Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 1, С. 87–99

УДК 517.518.82
DOI 10.46698/w0554-1733-2841-u

О СВЯЗИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА И КАНТОРОВИЧА ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО МОДУЛЯ[#]

И. В. Окорочков[1], И. В. Тихонов[2], В. Б. Шерстюков[3]

[1] Московский педагогический государственный университет,
Россия, 107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14;
[2] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1;
[3] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

E-mail: ivan.okorochkov@yandex.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Аннотация. Настоящая работа подготовлена на основе доклада, сделанного авторами в рамках XVI Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения» (Владикавказ, сентябрь 2021 г.). Дается краткий обзор наших недавних результатов о связи полиномов Бернштейна и Канторовича для важного примера — симметричного модуля. Хорошо известно, что подобные негладкие функции играют особую роль в теории аппроксимации. Посредством полученных соотношений исследование полиномов Канторовича удается во многом свести к прямому использованию свойств полиномов Бернштейна. В частности, на основном отрезке $[0,1]$ рассмотрено уклонение полиномов Канторовича от порождающего их симметричного модуля. Помимо весьма точных оценок сверху и снизу отмечена простая асимптотическая формула, действующая для уклонения во всех точках $x \in [0,1]$ при $n \to \infty$. Характер сходимости полиномов Канторовича оказывается принципиально иным по сравнению с тем, что дают на $[0,1]$ полиномы Бернштейна. Приведены также новые результаты о сходимости полиномов Канторовича в комплексной плоскости. Указано точное множество сходимости, совпадающее с множеством сходимости полиномов Бернштейна. Это так называемый компакт Канторовича, ограниченный лемнискатой $|4z(1-z)| = 1$. Всюду на компакте найдена скорость сходимости полиномов Канторовича к соответствующей предельной функции. В связи с лимитированным объемом статьи мы излагаем только схему рассуждений. Подробные доказательства планируется привести отдельно.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, полиномы Канторовича, симметричный модуль, скорость сходимости, оценки уклонения, сходимость в комплексной плоскости.

AMS Subject Classification: 41A10, 30E10, 11B83, 05A10.

Образец цитирования: *Окорочков И. В., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О связи полиномов Бернштейна и Канторовича для симметричного модуля // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 1.—С. 87–99. DOI: 10.46698/w0554-1733-2841-u.

1. Полиномы Бернштейна и полиномы Канторовича

Для функции $f \in C[0,1]$ *полиномы Бернштейна* вводят формулой

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \, z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

[#]Работа подготовлена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

где C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Считаем, что $z \in \mathbb{C}$. Если комплексная переменная попадает на вещественную ось, то z заменяем на x. Основные сведения о полиномах Бернштейна см. в [1–5].

Наряду с полиномами Бернштейна представляют интерес *полиномы Канторовича*

$$K_n(f,z) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(u)\,du \cdot C_n^k\, z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2}$$

вводимые по той же схеме не только для непрерывных, но и для интегрируемых функций на $[0,1]$. Первичная информация о полиномах Канторовича имеется в [1–3].

Для непрерывных порождающих функций $f(x)$ полиномы Бернштейна и Канторовича при $n \to \infty$ сходятся к $f(x)$ равномерно на $[0,1]$. Кроме того, полиномы Канторовича аппроксимируют разрывные $f(x)$ в соответствующих интегральных метриках.

Отметим элементарные факты, связанные с введенными полиномами.

Обратим внимание на нумерацию: по понятным причинам полиномы Бернштейна нумеруются с единицы (см. формулу (1)), т. е. $B_0(f,z)$ не определен. Напротив, полиномы Канторовича естественно нумеруются с нуля (см. формулу (2)), причем $K_0(f,z)$ совпадает с константой $M \equiv \int_0^1 f(u)\,du$. Порядок нумерации всегда оговаривается в последующих формулах. Следует помнить также, что каждый из полиномов $B_n(f,z)$ или $K_n(f,z)$ имеет степень не больше собственного номера.

Укажем стандартную связь между полиномами Бернштейна и Канторовича:

$$K_n(f,z) = B'_{n+1}(F,z), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$ при $x \in [0,1]$. Формула (3) легко выводится и часто используется при изучении полиномов Канторовича.

Прямо из определений находятся граничные значения:

$$B_n(f,0) = f(0), \quad B_n(f,1) = f(1), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

$$K_n(f,0) = (n+1) \int\limits_0^{1/(n+1)} f(u)\,du, \quad K_n(f,1) = (n+1) \int\limits_{n/(n+1)}^{1} f(u)\,du, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5}$$

Тем самым, при $x = 0$ и $x = 1$ характер аппроксимации полиномами Канторовича (в случае общего положения) отличен от того, что дают полиномы Бернштейна.

При интегрировании на $[0,1]$ имеем

$$\int\limits_0^1 B_n(f,x)\,dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$\int\limits_0^1 K_n(f,x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Формула (6) устанавливается прямым вычислением по определению (1) с использованием бета-функции Эйлера. Для вывода (7) достаточно вспомнить про связь (3) с учетом значений $B_{n+1}(F,1) = F(1)$ и $B_{n+1}(F,0) = F(0)$. Разность последних равна интегралу в правой части (7).

Граничные значения (4) и интегральное соотношение (7) можно рассматривать как своеобразные *условия нормировки* для полиномов Бернштейна и полиномов Канторовича соответственно.

Отметим еще *свойство симметрии*: если $f(1-x) = f(x)$ для любого $x \in [0,1]$, то также $B_n(f, 1-z) = B_n(f, z)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $K_n(f, 1-z) = K_n(f, z)$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. При $z = x$, на основном отрезке $[0,1]$, такая симметрия означает четность всех функций относительно точки $x = 1/2$.

Ввиду сравнительно сложной конструкции полиномы Канторовича менее изучены и реже встречаются в литературе. Универсальная формула (3) полезна на качественном уровне, но не слишком выручает в конкретных ситуациях из-за нетривиального сочетания операций «интегрирования–дифференцирования». Разберем особый пример, где свойства полиномов $K_n(f, z)$ напрямую выводятся из свойств полиномов $B_n(f, z)$ без дополнительного перехода вида (3). Предлагаемая схема позволяет выяснить практически все вопросы, связанные с поведением полиномов Канторовича.

2. Случай симметричного модуля

Рассмотрим функцию

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0,1]. \tag{8}$$

Это *простой симметричный модуль* на $[0,1]$. Подобные примеры элементарных непрерывных, но негладких функций играют особую роль в теории аппроксимации. Подробное изучение полиномов Бернштейна для функции (8) проведено в недавних работах [5–7]. Всюду далее в нашей заметке в качестве порождающей функции $f \in C[0,1]$ выбирается именно $f(x) = |2x - 1|$.

Несколько первых полиномов Бернштейна для симметричного модуля имеют вид:

$$B_1(f, z) \equiv 1,$$

$$B_2(f, z) = B_3(f, z) = 1 - 2z + 2z^2,$$

$$B_4(f, z) = B_5(f, z) = 1 - 2z + 4z^3 - 2z^4,$$

$$B_6(f, z) = B_7(f, z) = 1 - 2z + 10z^4 - 12z^5 + 4z^6,$$

$$B_8(f, z) = B_9(f, z) = 1 - 2z + 28z^5 - 56z^6 + 40z^7 - 10z^8.$$

Отметим, что коэффициенты в полиномах $B_n(f, z)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ являются целыми числами (см. [6]). Поскольку функция $f(x) = |2x-1|$ выпукла вниз на $[0,1]$, то по теореме Темпла — Арамэ — Авербах (см. [2, 5]) полиномы Бернштейна сходятся к $f(x)$ монотонно сверху на $(0,1)$. Такая монотонность не является строгой из-за попарных совпадений

$$B_{2m}(f, z) = B_{2m+1}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Это проявление общего *правила склеивания* полиномов Бернштейна для кусочно линейных порождающих функций (см. [5]). Конкретная форма (9) объясняется наличием точки излома $x = 1/2$ у функции $f(x) = |2x - 1|$ (см. также [6]). Тем самым, в дальнейшем можно заменять полиномы $B_{2m}(f, z)$ полиномами $B_{2m+1}(f, z)$ и наоборот. Обратим внимание, что первый полином $B_1(f, z) \equiv 1$ не входит в цепочку (9) и является особым.

Важную роль при изучении полиномов Бернштейна от симметричного модуля играет так называемое *разложение Поповичу*:

$$B_{2m}(f,z)=B_{2m+1}(f,z)=1-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\,2^{-2k}C_{2k}^{k}\,(4z(1-z))^k,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Выделение множителей 2^{-2k} оправдано рядом технических соображений. Например, форма записи (10) сразу показывает сходимость полиномов $B_n(f,z)$ в плоскости $\mathbb{C}$ на компакте, ограниченном лемнискатой $|4z(1-z)|=1$ (см. [5, 8]).

Перейдем к полиномам Канторовича. Для симметричного модуля (8) они, насколько нам известно, прежде не изучались. Прямые вычисления дают первые выражения

$$K_0(f,z)=K_1(f,z)\equiv\frac{1}{2},\quad K_2(f,z)=\frac{2}{3}-z+z^2,\quad K_3(f,z)=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\,z+\frac{3}{2}\,z^2,$$

$$K_4(f,z)=\frac{4}{5}-\frac{8}{5}\,z+\frac{3}{5}\,z^2+2z^3-z^4,\qquad K_5(f,z)=\frac{5}{6}-\frac{5}{3}\,z+\frac{10}{3}\,z^3-\frac{5}{3}\,z^4.$$

Как видно, коэффициенты здесь уже не обязательно целые числа. Аналога правила (9) тоже не наблюдается. Построив графики первых полиномов Канторовича, нетрудно убедиться, что монотонная сходимость к $f(x)=|2x-1|$ на $[0,1]$ отсутствует.

Граничные значения (5) и условие нормировки (7) в данном примере принимают вид

$$K_0(f,0)=K_0(f,1)=\frac{1}{2},\quad K_n(f,0)=K_n(f,1)=\frac{n}{n+1},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

$$\int_0^1 K_n(f,x)\,dx=\frac{1}{2},\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{12}$$

Для сравнения, исходя из формул (4) и (6), получаем

$$B_n(f,0)=B_n(f,1)=1,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

$$\int_0^1 B_1(f,x)\,dx=1,\quad \int_0^1 B_{2m}(f,x)\,dx=\int_0^1 B_{2m+1}(f,x)\,dx=\frac{m+1}{2m+1},\quad m\in\mathbb{N}. \tag{14}$$

Соотношения (13), (14) находятся в определенной двойственности к (11), (12).

Казалось бы, прямая связь между полиномами $B_n(f,z)$ и $K_n(f,z)$ в примере (8) отсутствует. Однако при более детальном изучении вопроса выясняется обратное: полиномы Канторовича можно явно выразить через полиномы Бернштейна. Ключевую роль здесь играет следующее элементарное утверждение.

Лемма 1. *Для функции* (8) *при всех* $m\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$2m\int_{k/(2m)}^{(k+1)/(2m)} f(u)\,du=\frac{2m-1}{2m}\,f\left(\frac{k}{2m-1}\right),\quad k=0,1,\ldots,2m-1, \tag{15}$$

$$(2m+1)\int_{k/(2m+1)}^{(k+1)/(2m+1)} f(u)\,du=\frac{2m}{2m+1}\,f\left(\frac{k}{2m}\right),\quad k=0,\ldots,2m,\ k\neq m, \tag{16}$$

$$(2m+1)\int_{m/(2m+1)}^{(m+1)/(2m+1)} f(u)\,du=\frac{1}{2(2m+1)}. \tag{17}$$

Доказательство леммы не представляет труда: вывод соотношений (15), (16) основан на формуле площади трапеции, а вывод соотношения (17) связан с формулой площади треугольника. В итоге имеем связь локальных усреднений функции (8) с ее же значениями в точках равномерной сетки.

Лемма 1 позволяет быстро установить главный результат работы.

Теорема 1. *Для функции* $f(x) = |2x-1|$, *взятой на отрезке* $[0,1]$, *полиномы Бернштейна и Канторовича связаны соотношениями*

$$K_{2m}(f,z) = \frac{2m}{2m+1}\,B_{2m+1}(f,z) + \frac{1}{2(2m+1)}\,2^{-2m}C_{2m}^{m}(4z(1-z))^{m}, \tag{18}$$

$$K_{2m+1}(f,z) = \frac{2m+1}{2m+2}\,B_{2m+1}(f,z), \tag{19}$$

действующими при всех $m \in \mathbb{N}_0$.

Поясним: в формулах (18), (19) удобно использовать полиномы $B_{2m+1}(f,z)$, так как параметр m изменяется, начиная с нуля. При $m \in \mathbb{N}$ полиномы $B_{2m+1}(f,z)$ можно заменить на $B_{2m}(f,z)$ (см. формулу (9)).

Из теоремы 1 с учетом разложения (10) извлекаем представление

$$K_{2m}(f,z) = \frac{1}{2(2m+1)}\big((2m+1)B_{2m+1}(f,z) + (2m-1)B_{2m-1}(f,z)\big), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

затем рекуррентную формулу

$$K_{2m+1}(f,z) = \frac{1}{m+1}\,\big((2m+1)K_{2m}(f,z) - mK_{2m-1}(f,z)\big), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Для полиномов с четными номерами рекуррентная связь принимает вид:

$$K_{2m+2}(f,z) = \frac{(2m+1)(2m+2)}{2m\,(2m+3)}\,K_{2m}(f,z) - 2^{-2m}C_{2m}^{m}\,(4z(1-z))^{m}\,Q_{2m}(z), \ \ m \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

с множителем

$$Q_{2m}(z) \equiv \frac{1}{2(2m+2)}\left(4z(1-z) + \frac{(2m+2)^2}{2m\,(2m+3)}\right). \tag{23}$$

Набор формул (18)–(23) позволяет весьма полно изучить поведение полиномов Канторовича для функции $f(x) = |2x-1|$.

3. Оценки уклонения на отрезке

Обсудим вопрос о скорости сходимости полиномов Канторовича к порождающей их функции $f(x) = |2x-1|$ на основном отрезке $[0,1]$. При $x = 0$ и $x = 1$, исходя из формулы (11), заключаем

$$f(0) - K_n(f,0) = f(1) - K_n(f,1) = \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

т. е. характер сходимости в этих двух точках абсолютно ясен.

Покажем теперь, что *максимальное уклонение*

$$\|K_n - f\| \equiv \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |K_n(f,x) - f(x)|, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{25}$$

ведет себя практически так же, как максимальное уклонение полиномов Бернштейна

$$\|B_n - f\| \equiv \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |B_n(f,x) - f(x)| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} (B_n(f,x) - f(x)), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Напомним (см. [5, 6]), что $\|B_n - f\| = B_n(f, 1/2)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ со значениями

$$B_1(f,1/2) = 1, \quad B_{2m}(f,1/2) = B_{2m+1}(f,1/2) = 2^{-2m} C_{2m}^m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Учитывая (27) и формулы из теоремы 1, получаем для полиномов Канторовича

$$K_{2m}(f,1/2) = \frac{4m+1}{4m+2}\, 2^{-2m}\, C_{2m}^m, \quad K_{2m+1}(f,1/2) = 2^{-2m-2}\, C_{2m+2}^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{28}$$

Отсюда, кстати, имеем оценку $0 < K_n(f,1/2) < B_n(f,1/2)$, выполненную при всех $n \in \mathbb{N}$.

Кроме того, как и для полиномов Бернштейна, значения $K_n(f,1/2)$, вычисленные в виде (28), совпадают с максимальными уклонениями полиномов Канторовича от порождающей их функции $f(x) = |2x-1|$. Точнее, в данном примере $\|K_n - f\| = K_n(f,1/2)$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Указанные равенства обосновываются отдельным анализом поведения на $[0,1]$ знакопеременной величины $K_n(f,x) - f(x)$ с учетом результатов (24), (28).

Примечательно, что все значения $B_n(f,1/2)$ и $K_n(f,1/2)$, а с ними и максимальные уклонения (25) и (26), выражаются через нормированные центральные биномиальные коэффициенты $2^{-2m}C_{2m}^m$ с классической асимптотикой $2^{-2m}C_{2m}^m \sim 1/\sqrt{\pi m}$ при $m \to \infty$. Эта асимптотика, как известно, может быть дополнена весьма точными двусторонними оценками типа

$$\left(1 - \frac{1}{8m+0.5}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi m}} < 2^{-2m} C_{2m}^m < \left(1 - \frac{1}{8m+1}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi m}}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Элементарное доказательство для (29) см. в недавнем обзоре [9] (см. также [10] и литературу, указанную в [9]).

Приведем итоговый результат, посвященный максимальному уклонению (25).

Теорема 2. *Для полиномов Канторовича от симметричного модуля* $f(x) = |2x-1|$ *максимальное уклонение* (25) *выражается формулой*

$$\|K_n - f\| = K_n(f,1/2), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{30}$$

со значениями $K_n(f,1/2)$, *указанными в* (28). *При* $n \in \mathbb{N}$ *последовательность* (30) *строго монотонно убывает к нулю с асимптотикой*

$$\|K_n - f\| = K_n(f,1/2) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \quad n \to \infty. \tag{31}$$

Формула (31) указывает на медленное степенное убывание величины $\|K_n - f\|$, такое же, как и убывание $\|B_n - f\|$. Этот результат можно дополнить точными двусторонними оценками максимального уклонения $\|K_n - f\|$ на основе, например, неравенства (29). Сравнивая величины (25) и (26) при помощи связанных с ними значений (27) и (28), замечаем, что $0 < \|K_n - f\| < \|B_n - f\|$ для всех номеров $n \in \mathbb{N}$, т. е. с точки зрения максимального уклонения (и в точке $x = 1/2$) полиномы Канторовича приближают симметричный модуль чуть лучше, чем полиномы Бернштейна. Однако во всех остальных точках $x \in [0,1/2) \cup (1/2,1]$ картина оказывается принципиально иной.

Известно (см. [5–7]), что на основном отрезке $[0,1]$ вне точки излома $x = 1/2$ полиномы Бернштейна сходятся к $f(x) = |2x-1|$ с экспоненциальной скоростью. Воспользуемся следующей удобной оценкой, впервые доказанной в [11] (см. также [5, 7]). Имеем

$$0 \leqslant B_{2m}(f,x) - f(x) = B_{2m+1}(f,x) - f(x) \leqslant \frac{2^{-2m} C_{2m}^{m} \, (4x(1-x))^{m+1}}{(2m+1)(2x-1)^2+1} \tag{32}$$

при всех $x \in [0,1]$ и всех $m \in \mathbb{N}$. При $x = 1/2$ мажоранта из (32) дает в точности значения (27); при $x = 0$ и $x = 1$ та же мажоранта равняется нулю. В этих опорных точках получаем полное совпадение верхней границы из (32) с оцениваемой величиной. Во всех остальных точках $x \in (0,1/2) \cup (1/2,1)$ оценка (32) оказывается весьма точной: из нее следует экспоненциальный характер стремления к нулю уклонения $B_n(f,x) - f(x)$, выраженный тем сильнее, чем ближе точка x будет расположена к границам отрезка $[0,1]$. (При анализе формулы (32) следует обратить внимание на величину $q(x) \equiv 4x(1-x)$, находящуюся в пределах $0 < q(x) < 1$, если $x \in (0,1/2) \cup (1/2,1)$.)

Вернемся к полиномам Канторовича для функции $f(x) = |2x-1|$. Рассмотрим *поточечное уклонение*

$$K_n(f,x) - f(x), \quad x \in [0,1], \; n \in \mathbb{N}_0. \tag{33}$$

Основываясь на формулах (18), (19), запишем представления

$$K_{2m}(f,x) - f(x) = \frac{2m}{2m+1} \big(B_{2m+1}(f,x) - f(x)\big) + \frac{2^{-2m} C_{2m}^{m} \, (4x(1-x))^{m}}{2(2m+1)} - \frac{1}{2m+1} \, f(x),$$

$$K_{2m+1}(f,x) - f(x) = \frac{2m+1}{2m+2} \big(B_{2m+1}(f,x) - f(x)\big) - \frac{1}{2m+2} \, f(x),$$

действующие при всех $m \in \mathbb{N}_0$. Воспользуемся теперь оценкой (32). Проводя элементарные преобразования (вместе с некоторыми загрублениями при $n = 2m$), устанавливаем следующий результат.

Теорема 3. *Для полиномов Канторовича от функции $f(x) = |2x-1|$ справедливы следующие оценки поточечного уклонения:*

$$-\frac{1}{2m+1} \, f(x) \leqslant K_{2m}(f,x) - f(x) \leqslant -\frac{1}{2m+1} f(x) + \frac{2^{-2m} C_{2m}^{m} \, (4x(1-x))^{m}}{2m \, (2x-1)^2+1}, \tag{34}$$

$$-\frac{1}{2m+2} \, f(x) \leqslant K_{2m+1}(f,x) - f(x) \leqslant -\frac{1}{2m+2} \, f(x) + \frac{2^{-2m-1} C_{2m+1}^{m} \, (4x(1-x))^{m+1}}{(2m+1)(2x-1)^2+1}, \tag{35}$$

действующие при всех $x \in [0,1]$ и всех $m \in \mathbb{N}_0$.

Оценкам (34) и (35) можно придать следующую универсальную форму:

$$-\frac{1}{n+1} \, f(x) \leqslant K_n(f,x) - f(x) \leqslant -\frac{1}{n+1} \, f(x) + R_n(x), \quad x \in [0,1], \; n \in \mathbb{N}_0. \tag{36}$$

Используя известные обозначения «пола» $\lfloor a \rfloor$ и «потолка» $\lceil a \rceil$ как инфимума и супремума из $\mathbb{Z}$ для числа $a \in \mathbb{R}$ (см. [12]), остаточное слагаемое в (36) запишем в виде

$$R_n(x) = \frac{2^{-n} C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} \, (4x(1-x))^{\lceil n/2 \rceil}}{n(2x-1)^2+1}, \quad x \in [0,1], \; n \in \mathbb{N}_0. \tag{37}$$

Пусть $n \to \infty$. Тогда в любой точке $x \in [0,1/2) \cup (1/2,1]$ величина (37) экспоненциально стремится к нулю (с тем уточнением, что $R_n(0) = R_n(1) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$). Поэтому формула (36) дает такой результат.

Теорема 4. *Для полиномов Канторовича от функции* $f(x) = |2x - 1|$ *поточечное уклонение* (33) *удовлетворяет оценке*

$$K_n(f, x) - f(x) \sim -\frac{1}{n}\,|2x - 1|, \quad n \to \infty, \tag{38}$$

в любой точке $x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$.

Асимптотика (38) показывает, в частности, что в любой точке $x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, начиная с некоторого номера $n_0 = n_0(x)$, значения $K_n(f, x)$ будут строго меньше значений порождающей функции $f(x) = |2x - 1|$.

Итак, в отличие от полиномов Бернштейна, полиномы Канторовича $K_n(f, x)$ во всех точках $x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ стремятся к порождающей функции $f(x) = |2x - 1|$ со степенной скоростью порядка $1/n$. Этот результат служит наглядной иллюстрацией к общей теории [13] о скорости сходимости полиномов Канторовича в точках дифференцируемости порождающей функции $f \in C[0, 1]$. При нашем подходе асимптотика (38) оказывается дополненной двусторонними оценками (34), (35), позволяющими существенно уточнить характер сходимости полиномов Канторовича в зависимости от расположения точки $x \in [0, 1]$.

4. Сходимость на комплексной плоскости

Обсудим вопрос о поведении полиномов Канторовича для функции $f(x) = |2x - 1|$ за пределами основного отрезка $[0, 1]$. На плоскости $\mathbb{C}$ определим множество

$$D \equiv \{z \in \mathbb{C} :\ |4z(1 - z)| \leqslant 1\}, \tag{39}$$

ограниченное лемнискатой

$$L\colon\ |4z(1 - z)| = 1. \tag{40}$$

В теории аппроксимации множества, подобные D, естественно называть *компактами Канторовича*, ибо они тесно связаны с результатами [14] о сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости (подробнее см. в работе [8]). Так как буква K используется у нас для полиномов Канторовича, то компакт (39), ранее записываемый тоже через K (см. [7, 8]), сейчас обозначаем D.

Границу этого компакта L, т. е. кривую (40), называем *лемнискатой Канторовича*. Сам D состоит из левой и правой петель вида

$$D_1 \equiv \{z \in D\colon\ \operatorname{Re} z \leqslant 1/2\}, \quad D_2 \equiv \{z \in D\colon\ \operatorname{Re} z \geqslant 1/2\}. \tag{41}$$

Ясно, что $D = D_1 \cup D_2$ и $D_1 \cap D_2 = \{1/2\}$, где $z = 1/2$ есть точка самопересечения лемнискаты L.

Известно (см. [8]), что компакт (39) есть в точности множество сходимости полиномов Бернштейна (1) от функции $f(x) = |2x - 1|$. Благодаря нашей новой теореме 1 этот результат удается перенести на полиномы Канторовича (2).

Теорема 5. *При* $n \to \infty$ *полиномы* $K_n(f, z)$ *для модуля* $f(x) = |2x - 1|$ *сходятся равномерно на компакте* $D \subset \mathbb{C}$ *вида* (39) *к функции*

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1 - 2z, & z \in D_1, \\ 2z - 1, & z \in D_2, \end{cases} \tag{42}$$

где D_1, D_2 заданы формулой (41). *В любой внешней точке $z \in \mathbb{C} \setminus D$ при $n \to \infty$ последовательность $K_n(f, z)$ расходится, точнее, независимо расходятся обе подпоследовательности $K_{2m}(f, z)$ и $K_{2m+1}(f, z)$.*

Основная часть доказательства теоремы 5 использует переход, связанный с формулами (18), (19). Функция (42) возникает как предельная для полиномов $B_n(f, z)$ от того же модуля $f(x) = |2x - 1|$ (см. [7, 8]). При доказательстве расходимости подпоследовательности $K_{2m}(f, z)$ на множестве $\mathbb{C} \setminus D$ учитываются соотношения (22), (23).

Для описания скорости сходимости полиномов $K_n(f, z)$ к предельной функции (42) введем уклонение

$$K_n(f, z) - \varphi(z), \quad z \in D, \; n \in \mathbb{N}_0. \tag{43}$$

Из формул (18), (19) имеем представления

$$K_{2m}(f, z) - \varphi(z) = \frac{2m}{2m+1}\big(B_{2m+1}(f, z) - \varphi(z)\big) + \frac{2^{-2m} C_{2m}^m \,(4z(1-z))^m}{2(2m+1)} - \frac{1}{2m+1}\,\varphi(z),$$

$$K_{2m+1}(f, z) - \varphi(z) = \frac{2m+1}{2m+2}\big(B_{2m+1}(f, z) - \varphi(z)\big) - \frac{1}{2m+2}\,\varphi(z),$$

действующие на D при всех $m \in \mathbb{N}_0$.

Далее, согласно [7], в любой фиксированной точке $z \in D \setminus L$, т. е. в каждой внутренней точке компакта D, верна асимптотическая формула

$$B_{2m}(f, z) - \varphi(z) = B_{2m+1}(f, z) - \varphi(z) \sim \frac{2z(1-z)}{(2z-1)^2}\,\frac{(4z(1-z))^m}{m\sqrt{m\pi}}, \quad m \to \infty. \tag{44}$$

Из (44) следует экспоненциальный характер сходимости на множестве $D \setminus L$ ($= \operatorname{Int} D$) полиномов $B_{2m}(f, z) = B_{2m+1}(f, z)$ к своей предельной функции $\varphi(z)$. Применив асимптотику (44) в представлениях для величин $K_{2m}(f, z) - \varphi(z)$ и $K_{2m+1}(f, z) - \varphi(z)$, получаем следующий результат.

Теорема 6. *Для полиномов Канторовича от функции $f(x) = |2x - 1|$ поточечное уклонение* (43) *удовлетворяет оценке*

$$K_n(f, z) - \varphi(z) \sim -\frac{1}{n}\,\varphi(z), \quad n \to \infty, \tag{45}$$

в любой внутренней точке $z \in D \setminus L$ из компакта (39).

Тем самым, степенной закон сходимости (38) распространяется с вещественных значений $x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ на все значения z из множества $|4z(1 - z)| < 1$.

Осталось обсудить ситуацию на границе L компакта Канторовича D. Наши недавние исследования (готовятся к печати) показывают, что в любой фиксированной точке z лемнискаты (40), кроме точки самопересечения $z = 1/2$, действует оценка сверху

$$|B_{2m}(f, z) - \varphi(z)| = |B_{2m+1}(f, z) - \varphi(z)| \leqslant \frac{C(z)}{m\sqrt{m}}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{46}$$

с коэффициентом $C(z) > 0$, зависящим от выбора точки $z \in L \setminus \{1/2\}$. Учет (46) в представлениях для величин $K_{2m}(f, z) - \varphi(z)$ и $K_{2m+1}(f, z) - \varphi(z)$ позволяет распространить асимптотику (45) на все точки компакта D, исключая лишь $z = 1/2$.

Итак, сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 7. *В условиях теоремы* 6 *асимптотика* (45) *верна во всех точках z из компакта* (39), *кроме единственной точки $z = 1/2$, где действует более медленный степенной закон* (31).

Таким образом, в нашем примере при $n \to \infty$ всюду на компакте Канторовича (39) скорость сходимости полиномов $K_n(f, z)$ к предельной функции $\varphi(z)$ будет степенной — порядка $1/n$ в точках $z \in D \setminus \{1/2\}$ и порядка $1/\sqrt{n}$ в точке $z = 1/2$.

Полученные результаты дают ориентиры для распространения теории на кусочно линейные (и кусочно аналитические) порождающие функции $f \in C[0, 1]$, в особенности — на рациональные модули $f(x) = |qx - p|$.

Стоит подчеркнуть, что вопрос сходимости полиномов Канторовича на плоскости $\mathbb{C}$ относится пока к малоизученным. Нам известны лишь некоторые результаты [15], где на порождающую функцию $f \in C[0, 1]$ налагались дополнительные требования аналитичности в круговых областях типа $|z| < R$ радиуса $R > 1$.

Полезно также иметь в виду, что эта тематика может оказаться связанной с вопросом распределения нулей полиномов Канторовича по аналогии с известным сейчас для полиномов Бернштейна (см. [8], [16–19]).

Авторы признательны Д. Г. Цветкович за помощь при подготовке текста работы.

Литература

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials.—Toronto: University of Toronto Press, 1953.—x+130 p.
2. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation.—Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verlag, 1993.—x+450 p.
3. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учеб. пособие к спецкурсу.—Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.—64 с.
4. *Bustamante J.* Bernstein Operators and Their Properties.—Basel: Birkhauser, 2017.—xii+420 p.
5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по матем. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 126–175.—(Итоги науки. Юг России).
6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика.—2012.—Т. 15, № 26.—С. 6–40.
7. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна: новые продвижения и возможные обобщения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы.—Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2020.—С. 409–414.
8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Сер. Современная математика и ее прилож. Тематич. обзоры.—2019.—Т. 170.—С. 71–117. DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-71-117.
9. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Сравнительный анализ двусторонних оценок центрального биномиального коэффициента // Челябинский физ.-мат. журн.—2020.—Т. 5, вып. 1.—С. 70–95. DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15106.
10. *Попов А. Ю.* Двусторонние оценки центрального биномиального коэффициента // Челябинский физ.-мат. журн.—2020.—Т. 5, вып. 1.—С. 56–69. DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15105.
11. *Попов А. Ю.* Оценка сверху остатка степенного ряда с положительными коэффициентами специального вида // Челябинский физ.-мат. журн.—2017.—Т. 2, вып. 2.—С. 192–197.
12. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики.—М.: Мир, 1998.—704 с.
13. *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций многочленами Бернштейна и многочленами Канторовича // Тр. МИАН.—2008.—Т. 260.—С. 289–296.
14. *Канторович Л. В.* О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. VII сер. Отд. мат. и естеств. наук.—1931.—Вып. 8.—С. 1103–1115.

15. *Gal S. G.* Approximation by Complex Bernstein and Convolution Type Operators.—New Jersey, London, Singapore: World Scientific, 2009.—xii+338 p.
16. *Тихонов И. В., Цветкович Д. Г., Шерстюков В. Б.* Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Фундамент. и прикл. матем.—2016.—Т. 21, № 4.—С. 151–173.
17. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна // Диф. уравнения и процессы управления.—2017.—№ 2.—С. 59–73.
18. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Об одном методе для нахождения области сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости // Некоторые актуальные проблемы совр. математики и матем. образования. Герценовские чтения —2018. Материалы науч. конф., 9–13 апреля 2018 г.—СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2018.—С. 145–153.
19. *Цветкович Д. Г.* Подробный атлас аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Челябинский физ.-мат. журн.—2018.—Т. 3, вып. 1.—С. 58–89.

Статья поступила 29 октября 2021 г.

Окорочков Иван Владимирович
Московский педагогический государственный университет,
аспирант кафедры математического анализа
РОССИЯ, 107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14
E-mail: ivan.okorochkov@yandex.ru

Тихонов Иван Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
профессор кафедры математической физики
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: ivtikh@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-5949-3573

Шерстюков Владимир Борисович
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
профессор кафедры высшей математики
РОССИЯ, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31
E-mail: shervb73@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 1, P. 87–99

ON THE CONNECTION OF BERNSTEIN AND KANTOROVICH POLYNOMIALS FOR A SYMMETRIC MODULE FUNCTION

Okorochkov, I. V.[1], Tikhonov, I. V.[2] and Sherstyukov, V. B.[3]

[1] Moscow State Pedagogical University, 14 Krasnoprudnaya St., Moscow 107140, Russia;
[2] Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie gory, Moscow 119991, Russia;
[3] National Research Nuclear University MEPhI, 31 Kashirskoe shosse, Moscow 115409, Russia

E-mail: ivan.okorochkov@yandex.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Abstract. The paper is based on the report which made by authors at the XVI International Scientific Conference "Order analysis and related problems of mathematical modeling. Operator theory and differential equations" (Vladikavkaz, September 2021). A brief review of our recent results is presented. We study the connection of Bernstein and Kantorovich polynomials for an important example with the symmetric module function. It is well known that such nonsmooth functions play a special role in approximation theory. By means of the obtained relations, the investigation of Kantorovich polynomials can be reduced to the using of the Bernstein polynomials properties. In particular, the deviation of Kantorovich polynomials from the symmetric module function is considered. In addition to accurate two-sided estimates on the interval $[0, 1]$, a simple asymptotic formula for deviation is noted. The character of the convergence of Kantorovich polynomials differs from that of Bernstein polynomials give on the interval $[0,1]$. We also present new results on the convergence of Kantorovich polynomials in the complex plane. The convergence set is the same as for Bernstein polynomials. This is so-called Kantorovich compact, which limited by the lemniscate $|4z(1-z)|=1$. Everywhere here the rate of convergence of Kantorovich polynomials is established. In view of the limited size of the article, we present only the schemes of proofs. The proofs in details is planned to be given separately.

Key words: Bernstein polynomials, Kantorovich polynomials, symmetric module function, rate of convergence, estimation of deviation, convergence in the complex plane.

AMS Subject Classification: 41A10, 30E10, 11B83, 05A10.

For citation: *Okorochkov, I. V., Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* On the Connection of Bernstein and Kantorovich Polynomials for a Symmetric Module Function, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 87–99 (in Russian). DOI: 10.46698/w0554-1733-2841-u.

References

1. *Lorentz, G. G. Bernstein Polynomials*, Toronto, Univeristy of Toronto Press, 1953, x+130 p.
2. *DeVore, R. A. and Lorentz, G. G. Constructive Approximation*, Berlin–Heidelberg–N. Y., Springer-Verlag, 1993, x+450 p.
3. *Videnskij, V. S. Mnogochleny Bernshtejna. Uchebnoe posobie k speckursu* [Bernstein Polynomials. Textbook for the Special Course], Leningrad, LSPI n. a. A. I. Herzen, 1990, 64 p. (in Russian).
4. *Bustamante, J. Bernstein Operators and Their Properties*, Basel, Birkhauser, 2017, xii+420 p.
5. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Petrosova, M. A.* Bernstein Polynomials: the Old and the New. *Matematicheskij forum. T.* 8. *Ch.* 1. *Issledovaniya po matematicheskomu analizu. Ser. "Itogi nauki. Jug Rossii"* [Math. Forum. Vol. 8. Part 1. Studies on Mathematical Analysis (Results of Science. South of Russia)], Vladikavkaz, SMI VSC RAS and RNO-A, 2014, pp. 126–175 (in Russian).
6. *Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* Approximation of the Module Function with Bernstein Polynomials, *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Chelyabinsk State University. Matematics. Mechanics. Informatics], 2012, vol. 15, no. 26, pp. 6–40 (in Russian).
7. *Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* Approximation of the Module Function with Bernstein Polynomials: New Advances and Possible Generalizations, *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 20-y mezhdunarodnoy Saratovskoy zimney shkoly* [Modern problems of the theory of functions and their applications: materials of the 20th international Saratov winter school], Saratov, Nauchnaya kniga, 2020, pp. 409–414 (in Russian).
8. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Tsvetkovich, D. G.* Generalized Popoviciu Expansions for Bernstein Polynomials of a Rational Module, *Materialy Voronezhskoy zimney matematicheskoy shkoly "Sovremennye metody teorii funktsiy i smezhnye problemy". 28 yanvarya–2 fevralya 2019 g. Chast' 1, Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Proceedings of the Voronezh Winter Mathematical School "Modern Methods of Function Theory and Related Problems". January 28 – February 2, 2019. Part 1, Progress in Science and Technology. Contemporary Mathematics and Its Applications. Thematic Surveys], 2019, vol. 170, pp. 71–117 (in Russian). DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-71-117.
9. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Tsvetkovich, D. G.* Comparative Analysis of Two-Sided Estimates of the Central Binomial Coefficient, *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2020, vol. 5, no. 1, pp. 70–95 (in Russian). DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15106.
10. *Popov, A. Yu.* Two-Sided Estimates of the Central Binomial Coefficient, *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2020, vol. 5, no. 1, pp. 56–69 (in Russian). DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15105.
11. *Popov, A. Yu.* The Upper Bound of the Remainder of Power Series with Positive Coefficients of a Special Class, *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2017, vol. 2, no. 2, pp. 192–197 (in Russian).
12. *Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Longman Publ. Co, Inc., 1994, ix+658 p.
13. *Telyakovskii, S. A.* On the Approximation of Differentiable Functions by Bernstein Polynomials and Kantorovich Polynomials, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 260, pp. 289–296.
14. *Kantorovič, L. V.* Sur la Convergence de la Suite des Polynômes de S. Bernstein en Dehors de l'Intervalle Fondamental, *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et nat.*, 1931, no. 8, pp. 1103–1115.

15. *Gal, S. G. Approximation by Complex Bernstein and Convolution Type Operators*, New Jersey–London–Singapore, World Scientific, 2009, xii+338 p.
16. *Tikhonov, I. V., Tsvetkovich, D. G. and Sherstyukov, V. B.* Computer Analysis of the Attractors of Zeros for Classical Bernstein Polynomials, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 245, no. 2, pp. 217–233.
17. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Tsvetkovich, D. G.* How do Attractors of Zeros for Classical Bernstein Polynomials Look Like, *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya* [Differential Equations and Control Processes], 2017, no. 2, pp. 59–73 (in Russian).
18. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Tsvetkovich, D. G.* On Some Method for Finding the Convergence Domain of Bernstein Polynomials in the Complex Plane, *Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i mat. obrazovaniya. Gercenovskie chteniya – 2018. Materialy nauchnoj konferentcii, 09-13 aprelya 2018 g.* [Some Actual Problems of Modern Mathematics and Mathematical Education. Herzen Readings – 2018], Saint Petersburg, Publishing House of RSPU n. a. A. I. Herzen, 2018, pp. 145–153 (in Russian).
19. *Tsvetkovich, D. G.* Detailed Atlas of Attractors of Zeros for the Classical Bernstein Polynomials, *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2018, vol. 3, no. 1, pp. 58–89 (in Russian).

Received October 29, 2021

Ivan V. Okorochkov
Moscow State Pedagogical University,
14 Krasnoprudnaya St., Moscow 107140, Russia,
Graduate Student of the Department of Math. Analysis
E-mail: ivan.okorochkov@yandex.ru

Ivan V. Tikhonov
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie gory, Moscow 119991, Russia,
Professor of the Department of Math. Physics
E-mail: ivtikh@mail.ru

Vladimir B. Sherstyukov
National Research Nuclear University MEPhI,
31 Kashirskoe Shosse, Moscow 115409, Russia,
Professor of Higher Mathematics Department
E-mail: shervb73@gmail.com