Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 2, С. 124–129

УДК 519.977
DOI 10.46698/a7295-9838-4109-h

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В МОДЕЛИ «ИНВЕСТИЦИИ–ПОТРЕБЛЕНИЕ»

П. В. Николенко[1], **Л. В. Новикова**[2]

[1] Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
Россия, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69
[2] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

E-mail: `petr.v.nikolenko@gmail.com`, `lvnovikova@sfedu.ru`

Аннотация. В модели «инвестиции–потребления» темп роста фондовооруженности представляет собой разность между собственными инвестициями и темпом амортизации. Если имеется цель достигнуть заданного уровня фондовооруженности к фиксированному моменту времени, но собственных инвестиций для этого недостаточно, то необходимо привлекать дополнительные средства, которые поступают в виде финансового потока. Величина потока ограничена сверху функцией — предельной способностью к поглощению инвестиций. Получен ответ на вопрос о том, какова минимальная величина дополнительных средств и в форме какого финансового потока они должны поступить, чтобы поставленная цель была достигнута. Оказывается, искомый поток устроен следующим образом. Существует пара значений фондовооруженности между начальным и целевым значениями, такая, что пока фондовооруженность меняется от меньшего к большему значению, используются только собственные инвестиции. В остальное время используются дополнительные средства в максимальном возможном темпе. Получены формулы для вычисления указанных значений фондовооруженности, а также формула для вычисления объема дополнительных средств.

Ключевые слова: производственная функция, управление, фондовооруженность, принцип максимума Понтрягина.

AMS Subject Classification: 34H05.

Образец цитирования: *Николенко П. В., Новикова Л. В.* Об одной экстремальной задаче в модели «инвестиции–потребление» // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 2.—С. 124–129. DOI: 10.46698/a7295-9838-4109-h.

1. Введение

Динамика фондовооруженности в модели «инвестиции–потребление» описывается законом (см. [1, с. 243])

$$\dot{x} = sf(x) - \mu x,$$

где x — фондовооруженность, f — производственная функция, $f(x)$ — произведенная в единицу времени стоимость, приходящаяся на одного работающего, $0 < s < 1$ — доля произведенной стоимости, которая возвращается в производство в виде инвестиций, μ — коэффициент амортизации производственных фондов.

Производственная функция обладает свойствами: $f > 0$, $f' > 0$, $f'' < 0$,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0.$$

Рассматривается фиксированный промежуток времени $[0, T]$, фондовооруженность на момент нуль составляет величину x_0.

Пусть поставлена цель: к моменту T достигнуть фондовооруженности $x_1 > x_0$, но собственных инвестиций для достижения этой цели не хватает — это означает, что время достижения величиной x значения x_1 по закону

$$\dot{x} = sf(x) - \mu x$$

больше T:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{sf(x) - \mu x} > T.$$

Предположим, что для достижения этой цели выделены средства объема S, которые поступают в виде финансового потока $u(t)$, где u — кусочно-непрерывная функция,

$$\int\limits_0^T u(t)\,dt = S,$$

причем

$$0 \leqslant u(t) \leqslant p(x(t)),$$

величина $p(x)$ — предельная способность к поглощению инвестиций, предполагается, что она непрерывно-дифференцируема. Тогда динамика фондовооруженности примет вид:

$$\dot{x} = F(x) + u,$$

где $F(x) = sf(x) - \mu x$.

Поставим вопрос: каков минимальный объем средств S и в виде какого финансового потока они должны поступить, чтобы поставленная цель была достигнута?

Будем считать, что F положительна на отрезке $[x_0, x_1]$ и

$$\tilde{x} \in (x_0, x_1),$$

где $\tilde{x}$ — точка максимума F.

Если $\tilde{x}$ окажется вне интервала (x_0, x_1), то ответ на поставленный вопрос легко усматривается из нижеизложенного.

Отметим, что задача о наискорейшем выходе на заданный уровень фондовооруженности была в упрощенной постановке изучена ранее в работе [2].

2. Задача управления

Запишем поставленную задачу как задачу теории управления:

$$J(u) = \int\limits_0^T u(t)\,dt \to \min,$$

$$\dot{x} = F(x) + u,$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

$$b_1(x, u) = u - p(x) \leqslant 0, \quad b_2(x, u) = -u \leqslant 0,$$

время T фиксировано. Исследуем эту задачу с помощью принципа максимума Понтрягина. Условия оптимальности для таких задач сформулированы Болтянским [3, с. 400]. Согласно этим условиям оптимальный процесс (x, u) доставляет максимум по u функции Понтрягина

$$H = \psi_0 u + \psi(F(x) + u):$$

$$\max_{0 \leqslant v \leqslant p(x(t))} H\big(\psi(t), x(t), v\big) = H\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) \tag{1}$$

(для всех, кроме, возможно, конечного числа моментов t), где $\psi_0 \leqslant 0$ — константа, ψ — непрерывное решение вспомогательного уравнения

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \sum_{i=1}^{2} \rho_i \frac{\partial b_i}{\partial x}:$$

$$\dot{\psi} = -\psi F'(x) - \rho_1 p'(x), \tag{2}$$

где ρ_i — кусочно-непрерывные неотрицательные функции такие, что

$$\rho_i(t) b_i(x(t), u(t)) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

и для всех, кроме конечного числа, значений t, выполняется соотношение

$$\frac{\partial}{\partial u}\big(H(\psi(t), x(t), u(t)\big) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i(t) b_i(x(t), u(t))\right):$$

$$\psi_0 + \psi = \rho_1 - \rho_2; \tag{4}$$

$$\text{вектор } (\psi_0, \psi(T)) \text{ ненулевой.} \tag{5}$$

Следует рассмотреть два случая: $\psi_0 = 0$, $\psi_0 = -1$.

3. О числе переключений

а) Рассмотрим случай $\psi_0 = 0$, из условия максимума (1) следует, что

$$u(t) = \begin{cases} p(x(t)), & \text{если} \quad \psi(t) > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \psi(t) < 0. \end{cases}$$

Из условия (5) следует, что $\psi(T) \neq 0$. Если $\psi(T) > 0$, то $u(T) = p(x(T))$ и из (3) получаем $\rho_2 = 0$ для всех t, где $\psi > 0$. Тогда из формулы (4) получаем, что $\psi = \rho_1$ и, подставляя в (2), получаем

$$\dot{\psi} = -\psi(F'(x) + p'(x)).$$

Поскольку ψ — решение однородного линейного уравнения, оно сохраняет знак, следовательно, точки переключения управления отсутствуют:

$$u(t) = p(x(t)) \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Если $\psi(T) < 0$, то $u(T) = 0$ и, следовательно, $\rho_1 = 0$ на промежутке, содержащем T. Подставляя $\rho_1 = 0$ в (2), получаем

$$\dot{\psi} = -\psi F'(x),$$

и, в силу сохранения величиной ψ знака, $u(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$.

б) Рассмотрим случай $\psi_0 = -1$. Тогда $H = -u + \psi(F(x)+u)$, из условия (1) получаем

$$u = \begin{cases} p(x), & \text{если} \quad \psi > 1, \\ 0, & \text{если} \quad \psi < 1. \end{cases}$$

Если для всех t из некоторого промежутка $u(t) < p(x(t))$, то в силу (3), (2) $\rho_1 = 0$ и $\dot{\psi} = -\psi F'(x)$.

Поскольку, в силу уравнения динамики, x монотонно возрастает и F' обращается в нуль лишь в одной точке, равенство $\psi = 1$ может выполняться не более, чем в двух точках и на указанном промежутке $u = 0$.

Пусть $[\alpha, \beta]$ — промежуток максимальной длины, на котором $u = 0$. Это означает, что либо $\alpha = 0$, либо α — точка переключения u, следовательно, $\psi(\alpha) = 1$ (если $\alpha > 0$). Аналогично, $\psi(\beta) = 1$ (если $\beta < T$).

Если $\alpha > 0$, то из условий

$$\dot{\psi} = -\psi F'(x), \quad \psi(\alpha) = 1, \quad \psi \leqslant 1$$

следует, что

$$F'(x(\alpha)) > 0,$$

т. е. $x(\alpha) < \tilde{x}$. Аналогично, $x(\beta) > \tilde{x}$.

Таким образом, управление u содержит не более двух точек переключения. Причем, если τ — момент переключения с $u = p(x)$ на $u = 0$, то $x(\tau) < \tilde{x}$; если с $u = 0$ на $u = p(x)$, то $x(\tau) > \tilde{x}$.

4. Нахождение точек переключения

Точки переключения определяются из условия $x(T) = x_1$. Величина x монотонно возрастает, поэтому управление u является также функцией x.

Если имеется одна точка переключения с $p(x)$ на 0 в момент τ', причем

$$x(\tau') = x' < \tilde{x},$$

то x меняется по закону

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x) + p(x), & \text{при} \quad 0 \leqslant t < \tau', \\ F(x), & \text{при} \quad \tau' < t \leqslant T. \end{cases}$$

Тогда

$$T = \tau' + (T - \tau') = \int\limits_{x_0}^{x'} \frac{dx}{F(x)+p(x)} + \int\limits_{x'}^{x_1} \frac{dx}{F(x)}. \tag{6}$$

Функция от x' в правой части равенства (6) является монотонной, поэтому x' из (6) является монотонной, поэтому x' из (6) определяется однозначно (в случае разрешимости уравнения). В случае разрешимости (6) будем обозначать x_1 через x''.

Аналогично, если имеется одна точка переключения с 0 на $p(x)$ в момент τ'' ($x(\tau'') = x'' > x$), то

$$T = \int\limits_{x_0}^{x''} \frac{dx}{F(x)} + \int\limits_{x''}^{x_1} \frac{dx}{F(x)+p(x)}. \tag{7}$$

Из (7) (в случае разрешимости) x'' определяется однозначно. В случае разрешимости (7) переобозначим x_0 через x'.

Если имеются две точки переключения: с $p(x)$ на 0 в момент τ' $(x(\tau') = x')$, с 0 на $p(x)$ в момент τ'' $(x(\tau'') = x'')$, то на промежутке от τ' до τ''

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x), \\ \dot{\psi} = -\psi F'(x), \end{cases}$$

причем $\psi(\tau') = \psi(\tau'') = 1$.

Данная система является гамильтоновой с функцией $H = \psi F(x)$, поэтому

$$\psi(\tau')F(x(\tau')) = \psi(\tau'')F(x(\tau'')).$$

Следовательно, $F(x') = F(x'')$.

Тогда x', x'' однозначно определены из соотношений

$$T = \int\limits_{x_0}^{x'} \frac{dx}{F(x) + p(x)} + \int\limits_{x'}^{x''} \frac{dx}{F(x)} + \int\limits_{x''}^{x_1} \frac{dx}{F(x) + p(x)}, \quad F(x') = F(x''). \tag{8}$$

Запишем значение функционала

$$J(u) = \int\limits_0^T u(t)\,dt = \int\limits_{[0,T]\setminus[\tau',\tau'']} p(x(t))\,dt = \int\limits_{[x_0,x_1]\setminus(x',x'')} \frac{p(z)\,dz}{F(z) + p(z)}. \tag{9}$$

Таким образом, установлена

Теорема. *Если процесс (x, u) оптимальный, то динамика x описывается законом*

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x), & \textit{при} \quad x \in (x', x''), \\ F(x) + p(x), & \textit{при} \quad x \in [x_0, x_1] \setminus (x', x''), \end{cases}$$

где x', x'' удовлетворяют одной из формула (6)–(8). *Значение $J(u)$ определяет формула* (9).

Выводы. Минимальная сумма, которая обеспечит достижение фондовооруженностью значения x_1 к моменту T, определяется из формулы (9). При этом рост фондовооруженности от значения x' до значения x'' обеспечивают собственные инвестиции, в остальное время, кроме собственных инвестиций, в максимальном темпе используются привлеченные средства.

Литература

1. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику.—М.: Наука, 1984.—294 с.
2. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления.—М.: Наука, 1969.—408 с.
3. *Николенко П. В.* Оптимальная форма заемных средств в задаче о наискорейшем выходе на заданный уровень фондовооруженности // Вестник РГЭУ (РИНХ).—2020.—№ 1 (69).— С. 163–167.

Статья поступила 1 июня 2021 г.

Николенко Пётр Вадимович
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
доцент кафедры прикладной и фундаментальной математики
РОССИЯ, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69
E-mail: petr.v.nikolenko@gmail.com;

Новикова Людмила Вадимовна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `lvnovikova@sfedu.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 2, P. 124–129

ON AN EXTREMAL PROBLEM IN "INVESTMENT–CONSUMPTION" MODELS

Nikolenko, P. V.[1] and Novikova, L. V.[2]

[1] Rostov State University of Economics (RINH),
69 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344002, Russia;
Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

E-mail: `petr.v.nikolenko@gmail.com`, `lvnovikova@sfedu.ru`

Abstract. In the «investment–consumption» model, the growth rate of capital-labor ratio is the difference between own investments and the rate of depreciation. If there is a goal to achieve a given level of capital-labor ratio by a fixed point in time, but own investment is not enough for this, it is necessary to attract additional funds that come in the form of financial flow. The amount of flow is limited from above by the function — the ultimate ability to absorb investments. The article provides an answer to the question of what is the minimum amount of additional funds and in the form of what financial flow they must arrive in order for the goal to be achieved. It turns out that the desired flow is arranged as follows. There is a pair of capital-labor ratio values between the initial and target values such that as long as the capital-labor ratio varies from the lower to the higher value, only own investment is used. The rest of the time, additional funds are used at the maximum possible pace. Formulas for calculating the specified values of capital-labor ratio, as well as a formula for calculating the amount of additional funds have been obtained.

Key words: production function, capital stock ratio, management, Pontryagin maximum principle.

AMS Subject Classification: 34H05.

For citation: *Nikolenko, P. V. and Novikova, L. V.* On an Extremal Problem in "Investment–Consumption" Models, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 2, pp. 124–129 (in Russian). DOI: 10.46698/a7295-9838-4109-h.

References

1. *Ashmanov, S. A. Introduction to Mathematical Economics*, Moskow, Nauka, 1984, 294 p.
2. *Boltyanskiy, V. G. Mathematical Methods of Optimal Control*, Moskow, Nauka, 408 p.
3. *Nikolenko, P. V.* The Optimal form of Borrowed Funds in the Problem of the Fastest Way to a Given Level of Capital-Labor Ratio, *Bulletin of the Russian State Economic University* (*RINH*), 2020, no. 1 (69), pp. 163–167.

Received June 1, 2021

Peter V. Nikolenko
Rostov State University of Economics (RINH),
69 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344002, Russia,
Assistant Professor
E-mail: `petr.v.nikolenko@gmail.com`;

Lyudmila V. Novikova
Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Assistant Professor
E-mail: `lvnovikova@sfedu.ru`