывая определитель  $f(s)$  из (51) на сумму определителей по столбцам, получаем

$$f(s) = f_0(s) + \frac{f_3(s)}{s^3} + \frac{f_4}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) = 0. \quad (53)$$

Основное приближение этого уравнения имеет вид  $f_0(s) = 0$ , где функция  $f_0(s)$  имеет следующий вид:

$$f_0(s) = \begin{vmatrix} u_{11} = z^{0\omega_1} & u_{12} = z^{0\omega_2} & u_{13} = z^{0\omega_3} & u_{14} = z^{0\omega_4} \\ u_{21} = z^{1\omega_1} & u_{22} = z^{1\omega_2} & u_{23} = z^{1\omega_3} & u_{24} = z^{1\omega_4} \\ u_{31} = z^{2\omega_1} & u_{32} = z^{2\omega_2} & u_{33} = z^{2\omega_3} & u_{34} = z^{2\omega_4} \\ u_{41} = e^{M\omega_1 s} & u_{42} = e^{M\omega_2 s} & u_{43} = e^{M\omega_3 s} & u_{44} = e^{M\omega_4 s} \end{vmatrix}, \quad (54)$$

$$f_0(s) = u_{11}u_{22}u_{33}u_{44} - u_{11}u_{22}u_{34}u_{43} - u_{11}u_{23}u_{32}u_{44} + \dots, \quad (55)$$

$f_0(s) = 0$  — основное приближение,  $z = e^{\frac{\alpha\pi s}{3}}$ .

Для нахождения корней уравнения (53)–(55) необходимо изучить индикаторную диаграмму (см. [15, гл. 12]), т. е. выпуклую оболочку показателей экспонент, входящих в уравнение  $f_0(s) = 0$ . В определитель  $f_0(s)$  из (54), (55) входят 24 слагаемых, изучив показатели экспонент которых приходим к выводу, что индикаторная диаграмма уравнения (53)–(55) имеет следующий вид:

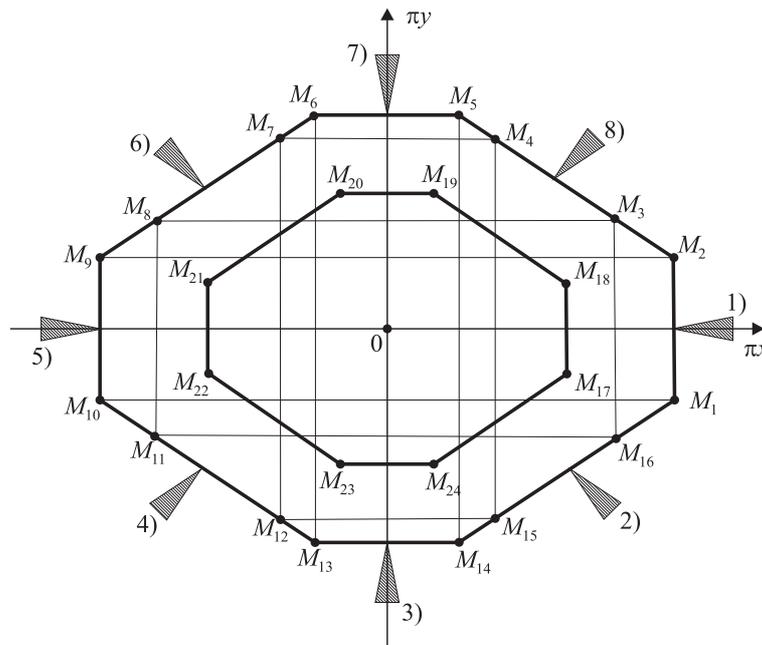


Рис. 1.

Координаты точек  $M_1, M_2, \dots, M_{24}$  задаются следующими формулами ( $M = ax_1 + b(\pi - x_1)$ ):

$$\begin{aligned}
M_1 &\leftrightarrow z(0\omega_3 + 1\omega_2 + 2\omega_4 + M\omega_1) \leftrightarrow u_{13}u_{22}u_{34}u_{41} \leftrightarrow M_1(M, -1); \\
M_2 &\leftrightarrow z(0\omega_3 + 1\omega_4 + 2\omega_2 + M\omega_1) \leftrightarrow u_{13}u_{24}u_{32}u_{41} \leftrightarrow M_2(M, +1); \\
M_3 &\leftrightarrow z(0\omega_4 + 1\omega_3 + 2\omega_2 + M\omega_1) \leftrightarrow u_{14}u_{23}u_{32}u_{41} \leftrightarrow M_3(M - 1, 2); \\
M_4 &\leftrightarrow z(0\omega_3 + 1\omega_4 + 2\omega_1 + M\omega_2) \leftrightarrow u_{13}u_{24}u_{31}u_{42} \leftrightarrow M_4(2, M - 1); \\
M_5 &\leftrightarrow z(0\omega_4 + 1\omega_3 + 2\omega_1 + M\omega_2) \leftrightarrow u_{14}u_{23}u_{31}u_{42} \leftrightarrow M_5(1, M); \\
M_6 &\leftrightarrow z(0\omega_4 + 1\omega_1 + 2\omega_3 + M\omega_2) \leftrightarrow u_{14}u_{21}u_{33}u_{42} \leftrightarrow M_6(-1, M); \\
M_7 &\leftrightarrow z(0\omega_1 + 1\omega_4 + 2\omega_3 + M\omega_2) \leftrightarrow u_{11}u_{24}u_{33}u_{42} \leftrightarrow M_7(-2, M - 1); \dots; \\
M_{16} &\leftrightarrow z(0\omega_2 + 1\omega_3 + 2\omega_4 + M\omega_1) \leftrightarrow u_{12}u_{23}u_{34}u_{41} \leftrightarrow M_{16}(M - 1, -2); \\
M_{17} &\leftrightarrow z(0\omega_2 + 1\omega_4 + 2\omega_3 + M\omega_1) \leftrightarrow u_{12}u_{24}u_{32}u_{41} \leftrightarrow M_{17}(M - 2, -1); \\
M_{18} &\leftrightarrow z(0\omega_4 + 1\omega_2 + 2\omega_3 + M\omega_1) \leftrightarrow u_{14}u_{22}u_{33}u_{41} \leftrightarrow M_{18}(M - 1, 1); \\
M_{19} &\leftrightarrow z(0\omega_3 + 1\omega_1 + 2\omega_4 + M\omega_2) \leftrightarrow u_{13}u_{21}u_{34}u_{42} \leftrightarrow M_{19}(1, M - 2); \dots
\end{aligned} \tag{56}$$

Таким образом, индикаторная диаграмма уравнения (53)–(55) — выпуклый шестнадцатиугольник  $M_1M_2M_3 \dots M_{16}M_1$ , осями симметрии которого являются оси  $Ox$  и  $Oy$ , а также прямые  $y = x$  и  $y = -x$ . Точки  $M_{17}, M_{18}, \dots, M_{24}$  попадают внутрь индикаторной диаграммы и на асимптотику корней уравнения (53)–(55) они не влияют. Корни уравнения (53)–(55) находятся в восьми секторах 1), 2),  $\dots$ , 8) (см. рис. 1) бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам многоугольника  $M_1M_2 \dots M_{16}$ . Для нахождения асимптотики корней уравнения (53)–(55) в секторе 1) ( $\perp [M_1M_2]$ ) в этом уравнении необходимо оставить только экспоненты с показателями, соответствующими точкам  $M_1$  и  $M_2$ ; для нахождения асимптотики корней уравнения (53)–(55) в секторе 2) ( $\perp [M_2M_5]$ ) в этом уравнении необходимо оставить только экспоненты с показателями, соответствующими точкам  $M_2, M_3, M_4, M_5$ , которые находятся на прямой  $y = -x + (1 + M)$ ,  $M = ax_1 + b(\pi - x_1)$ ; сектор 3) соответствует точкам  $M_5$  и  $M_6$ , сектор 4) соответствует точкам  $M_6, M_7, M_8$  и  $M_9; \dots$

### 6. Асимптотика корней уравнения (53)–(55) в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 1

Сектор 1) определяется точками  $M_1$  и  $M_2$  индикаторной диаграммы рис. 1, которые соответствуют слагаемым  $u_{13}u_{22}u_{34}u_{41}$  и  $u_{13}u_{24}u_{32}u_{41}$  (с соответствующими знаками) основного приближения  $f_0(s) = 0$  из (54), (55), значит в уравнении (51), (52) надо оставить соответствующие им слагаемые  $b_{13}b_{22}b_{34}b_{41}$  и  $b_{13}b_{24}b_{32}b_{41}$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(5) в секторе 1) индикаторной диаграммы имеет следующий вид:

$$g_1(s) = b_{13}b_{22}b_{34}b_{41} - b_{13}b_{24}b_{32}b_{41} = b_{13}b_{41} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{24} \\ b_{32} & b_{34} \end{vmatrix} = 0, \tag{57}$$

при этом

$$\begin{aligned}
&b_{13} \stackrel{(52)}{=} y_{13}(0, s) = 1 \neq 0, \\
&b_{41} \stackrel{(52)}{=} e^{M\omega_1 s} \left[ 1 + \frac{\omega_1 G_3}{s^3} + \frac{G_4}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] + \frac{R_{41}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \neq 0.
\end{aligned}$$

Применяя формулы (52), уравнение (57) принимает следующий вид:

$$g_1(s) = \begin{vmatrix} z^{\omega_2} \left[ 1 + \frac{\omega_2 A_3(\frac{\pi}{3})}{s^3} + \frac{A_4^0(\frac{\pi}{3})}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] & z^{\omega_4} \left[ 1 + \frac{\omega_4 A_3(\frac{\pi}{3})}{s^3} + \frac{A_4^0(\frac{\pi}{3})}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] \\ z^{2\omega_2} \left[ 1 + \frac{\omega_2 A_3(\frac{2\pi}{3})}{s^3} + \frac{A_4^0(\frac{2\pi}{3})}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] & z^{2\omega_4} \left[ 1 + \frac{\omega_4 A_3(\frac{2\pi}{3})}{s^3} + \frac{A_4^0(\frac{2\pi}{3})}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] \end{vmatrix} = 0,$$

которое после деления на  $z^{\omega_4} \neq 0$  ( $z = e^{a\frac{\pi}{3}s}$ ) удобно записать следующим образом:

$$g_1(s) = e^{\frac{2a\pi is}{3}} \left[ 1 + \frac{\omega_4 A_3(\frac{\pi}{3}) + \omega_2 A_3(\frac{2\pi}{3})}{s^3} + \frac{P_4}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] - \left[ 1 + \frac{\omega_2 A_3(\frac{\pi}{3}) + \omega_4 A_3(\frac{2\pi}{3})}{s^3} + \frac{P_4}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] = 0, \quad P_4 = A_4^0\left(\frac{\pi}{3}\right) + A_4^0\left(\frac{2\pi}{3}\right). \quad (58)$$

Основное приближение уравнения (58) имеет вид

$$e^{\frac{2a\pi is}{3}} = 1 = e^{2\pi ik} \iff s_{k,1,\text{осн}} = \frac{3k}{a}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 6.** Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(5) в секторе 1) имеет следующий вид:

$$s_{k,1} = \frac{3}{a} \left[ k + \frac{d_{3k,1}}{k^3} + \frac{d_{4k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (59)$$

◁ Применяя формулы Тейлора, имеем

$$e^{\frac{2a\pi is}{3}} \Big|_{s_{k,1}} \stackrel{(59)}{=} \exp \left[ \frac{2a\pi i}{3} \frac{3}{a} \left( k + \frac{d_{3k,1}}{k^3} + \dots \right) \right] = e^{2\pi ik} \left[ 1 + \frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3} + \frac{2\pi i d_{4k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right], \quad e^{2\pi ik} = 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (60)$$

Подставляя формулы (59), (60) в уравнение (58), получаем

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3} + \frac{2\pi i d_{4k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right] \\ & \times \left[ 1 + \frac{a^3 [\omega_4 A_3(\frac{\pi}{3}) + \omega_2 A_3(\frac{2\pi}{3})]}{3^3 k^3} \left( 1 - \frac{3d_{3k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right) + \frac{P_4 a^4}{3^4 k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right] \\ & - \left[ 1 + \frac{a^3 [\omega_2 A_3(\frac{\pi}{3}) + \omega_4 A_3(\frac{2\pi}{3})]}{3^3 k^3} + \frac{P_4 a^4}{3^4 k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

В уравнении (61) при  $k^0$  имеем:  $1 - 1 = 0$  — верно, что символизирует о правильности выбора разложения (59). Приравнивая в (61) коэффициенты при  $k^{-3}$ , получаем

$$d_{3k,1} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{a^3}{3^3} (\omega_2 - \omega_4) \left[ A_3\left(\frac{2\pi}{3}\right) - A_3\left(\frac{\pi}{3}\right) \right],$$

откуда, применяя формулы (6) и (11), находим

$$d_{3k,1} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{a^3 2i}{27} \left( -\frac{1}{4a^3} \right) \left[ \int_0^{\frac{2\pi}{3}} q_1(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{3}} q_1(t) dt \right] = \frac{1}{108\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} q_1(t) dt. \quad (62)$$

Приравнивая в уравнении (61) коэффициенты при  $k^{-4}$ , находим

$$d_{4k,1} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{a^4}{3^4} [P_4 - P_4] = 0 \implies d_{4k,1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (63)$$

Получение формул (62), (63) завершает доказательство теоремы 6: мы доказали, что все коэффициенты  $d_{4k,1}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) формулы (59) находятся единственным образом и привели явные формулы для их вычисления.  $\triangleright$

## 7. Асимптотика собственных значений оператора (1)–(5) в секторе 2) индикаторной диаграммы

Сектор 2) задается точками  $M_2, M_3, M_4, M_5$ , и из (56) следует, что в уравнении (53)–(55) необходимо оставить соответствующие этим точкам слагаемые  $u_{13}u_{24}u_{32}u_{41}$ ,  $u_{14}u_{23}u_{32}u_{41}$ ,  $u_{13}u_{24}u_{31}u_{42}$  и  $u_{14}u_{23}u_{31}u_{42}$  (с соответствующими им знаками), значит в уравнении (50), (51) для сектора 2) необходимо оставить слагаемые  $b_{13}b_{24}b_{32}b_{41}$ ,  $b_{14}b_{23}b_{32}b_{41}$ ,  $b_{13}b_{24}b_{31}b_{42}$  и  $b_{14}b_{23}b_{31}b_{42}$ , оставшиеся слагаемые в секторе 2) будут представлять собой бесконечно малые величины и их можно отбросить.

**Теорема 7.** Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(5) в секторе 2) индикаторной диаграммы (рис. 1) имеет следующий вид:

$$g_2(s) = b_{13}b_{24}b_{32}b_{41} - b_{14}b_{23}b_{32}b_{41} - b_{13}b_{24}b_{31}b_{42} + b_{14}b_{23}b_{31}b_{42} = (-1)g_{2,1}(s)g_{2,2}(s) = 0;$$

$$g_{2,1}(s) = \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix}; \quad g_{2,2}(s) = \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}. \quad (64)$$

Таким образом, для нахождения собственных значений в секторе 2) необходимо решить два уравнения:  $g_{2,1}(s) = 0$  и  $g_{2,2}(s) = 0$ . Точки  $M_2, M_3, M_4, M_5$  лежат на прямой  $y = -x + M + 1$ ,  $M = ax_1 + b(\pi - x_1)$ , и в зависимости от соотношений между параметрами  $a, b$  и  $x_1$  ( $a > b, a < b, b \rightarrow a, x_1 \rightarrow \frac{2\pi}{3}, x_1 \rightarrow \pi$ ) точки  $M_3$  и  $M_4$  могут меняться местами. При  $M = 3$  точки  $M_3$  и  $M_4$  совпадают и в этом случае основное приближение уравнения (64) будет иметь кратные корни, и теоретически возможен эффект «расщепления» кратных в главном собственных значений оператора (1)–(5), изученный автором в работах [12, 16].

Изучим корни уравнения  $g_{2,1}(s) = 0$ , где  $g_{2,1}(s)$  — функция, определенная формулой (64). Применяя формулы (52), имеем

$$\begin{aligned} & g_{2,1}(s) \stackrel{(64)}{=} \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} \\ & = \left| z^{\omega_3} \left[ 1 + \frac{\omega_3 A_3(\frac{\pi}{3})}{s^3} + \frac{A_4^0(\frac{\pi}{3})}{s^4} + \dots \right] z^{\omega_4} \left[ 1 + \frac{\omega_4 A_3(\frac{\pi}{3})}{s^3} + \frac{A_4^0(\frac{\pi}{3})}{s^4} + \dots \right] \right| \\ & = e^{\frac{a\pi(1-i)s}{3}} \left[ 1 + \frac{\omega_4 A_3(\frac{\pi}{3})}{s^3} + \frac{A_4^0(\frac{\pi}{3})}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right] \\ & \quad - \left[ 1 + \frac{\omega_3 A_3(\frac{\pi}{3})}{s^3} + \frac{A_4^0(\frac{\pi}{3})}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Корни уравнения (65) находятся аналогично корням уравнения (58), в результате получаем следующее утверждение.

**Теорема 8.** Асимптотика первой серии собственных значений дифференциального оператора (1)–(5) в секторе 2) имеет следующий вид:

$$s_{k,2,1} = \frac{6i}{a(1-i)} \left[ k + \frac{d_{3k,2,1}}{k^3} + \frac{d_{4k,2,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (66)$$

при этом

$$d_{3k,2,1} = -\frac{a^3(1-i)^3(\omega_4 - \omega_3)A_3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2\pi i 6^3 i^3} \stackrel{(11)}{=} -\frac{1}{432\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} q_1(t) dt, \quad (67)$$

$$d_{4k,2,1} = -\frac{a^4(1-i)^4}{2\pi i 6^4 i^4} \left[ A_4^0\left(\frac{\pi}{3}\right) - A_4^0\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]; \quad d_{4k,2,1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (68)$$

Изучим корни уравнения  $g_{2,2}(s) = 0$ ,

$$\begin{aligned} g_{2,2}(s) &\stackrel{(64)}{=} \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} z^{2\omega_1} \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_3\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{s^3} + \frac{A_4^0\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{s^4} + \dots \right] & z^{2\omega_2} \left[ 1 + \frac{\omega_2 A_3\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{s^3} + \frac{A_4^0\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{s^4} + \dots \right] \\ u_{21}(s) + \frac{R_{41}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) & u_{22}(s) + \frac{R_{42}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \end{vmatrix} \\ &= z^{2(\omega_2 - \omega_1)} e^{M(\omega_1 - \omega_2)s} \left[ 1 + \frac{T_{31}}{s^3} + \frac{T_{41}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] \\ &\quad - \left[ 1 + \frac{T_{32}}{s^3} + \frac{T_{42}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right] + \frac{V_{42}}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) = 0, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} u_{21}(s) &= e^{M\omega_1 s} \left[ 1 + \frac{G_{31}}{s^3} + \frac{G_{41}}{s^4} + \dots \right], \quad u_{22}(s) = e^{M\omega_2 s} \left[ 1 + \frac{G_{32}}{s^3} + \frac{G_{42}}{s^4} + \dots \right], \\ T_{31} &= \omega_2 A_3\left(\frac{2\pi}{3}\right) + G_{31}; \quad T_{32} = \omega_1 A_3\left(\frac{2\pi}{3}\right) + G_{32}; \\ T_{41} &= A_4^0\left(\frac{2\pi}{3}\right) + G_{41}; \quad T_{42} = A_4^0\left(\frac{2\pi}{3}\right) + G_{42}; \\ V_{42} &= z^{2(\omega_2 - \omega_1)} e^{-M\omega_2 s} R_{41} - R_{42} e^{-M\omega_2 s}, \quad z = e^{\frac{a\pi s}{3}}, \end{aligned} \quad (70)$$

величины  $R_{41}$ ,  $R_{42}$  определены формулой (50),

$$\begin{aligned} G_{32} &= \omega_2(A_3(x_1) + B_3(\pi)); \quad G_{31} = \omega_1(A_3(x_1) + B_3(\pi)); \\ G_{41} &= G_{42} = H_1 + B_4^0(\pi), \quad H_1 = \frac{D_4 + 3E_4}{4}. \end{aligned} \quad (71)$$

Основное приближение уравнения (69), (70) имеет вид

$$\begin{aligned} z^{2(\omega_2 - \omega_1)} e^{M(\omega_1 - \omega_2)s} = 1 &\iff e^{M - \frac{2a\pi}{3}(\omega_1 - \omega_2)s} = 1 = e^{2\pi i k}, \\ k \in \mathbb{N} &\iff s_{k,2,2,\text{осн}} = \frac{6\pi i k}{(3M - 2a\pi)(1-i)}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 9.** Асимптотика второй серии собственных значений дифференциального оператора (1)–(5) в секторе 2) индикаторной диаграммы (рис. 1) имеет вид

$$s_{k,2,2} = \frac{6\pi i}{(3M - 2a\pi)(1-i)} \left[ k + \frac{d_{3k,2,2}}{k^3} + \frac{d_{4k,2,2}}{k^4} + O\left(\frac{1}{k^5}\right) \right], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (72)$$

◁ Применяя формулы Тейлора, имеем

$$\begin{aligned} z^{2(\omega_2 - \omega_1)} e^{M(\omega_1 - \omega_2)s} \Big|_{s_{k,2,2}} &= e^{\frac{3M - 2a\pi}{3}(1-i)s} \Big|_{s_{k,2,2}} \\ &= e^{2\pi i k} \left[ 1 + \frac{2\pi i d_{3k,2,2}}{k^3} + \frac{2\pi i d_{4k,2,2}}{k^4} + O\left(\frac{1}{k^5}\right) \right], \quad e^{2\pi i k} = 1. \end{aligned} \quad (73)$$

Подставляя формулы (72), (73) в уравнение (69)–(71), получаем

$$\begin{aligned} &\left[ 1 + \frac{2\pi i d_{3k,2,2}}{k^3} + \frac{2\pi i d_{4k,2,2}}{k^4} + O\left(\frac{1}{k^5}\right) \right] \\ &\times \left[ 1 + \frac{T_{32}(3M - 2a\pi)^3(1-i)^3}{6^3\pi^3 i^3 k^3} + \frac{T_{42}(3M - 2a\pi)^4(1-i)^4}{6^4\pi^4 i^4 k^4} + O\left(\frac{1}{k^5}\right) \right] \\ &- \left[ 1 + \frac{T_{31}(3M - 2a\pi)^3(1-i)^3}{6^3\pi^3 i^3 k^3} + \frac{T_{41}(3M - 2a\pi)^4(1-i)^4}{6^4\pi^4 i^4 k^4} + O\left(\frac{1}{k^5}\right) \right] \\ &+ \frac{(3M - 2a\pi)^4(1-i)^4}{6^4\pi^4 i^4 k^4} \left[ R_{41} e^{-M\omega_2 s} z^{-2(\omega_1 - \omega_2)} - R_{42} e^{-M\omega_2 s} \right] \Big|_{s_{k,2,2}, \text{осн}} + O\left(\frac{1}{k^5}\right) = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Приравнивая в уравнении (74) коэффициенты при  $k^{-3}$ , находим

$$\begin{aligned} d_{3k,2,2} &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{(3M - 2a\pi)^3(1-i)^3 [T_{32} - T_{31}]}{6^3\pi^3 i^3} \\ &= \frac{(-1)(3M - 2a\pi)^3(1-i)^4}{2\pi^4 6^3} \left[ -A_3\left(\frac{2\pi}{3}\right) + A_3(x_1) + B_3(\pi) \right], \end{aligned}$$

откуда, применяя формулы (11) и (18), выводим

$$d_{3k,2,2} = -\frac{(3M - 2a\pi)^3}{432\pi^4} \left[ \frac{1}{a^3} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{x_1} q_1(t) dt + \frac{1}{b^3} \int_{x_1}^{\pi} q_2(t) dt \right]. \quad (75)$$

При  $k^{-4}$  в уравнении (74) имеем

$$\begin{aligned} d_{4k,2,2} &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{(3M - 2a\pi)^4(1-i)^4 [T_{42} - T_{41}]}{6^4\pi^4 i^4} \\ &= \left( -\frac{1}{2\pi i} \right) \frac{(3M - 2a\pi)^4(1-i)^4}{6^4\pi^4 i^4} \left[ R_{41} e^{-M\omega_2 s} z^{-2(\omega_1 - \omega_2)} - R_{42} e^{-M\omega_2 s} \right] \Big|_{s_{k,2,2}, \text{осн}}, \end{aligned}$$

при этом  $T_{42} - T_{41} \stackrel{(70),(71)}{=} 0$ ,  $z = e^{\frac{a\pi s}{3}}$ .

Применяя формулы (50), (70), (71), (40)–(42), из этой формулы находим

$$\begin{aligned} d_{4k,2,2} &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{(3M - 2a\pi)^4(1-i)^4 (-\sqrt{2})\Delta\tilde{q}(x_1)}{6^4\pi^4} \\ &\times \left[ e^{\frac{i\pi}{4}} e^{a\omega_1 x_1 s} e^{-\frac{2(1-i)a\pi s}{3}} e^{-a x_1 \omega_2 s} - e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{b\omega_1 \pi s} e^{-b\omega_1 x_1 s} e^{-b(\pi - x_1)\omega_2 s} \right] \end{aligned}$$

при  $s = s_{k,2,2, \text{осн}} \stackrel{(72)}{=} \frac{6\pi i k}{(3M - 2a\pi)(1-i)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Сделав необходимые преобразования, из этой формулы выводим

$$d_{4k,2,2} = \frac{(-1)^k \sqrt{2} (3M - 2a\pi)^4 \Delta \tilde{q}(x_1)}{2592\pi^5} \sin \left[ \frac{2a\pi - 3ax_1 + 3b(\pi - x_1)}{2a\pi - 3ax_1 - 3b(\pi - x_1)} \pi k - \frac{\pi}{4} \right], \quad (76)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\Delta \tilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1 + 0)}{b^4} - \frac{q_1(x_1 - 0)}{a^4}.$$

## 8. Вычисление первого регуляризованного следа дифференциального оператора (1)–(5)

Изучая аналогичным образом сектора 3), 4), ..., 8) индикаторной диаграммы (рис. 1), приходим к выводу о справедливости следующего утверждения.

**Теорема 10.** *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(5) в секторах 3), 4), ..., 8) индикаторной диаграммы подчиняется следующим законам распределения:*

$$s_{k,3} = s_{k,1} e^{-\frac{2\pi i}{4}}; \quad s_{k,5} = s_{k,3} e^{-\frac{2\pi i}{4}} = s_{k,1} e^{-\frac{4\pi i}{4}}; \quad (77)$$

$$s_{k,7} = s_{k,5} e^{-\frac{2\pi i}{4}} = s_{k,1} e^{-\frac{6\pi i}{4}}; \quad s_{k,2m+1} = s_{k,1} e^{-\frac{2\pi i m}{4}}, \quad m = 0, 1, 2, 3;$$

$$s_{k,4m} = s_{k,2,m} e^{-\frac{2\pi i}{4}}; \dots; s_{k,2n,m} = s_{k,2,m} e^{-\frac{2\pi i(n-1)}{4}}, \quad (78)$$

$$n = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, \quad m = 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

величины  $s_{k,1}$ ,  $s_{k,2,1}$  и  $s_{k,2,2}$  определены формулами (59)–(63), (66)–(68) и (72)–(76). При этом

$$\lambda_{k,2m+1} = s_{k,2m+1}^4; \quad \lambda_{k,2n,p} = s_{k,2n,p}^4, \quad (79)$$

$$m = 0, 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, 3, 4; \quad p = 1, \quad p = 2; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Из формул (59), (63), (66), (68) и (72) имеем

$$s_{k,1}^4 = \frac{81}{a^4} \left[ k^4 + 4d_{3k,1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]; \quad s_{k,2,1}^4 = -\frac{324}{a^4} \left[ k^4 + 4d_{3k,2,1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right];$$

$$s_{k,2,2}^4 = -\frac{324\pi^4}{(3M - 2a\pi)^4} \left[ k^4 + 4d_{3k,2,2} + \frac{4d_{4k,2,2}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right],$$

поэтому ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_{k,1}^4 - \frac{81k^4}{a^4} - \frac{324d_{3k,1}}{a^4} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_{k,2,1}^4 + \frac{324k^4}{a^4} + \frac{1296d_{3k,2,1}}{a^4} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_{k,2,2}^4 + \frac{324\pi^4 k^4}{(3M - 2a\pi)^4} + \frac{1296\pi^4 d_{3k,2,2}}{(3M - 2a\pi)^4} + \frac{1296\pi^4}{(3M - 2a\pi)^4} \frac{d_{4k,2,2}}{k} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

сходятся, и для вычисления регуляризованного следа оператора (1)–(5) необходимо вычислить их суммы. Методика нахождения сумм таких рядов (с некоторыми изменениями) предложена в работах [7] и [17, гл. 5]. При этом, учитывая формулу (76),

видим, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{4k,2,2}}{k} = U_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(\psi\pi k - \frac{\pi}{4})}{k}$  тоже сходится, так как представляет собой сходящийся тригонометрический ряд Фурье, где введены обозначения  $U_0 = \frac{\sqrt{2}(3M-2a\pi)^4}{2592\pi^5} \Delta\tilde{q}(x_1)$ ,  $\psi = \frac{2a\pi-3ax_1+3b(\pi-x_1)}{2a\pi-3ax_1-3b(\pi-x_1)}$ . Справедлива следующая основная теорема.

**Теорема 11.** *Формула первого регуляризованного следа оператора (1)–(5) имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_{k,1} + \lambda_{k,2,1} + \lambda_{k,2,2} + \frac{243k^4}{a^4} + \frac{324\pi^4 k^4}{(3M-2a\pi)^4} \right. \\ & \left. - \frac{324d_{3k,1}}{a^4} + \frac{1296d_{3k,2,1}}{a^4} + \frac{1296\pi^4 d_{3k,2,2}}{(3M-2a\pi)^4} \right] = -\frac{3q_2(\pi)}{2b^4} - \frac{9q_1(0) + 6q_1(\frac{\pi}{3}) + 6q_1(\frac{2\pi}{3})}{2a^4} \\ & - \frac{162d_{3k,1}}{a^4} + \frac{648d_{3k,2,1}}{a^4} + \frac{648\pi^4 d_{3k,2,2}}{(3M-2a\pi)^4} + \frac{\sqrt{2}\Delta\tilde{q}(x_1)}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(\psi\pi k - \frac{\pi}{4})}{k}, \\ & \Delta\tilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1+0)}{b^4} - \frac{q_1(x_1-0)}{a^4}, \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} d_{3k,1} & \stackrel{(62)}{=} \frac{1}{108\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} q_1(t) dt; \quad d_{3k,2,1} \stackrel{(62)}{=} -\frac{1}{432\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} q_1(t) dt; \\ d_{3k,2,2} & \stackrel{(75)}{=} -\frac{(3M-2a\pi)^3}{432\pi^4} \left[ \frac{1}{a^3} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{x_1} q_1(t) dt + \frac{1}{b^3} \int_{x_1}^{\pi} q_2(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

◁ Пользуясь методикой работы [17, гл. 5] и формулами (59)–(63), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{p=0}^3 \left( s_{k,2p+1}^4 - \frac{81k^4}{a^4} - \frac{324d_{3k,1}}{a^4} \right) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{O} \left( \frac{1}{k^2} \right) = \omega_{5,1}^{(1)} - \phi_{5,1}^{(1)}(-4), \quad (82)$$

где

$$\phi_{5,1}^{(1)}(-4) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{p=0}^3 \left( -\frac{81k^4}{a^4} - \frac{324d_{3k,1}}{a^4} \right) \right],$$

эта функция выражается через  $\zeta$ -функцию Римана,  $\omega_{5,1}^{(1)}$  — коэффициенты при  $s^{-5}$  в разложении  $\frac{h_1'(s)}{h_1(s)}$ , где  $\frac{h_1'(s)}{h_1(s)} = \frac{g_1(s)}{\Delta_{01}(s)}$ , где функция  $g_1(s)$  определена формулой (58),  $\Delta_{01}(s)$  выражается формулой (25). Таким образом, имеем

$$\phi_{5,1}^{(1)}(-4) = -\frac{81k^4}{a^4} \zeta(-4) - \frac{324d_{3k,1}}{a^4} \zeta(0) = \frac{162d_{3k,1}}{a^4}, \quad (83)$$

так как  $\zeta(-4) = 0$ ,  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ .

Далее,

$$\frac{h_1'(s)}{h_1(s)} = \left( \frac{g_1(s)}{\Delta_{01}(s)} \right)' : \frac{g_1(s)}{\Delta_{01}(s)} = \frac{g_1'(s)}{g_1(s)} - \frac{\Delta_{01}'(s)}{\Delta_{01}(s)},$$

поэтому  $\omega_{5,1}^{(1)} = \omega_{5,1,1}^{(1)} - \omega_{5,1,2}^{(1)}$ , где  $\omega_{5,1,1}^{(1)}$  и  $\omega_{5,1,2}^{(1)}$  — коэффициенты при  $s^{-5}$  в разложении  $\frac{g_1'(s)}{g_1(s)}$  и  $\frac{\Delta_{01}'(s)}{\Delta_{01}(s)}$  соответственно.

Так как  $\Delta_{01}(s) \stackrel{(25)}{=} \Delta_{00} \left[ 1 + \frac{D_4}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right]$ , то

$$\frac{\Delta'_{01}(s)}{\Delta_{01}(s)} = \left( -\frac{4D_4}{s^5} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^6}\right) \right) \left( 1 - \frac{D_4}{s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^5}\right) \right) = -\frac{4D_4}{s^5} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^6}\right),$$

поэтому  $\omega_{5,1,2}^{(1)} = -4D_4$ ,  $D_4 \stackrel{(13)}{=} -\frac{3q_1(0)}{2a^4}$ .

Из формулы (58) получаем

$$\frac{g'_1(s)}{g_1(s)} = \frac{\frac{2a\pi i}{3} e^{\frac{2a\pi i s}{3}} \left( 1 + \frac{T_3}{s^3} + \dots \right) + e^{\frac{2a\pi i s}{3}} \left[ -\frac{3T_3}{s^4} - \frac{4P_5}{s^5} + \dots \right] + \bar{o}(1)}{e^{\frac{2a\pi i s}{3}} \left[ 1 + \frac{T_3}{s^3} + \dots \right] + \bar{o}(1)},$$

$T_3 = \omega_4 A_4\left(\frac{\pi}{3}\right) + \omega_2 A_3\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ , поэтому  $\omega_{5,1,1}^{(1)} = -4P_4$ . Значит, получим  $\omega_{5,1}^{(1)} = \omega_{5,1,1}^{(1)} - \omega_{5,1,2}^{(1)} = (-4)[P_4 - D_4]$ ,  $P_4 \stackrel{(58)}{=} A_4^0\left(\frac{\pi}{3}\right) + A_4^0\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $D = -\frac{3q_1(0)}{2a^4}$ .

Применяя формулы (12), выводим  $\omega_{5,1}^{(1)} = -\frac{3q_1\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3q_1\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 6q_1(0)}{2a^4}$ , поэтому формулы (82), (83) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_{k,1}^4 - \frac{81k^4}{a^4} - \frac{324d_{3k,1}}{a^4} \right] &= \omega_{5,1}^{(1)} - \phi_{5,1}^{(1)}(-4) \\ &= -\frac{3q_1\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3q_1\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 6q_1(0)}{2a^4} - \frac{162d_{3k,1}}{a^4}, \end{aligned} \quad (84)$$

величины  $d_{3k,1}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) определены формулой (62).

Аналогичным образом в секторе 2) индикаторной диаграммы для первой серии собственных значений из формул (66)–(68) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_{k,2,1}^4 + \frac{324k^4}{a^4} + \frac{1296d_{3k,2,1}}{a^4} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) = \omega_{5,2,1}^{(1)} - \phi_{5,2,1}^{(1)}(-4), \quad (85)$$

где  $\phi_{5,2,1}^{(1)}(-4) = \frac{324}{a^4} \zeta(-4) + \frac{1296d_{3k,2,1}}{a^4} \zeta(0) = -\frac{648d_{3k,2,1}}{a^4}$ , величины  $\omega_{5,2,1}^{(1)}$  — коэффициенты при  $s^{-5}$  в разложении  $\frac{h'_{2,1}(s)}{h_{2,1}(s)}$ ,  $h_{2,1}(s) = \frac{g_{2,1}(s)}{\Delta_{01}(s)}$ , где функция  $g_{2,1}(s)$  определена формулой (65).

Аналогично выводу формул (82)–(84) получаем

$$\begin{aligned} \phi_{5,2,1}^{(1)}(-4) &= \frac{324}{a^4} \zeta(-4) + \frac{1296d_{3k,2,1}}{a^4} \zeta(0) = -\frac{648d_{3k,2,1}}{a^4}; \\ \frac{h'_{2,1}(s)}{h_{2,1}(s)} &= \frac{g'_{2,1}(s)}{g_{2,1}(s)} - \frac{\Delta'_{01}(s)}{\Delta_{01}(s)} \Rightarrow \omega_{5,2,1}^{(1)} = \omega_{5,2,1,1}^{(1)} - \omega_{5,2,1,2}^{(1)}, \end{aligned} \quad (86)$$

величины  $\omega_{5,2,1,1}^{(1)}$  и  $\omega_{5,2,1,2}^{(1)}$  — коэффициенты при  $s^{-5}$  в разложениях  $\frac{g'_{2,1}(s)}{g_{2,1}(s)}$  и  $\frac{\Delta'_{01}(s)}{\Delta_{01}(s)}$  соответственно, поэтому

$$\omega_{5,2,1,2}^{(1)} = \omega_{5,1,2}^{(1)} = -4D_4, \quad D_4 = -\frac{3q_1(0)}{2a^4}, \quad \omega_{5,2,1,1}^{(1)} \stackrel{(65)}{=} (-4)A_4^0\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

значит,

$$\omega_{5,2,1}^{(1)} = (-4) \left[ A_4^0\left(\frac{\pi}{3}\right) - D_4 \right] \stackrel{(12)}{=} -\frac{3q_1\left(\frac{\pi}{3}\right) + 9q_1(0)}{2a^4}. \quad (87)$$

Подставляя формулы (86) и (87) в формулу (85), получаем следующую формулу для формулы следа собственных значений первой серии сектора 2):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_{k,2,1}^4 + \frac{324k^4}{a^4} + \frac{1296d_{3k,2,1}}{a^4} \right] &= \omega_{5,2,1}^{(1)} - \phi_{5,2,1}^{(1)}(-4) \\ &= -\frac{3q_1(\frac{\pi}{3}) + 9q_1(0)}{2a^4} + \frac{648d_{3k,2,1}}{a^4}, \end{aligned} \quad (88)$$

величины  $d_{3k,2,1}$  определены формулой (62).

Для второй серии собственных значений сектора 2) из формулы (72) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_{k,2,2}^4 + \frac{324\pi^4 k^4}{(3M - 2a\pi)^4} + \frac{1296\pi^4 d_{3k,2,2}}{(3M - 2a\pi)^4} + \frac{1296\pi^4}{(3M - 2a\pi)^4} \frac{d_{4k,2,2}}{k} \right] \\ = \sum_{k=1}^{\infty} Q \left( \frac{1}{k^2} \right) = \omega_{5,2,2}^{(1)} - \phi_{5,2,2}^{(1)}(-4), \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \phi_{5,2,2}^{(1)}(-4) &= \frac{324\pi^4}{(3M - 2a\pi)^4} \zeta(-4) + \frac{1296\pi^4 d_{3k,2,2}}{(3M - 2a\pi)^4} \zeta(0) = -\frac{648\pi^4 d_{3k,2,2}}{(3M - 2a\pi)^4}; \\ \omega_{5,2,2}^{(1)} &= \omega_{5,2,2,1}^{(1)} - \omega_{5,2,2,2}^{(1)}, \end{aligned} \quad (90)$$

где  $\omega_{5,2,2,1}^{(1)}$  и  $\omega_{5,2,2,2}^{(1)}$  — коэффициенты при  $s^{-5}$  в разложении функций  $\frac{g'_{2,2}(s)}{g_{2,2}(s)}$  и  $\frac{\Delta'_{02}(s)}{\Delta_{02}(s)}$  соответственно,  $\Delta_{02}(s)$  — определитель Вронского, вычисляемый по формуле (25), поэтому  $\omega_{5,2,2,2}^{(1)} = -4E_4$ ,  $E_4 \stackrel{(20)}{=} -\frac{3q_2(x_1)}{2b^4}$ , функция  $g_{2,2}(s)$  определена формулой (69)–(71), поэтому

$$\omega_{5,2,2,1}^{(1)} = -4T_{41} = (-4)[A_4^0(\frac{2\pi}{3}) + G_{41}] = (-4)[A_4^0(\frac{2\pi}{3}) + B_4^0(\pi) + \frac{D_4 + 3E_4}{4}],$$

значит с помощью формул (12), (13), (19) и (20) находим

$$\begin{aligned} \omega_{5,2,2,1}^{(1)} &= (-4) \left[ \frac{12q_2(x_1)}{8b^4} + \frac{3q_1(\frac{2\pi}{3}) - 3q_1(0)}{8b^4} + \frac{3q_2(\pi) - 3q_2(x_1)}{8b^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-3)q_1(0)}{8a^4} - \frac{9q_2(x_1)}{8b^4} \right] = \frac{6q_1(0) - 3q_1(\frac{2\pi}{3})}{2a^4} - \frac{3q_2(\pi)}{2b^4}. \end{aligned} \quad (91)$$

Подставляя формулы (90), (91) в формулу (90), учтем, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{4k,2,2}}{k}$  в силу формулы (76) представляет собой сходящийся тригонометрический ряд Фурье, выводим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_{k,2,2}^4 + \frac{324\pi^4 k^4}{(3M - 2a\pi)^4} + \frac{1296\pi^4 d_{3k,2,2}}{(3M - 2a\pi)^4} \right] &= \frac{6q_1(0) - 3q_1(\frac{2\pi}{3})}{2a^4} \\ &\quad - \frac{3q_2(\pi)}{2b^4} + \frac{648\pi^4 d_{3k,2,2}}{(3M - 2a\pi)^4} - \frac{1296\pi^4}{(3M - 2a\pi)^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{4k,2,2}}{k}, \end{aligned} \quad (92)$$

где величины  $d_{3k,2,2}$  и  $d_{4k,2,2}$  определены формулами (75) и (76) соответственно.

Складывая суммы рядов (85), (88) и (92), учитывая формулы (78), (79), сделав необходимые преобразования, получим формулы (80), (81), что завершает доказательство теоремы 11.

В случае предельных переходов  $x_1 \rightarrow 0$ ,  $x_1 \rightarrow \pi$ ,  $b \rightarrow a$  или  $q_2(x_1 + 0) \rightarrow q_1(x_1 - 0)$  полученные формулы (80), (81), (72)–(76), (66)–(68) и (59)–(63) переходят в классические формулы для оператора с гладким потенциалом и непрерывной весовой функцией.

### Литература

1. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Мат. заметки.—1977.—Т. 22, № 5.—С. 679–698.
2. Будак А. Б. О разложении по собственным функциям дифференциального оператора 4-го порядка с кусочно-постоянным старшим коэффициентом // Диф. уравнения.—1980.—Т. 16, № 9.—С. 1545–1558.
3. Gottlieb H. P. W. Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients // J. Math. Anal. Appl.—1988.—Vol. 132.—P. 123–137. DOI: 10.1016/0022-247X(88)90048-0.
4. Белабасса Ю. Регуляризованный след многоточечной задачи // Вестн. Московского ун-та. Сер. Математика, механика.—1981.—№ 2.—С. 35–41.
5. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 88, № 4.—С. 593–596.
6. Садовничий В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Мат. сб.—1967.—Т. 72 (114), № 2.—С. 293–317.
7. Лидский В. В., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функцион. анализ и его прил.—1967.—Т. 1, № 2.—С. 52–59.
8. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. Математика. Механика.—1986.—№ 6.—С. 3–6.
9. Митрохин С. И. О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом // Диф. уравнения.—1986.—Т. 22, № 6.—С. 927–931.
10. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // Диф. уравнения.—1992.—Т. 28, № 3.—С. 530–532.
11. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Докл. РАН.—1997.—Т. 356, № 1.—С. 13–15.
12. Митрохин С. И. Многоточечные дифференциальные операторы: «расщепление» кратных в главном собственных значений // Изв. Саратов. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2017.—Т. 17, № 1.—С. 5–18. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-5-18.
13. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969.—528 с.
14. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 6.—С. 31–47.
15. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения.—М.: Мир, 1967.—548 с.
16. Митрохин С. И. Об асимптотике спектра многоточечных дифференциальных операторов с суммируемым потенциалом // Сиб. журн. чист. и прикл. матем.—2017.—Т. 17, № 2.—С. 69–81.
17. Садовничий В. А. Теория операторов.—М.: Дрофа, 2001.—384 с.

*Статья поступила 15 июля 2021 г.*

МИТРОХИН СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ  
 НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,  
 старший научный сотрудник  
 РОССИЯ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1  
 E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

REGULARIZED TRACE OF A MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM  
WITH A DISCONTINUOUS WEIGHT FUNCTIONMitrokhin, S. I.<sup>1</sup><sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University,  
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia  
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

**Abstract.** The article proposes a method for calculating the regularized trace for a differential operator with a piecewise smooth potential and multipoint boundary conditions. The weight function of the differential operator is discontinuous. Using the Naimark method on the sections of the continuity of the potential and the weight function for large values of the spectral parameter, the asymptotics of solutions of differential equations defining the operator under study is obtained. The asymptotics of the solutions enables us to study the conditions of «conjugation» at the point of discontinuity of the coefficients. The necessity of the conditions of «conjugation» follows from physical considerations. The studied boundary value problems arise in the study of vibrations of rods, beams and bridges composed of materials of different densities. The multipoint boundary conditions defining the operator are studied. The technically difficult part of the study was successfully completed — the indicator diagram of the equation whose roots are the eigenvalues of the operator was studied. The asymptotics of the eigenvalues of the operator is calculated. Using the asymptotics of the eigenvalues by the Lidsky–Sadovnichy method, the first regularized trace of the differential operator is calculated.

**Key words:** differential operator, spectral parameter, multipoint boundary conditions, eigenvalues, indicator diagram, regularized trace of the operator.

**AMS Subject Classification:** 34B09, 34B10, 34L15, 47A75.

**For citation:** Mitrokhin, S. I. Regularized Trace of a Multipoint Boundary Value Problem with a Discontinuous Weight Function, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 65–86 (in Russian). DOI: 10.46698/s6842-7321-6945-1.

## References

1. Il'in, V. A. Convergence of Eigenfunction Expansions at Points of Discontinuity of the Coefficients of a Differential Operator, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1977, vol. 22, no. 5, pp. 679–698. DOI: 10.1007/BF01098352.
2. Budak, A. B. Expansion in Eigenfunctions of a Fourth-Order Differential Operator with a Piecewise Constant Leading Coefficient, *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1980, vol. 16, no. 9, pp. 1545–1558 (in Russian).
3. Gottlieb, H. P. W. Iso-Spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, vol. 132, pp. 123–137. DOI: 10.1016/0022-247X(88)90048-0.
4. Belabassi, Yu. Regularized Trace of a Multipoint Problem, *Bulletin of the Moscow University. Ser. Mathematics, Mechanics*, 1981, no. 2, pp. 35–41 (in Russian).
5. Gel'fand, I. M. and Levitan, B. M. On a Simple Identity for the Eigenvalues of a Second-Order Differential Operator, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1953, vol. 88, no. 4, pp. 593–596 (in Russian).
6. Sadovnichy, V. A. The Trace of Ordinary Differential Operators of High Order, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1967, vol. 1 (2), no. 2, pp. 263–288. DOI: 10.1070/SM1967v001n02ABEH001979.
7. Lidskii, V. B. and Sadovnichii, V. A. Regularized Sums of Zeros of a Class of Entire Functions, *Functional Analysis and Its Applications*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 133–139. DOI: 10.1007/BF01076085.
8. Mitrokhin, S. I. Regularized Trace Formulas for Second-Order Differential Operators with Discontinuous Coefficients, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 1986, no. 6, pp. 3–6 (in Russian).
9. Mitrokhin, S. I. Trace Formulas for a Boundary Value Problem with a Functional-Differential Equation with a Discontinuous Coefficient, *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1986, vol. 22, no. 6, pp. 927–931 (in Russian).

10. Mitrokhin, S. I. Spectral Properties of Differential Operators with Discontinuous Coefficients, *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1992, vol. 28, no. 3, pp. 530–532 (in Russian).
11. Mitrokhin, S. I. On Some Spectral Properties of Second-Order Differential Operators with a Discontinuous Weight Function, *Doklady Akademii Nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13–15 (in Russian).
12. Mitrokhin, S. I. Multipoint Differential Operators: «Splitting» of Multiples in the main Eigenvalues, *Izvestiya Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2017, vol. 17, no. 1, pp. 5–8 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-5-18.
13. Naimark, M. A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).
14. Mitrokhin, S. I. Asymptotics of the Eigenvalues of a Differential Operator with an Alternating Weight Function, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 27–42. DOI: 10.3103/s1066369x1806004x.
15. Bellman, R. and Cook, K. L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Moscow, Mir, 1967, 548 p. (in Russian).
16. Mitrokhin, S. I. Asymptotic Behavior of the Spectrum of a Multipoint Differential Operator with an Integrable Potential, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 231, no. 2, pp. 243–254. DOI: 10.1007/s10958-018-3819-8.
17. Sadovnichiy, V. A. *Teoriya operatorov* [Theory of Operators], Moscow, Drofa, 2001, 384 p. (in Russian).

*Received July 15, 2021*

SERGEI I. MITROKHIN  
Lomonosov Moscow State University,  
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia,  
Senior Researcher  
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru