Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 3, С. 37–54

УДК 519.63
DOI 10.46698/v2914-8977-8335-s

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО В ОБЛАСТИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ

З. В. Бештокова[1], **М. Х. Бештоков**[1], **М. Х. Шхануков-Лафишев**[1]

Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: `zarabaeva@yandex.ru`, `beshtokov-murat@yandex.ru`, `lafishev@yandex.ru`

Аннотация. В настоящей работе исследуется задача Дирихле для уравнения диффузии с дробной производной Капуто в многомерном случае в области с произвольной границей. Вместо исходного уравнения рассматривается уравнение диффузии с дробной производной Капуто с малым параметром. Построена локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского, основная суть которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом каждая из вспомогательных задач может не аппроксимировать исходную задачу, но в совокупности и в специальных нормах такая аппроксимация имеет место. Эти методы были названы методами расщепления. С помощью принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике в норме C. Доказаны устойчивость локально-одномерной разностной схемы и равномерная сходимость приближенного решения предложенной разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи при любых $0 < \alpha < 1$. Проведен анализ выбора оптимальных значений ε, при которых скорость равномерной сходимости приближенного решения рассматриваемой разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи будет определяться наилучшим образом.

Ключевые слова: уравнение конвекции-диффузии, уравнение дробного порядка, дробная производная в смысле Капуто, принцип максимума, локально-одномерная схема, устойчивость и сходимость, краевые задачи, априорная оценка.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12.

Образец цитирования: *Бештокова З. В., Бештоков М. Х., Шхануков-Лафишев М. Х.* Об одной разностной схеме решения задачи Дирихле для многомерного уравнения диффузии с дробной производной Капуто в области с произвольной границей // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 3.— С. 37–54. DOI: 10.46698/v2914-8977-8335-s.

Введение

В последние годы возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегро-дифференцирования, так и приложениями таких конструкций в различных областях науки [1–8]. Интегралы и производные нецелого порядка и дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений в современных исследованиях в теоретической физике, механике и прикладной математике. Дробное математическое исчисление является мощным инструментом, которое может быть использовано для получения динамических моделей, в которых интегро-дифференциальные операторы по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память и пространственную нелокальность сложных сред и процессов [9, 10].

Настоящая работа посвящена построению экономичной аддитивной разностной схемы для численного решения задачи Дирихле для уравнения диффузии дробного порядка в многомерном случае в области с произвольной границей. Основная суть состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом каждая из вспомогательных задач может не аппроксимировать исходную задачу, но в совокупности и в специальных нормах такая аппроксимация имеет место. Эти методы были названы методами расщепления; они развиты в работах J. Douglas, D. W. Peaceman, H. H. Rachford [11, 12], Н. Н. Яненко [13], А. А. Самарского [14–16], Г. И. Марчука [17], Е. Г. Дьяконова [18] и др. В данной работе с помощью принципа максимума получена априорная оценка для решения задачи в разностной трактовке, откуда следует равномерная сходимость локально-одномерной схемы в классе достаточно гладких решений при $0 < \alpha < 1$, где α — порядок дробной производной. В работах [19–21] априорные оценки были получены лишь при условии, когда $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

В работе [21] рассмотрена локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с дробной по времени производной без учета движения самой среды. Построена экономичная аддитивная схема в области сложной формы. Показано, что построенная схема обладает свойством суммарной аппроксимации $\psi = O(h_\alpha^2 + \tau)$ в регулярных узлах, в нерегулярных узлах $\psi = O(1)$, где h_α и τ — параметры сетки.

Численным методам решения различных краевых задач для уравнения диффузии посвящены работы авторов [22–28].

1. Постановка задачи Дирихле

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения диффузии дробного порядка:

$$\partial_{0t}^\alpha u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u\big|_\Gamma = \mu(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G \cup \Gamma, \tag{3}$$

где

$$L = \sum_{k=1}^{p} L_k, \quad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - q_k(x,t)u, \quad k = 1,2,\ldots,p,$$

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\,\frac{d\eta}{(t-\eta)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

— дробная производная Капуто порядка α, $0 < c_0 \leqslant \Theta_k(x,t)$, $q_k(x,t) \leqslant c_1$, $c_0, c_1 = \mathrm{const} > 0$, Γ — граница произвольной области G, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного евклидового пространства R_p,

$$Q_T = G \times (0 < t \leqslant T], \quad k = 1,\ldots,p,$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p).$$

Относительно области $\overline{G}$ используются два предположения [15, с. 486]:

а) пересечение области G с прямой C_k, параллельной оси координат O_{x_k}, состоит из одного интервала Δ_k;

б) возможно построение в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ связной сетки $\bar{\omega}_h$ с шагами h_k, $k = 1, 2, \ldots, p$. Множество ω_h внутренних узлов сетки состоит из точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G$ пересечения гиперплоскостей $x_k = i_k h_k$, $i_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, p$, а множество γ_h граничных узлов — из точек пересечения прямых C_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, проходящих через внутренние узлы $x \in \omega_h$, с границей Γ.

Обозначим через $\gamma_{h,k}$ множество граничных по направлению x_k узлов, γ_h — множество всех граничных узлов $x \in \Gamma$, $\omega^*_{h,k}$ — множество приграничных по направлению x_k узлов, ω^*_h — множество всех приграничных узлов, $\omega^{**}_{h,k}$ — множество нерегулярных по направлению x_k узлов, ω^{**}_h — множество всех нерегулярных узлов, $\omega_{h,k}$ — множество регулярных по направлению x_k узлов, ω_h — множество всех регулярных узлов.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий (1)–(3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

В той же области вместо задачи (1)–(3) рассмотрим следующую задачу с малым параметром ε:

$$\varepsilon u^\varepsilon_t + \partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon = Lu^\varepsilon + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{4}$$

$$u^\varepsilon\big|_\Gamma = \mu(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{6}$$

где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$.

Так как при $t = 0$ начальные условия для уравнения (1) и (4) совпадают, то в окрестности $t = 0$ у производной u^ε_t не возникает особенности типа пограничного слоя [25; 26, с. 10].

Покажем, что $u^\varepsilon \to u$ в некоторой норме при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через $\tilde{z} = u^\varepsilon - u$ и подставим $u^\varepsilon = \tilde{z} + u$ в задачу (4)–(6). Тогда получим

$$\varepsilon \tilde{z}_t + \partial^\alpha_{0t}\tilde{z} = L\tilde{z} + \tilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{7}$$

$$\tilde{z}\big|_\Gamma = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

$$\tilde{z}(x,0) = 0, \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{9}$$

где $\tilde{f}(x,t) = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$.

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (7) скалярно на $\tilde{z}$ и получим энергетическое тождество:

$$\left(\varepsilon\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}, \tilde{z}\right) + \left(\partial^\alpha_{0t}\tilde{z}, \tilde{z}\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k}\right), \tilde{z}\right) - \left(\sum_{k=1}^{p} q_k(x,t)\tilde{z}, \tilde{z}\right) + \left(\tilde{f}(x,t), \tilde{z}\right). \tag{10}$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v) = \int\limits_G uv\,dx, \quad (u,u) = \|u\|_0^2, \quad \|u\|^2_{L_2(0,l_k)} = \int\limits_0^{l_k} u^2(x,t)\,dx_k.$$

Далее через M_i, $i = 1, 2, \ldots$, обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Используя лемму 1 из [27], преобразуем интегралы, входящие в тождество (10):

$$\left(\varepsilon\,\frac{\partial\tilde z}{\partial t},\tilde z\right)=\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\|\tilde z\|_0^2, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\left(\partial_{0t}^{\alpha}\tilde z,\tilde z\right)&=\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\partial_{0t}^{\alpha}\,\tilde z,\tilde z\right)=\frac{1}{p}\int\limits_G\sum_{k=1}^{p}\tilde z\,\partial_{0t}^{\alpha}\,\tilde z\,dx=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_G\tilde z\,\partial_{0t}^{\alpha}\,\tilde z\,dx\\&=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{G'}\left(\int\limits_0^{l_k}\tilde z\,\partial_{0t}^{\alpha}\,\tilde z\,dx_k\right)dx'\geqslant\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{G'}\left(\int\limits_0^{l_k}\partial_{0t}^{\alpha}\,\tilde z^2\,dx_k\right)dx'\\&=\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{G'}\partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_{L_2(0,l_k)}^2dx'=\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{p}\partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_0^2=\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_0^2,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\,\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\right),\tilde z\right)=\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{G'}\Theta_k(x,t)\,\tilde z\,\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\bigg|_0^{l_k}dx'\\&-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_G\Theta_k(x,t)\left(\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\right)^2dx=-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_G\Theta_k(x,t)\left(\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\right)^2dx\leqslant-c_0\|\tilde z_x\|_0^2,\end{aligned} \tag{13}$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{p}q_k(x,t)\,\tilde z,\tilde z\right)=-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_G q_k(x,t)\,\tilde z^2dx\leqslant-c_0\|\tilde z\|_0^2, \tag{14}$$

$$\left(\tilde f(x,t),\tilde z\right)\leqslant\varepsilon_1\|\tilde z\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon_1}\,\|\tilde f\|_0^2, \tag{15}$$

где

$$G'=\left\{x'=(x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_p):\,0<x_k<l_k\right\},$$
$$dx'=dx_1dx_2\dots dx_{k-1}dx_{k+1}\dots dx_p.$$

Учитывая преобразования (11)–(15), выбирая $\varepsilon_1=\frac{c_0}{2}$, из (10) получаем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\|\tilde z\|_0^2+\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_0^2+c_0\|\tilde z_x\|_0^2+\frac{c_0}{2}\,\|\tilde z\|_0^2\leqslant M_1\|\tilde f\|_0^2. \tag{16}$$

Проинтегрируем (16) по τ от 0 до t, тогда получим неравенство

$$\varepsilon\,\|\tilde z\|_0^2+D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z\|_{2,Q_t}^2+\|\tilde z_x\|_{2,Q_t}^2\leqslant M\int\limits_0^t\|\tilde f\|_0^2\,d\tau=\varepsilon^2M\int\limits_0^t\|u_\tau\|_0^2\,d\tau=O\left(\varepsilon^2\right). \tag{17}$$

где M зависит только от входных данных задач (7)–(9), $\|\tilde z_x\|_{2,Q_t}^2=\int_0^t\|\tilde z_x\|_0^2d\tau$, $D_{0t}^{\alpha-1}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $1-\alpha$, $0<\alpha<1$.

Из априорной оценки (17) следует сходимость u^{ε} к u при $\varepsilon\to0$ в норме

$$\|\tilde z\|_1^2=\varepsilon\,\|\tilde z\|_0^2+D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z\|_{2,Q_t}^2+\|\tilde z_x\|_{2,Q_t}^2.$$

Поэтому при малом ε решение задачи (4)–(6) будем принимать за приближенное решение задачи Дирихле для уравнения диффузии с дробной производной Капуто (1)–(3).

2. Построение локально-одномерной схемы (ЛОС)

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_k с шагом $h_k = \frac{l_k}{N_k}$, $k = 1, 2, \ldots, p$:

$$\bar{\omega}_{h_k} = \Big\{ x_k^{(i_k)} = i_k h_k : \, i_k = 0, 1, \ldots, N_k, \, h_k = \frac{l_k}{N_k}, \, k = 1, 2, \ldots, p \Big\}, \quad \bar{\omega}_h = \prod_{k=1}^{p} \bar{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}'_\tau = \Big\{ 0, \; t_{j+\frac{k}{p}} = \Big(j + \frac{k}{p} \Big) \tau, \, j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1; \, \tau = \frac{T}{j_0}, \, k = 1, 2, \ldots, p \Big\},$$

содержащую, наряду с узлами $t_j = j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{k}{p}}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$. Будем обозначать через ω'_τ множество узлов сетки $\bar{\omega}'_\tau$, для которых $t > 0$.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ по аналогии с [15] уравнению (4) поставим в соответствие цепочку «одномерных» уравнений, для этого перепишем уравнение (4) в виде

$$\pounds u^\varepsilon = \varepsilon u_t^\varepsilon + \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon - L u^\varepsilon - f = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{p} \pounds_k u^\varepsilon = 0, \quad \pounds_k u^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{p} \, u_t^\varepsilon + \frac{1}{p} \, \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon - L_k u^\varepsilon - f_k,$$

где $f_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$, и удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{p} f_k = f$.

На каждом полуинтервале $\Delta_k = \Big(t_{j+\frac{k-1}{p}}, t_{j+\frac{k}{p}} \Big]$, $k = 1, 2, \ldots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\begin{gathered} \pounds_k \vartheta_{(k)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \\ \vartheta_{(k)} = \mu(x, t) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma_k, \end{gathered} \tag{18}$$

полагая при этом

$$\begin{gathered} \vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \\ \vartheta_{(k)}\big(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\big) = \vartheta_{(k-1)}\big(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\big), \quad k = 2, 3, \ldots, p, \end{gathered}$$

где Γ_k — множество граничных точек по направлению x_k.

Каждое из уравнений (18) заменим разностной схемой на Δ_k:

$$\begin{gathered} \frac{\varepsilon}{p} \, y_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \Big(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \Big) y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k \left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} + (1-\sigma_k) y^{j+\frac{k-1}{p}} \right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \\ x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \\ y^{j+\frac{k}{p}} \Big|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+\frac{k}{p}}, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{t_{j+\frac{k}{p}}} \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} \, \frac{d\eta}{\big(t_{j+\frac{k}{p}} - \eta \big)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \Big(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \Big) u_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} + O\Big(\frac{\tau}{p} \Big)$$

— дискретный аналог дробной производной порядка α [19],

$$y_{\bar t}^{\frac{s}{p}} = \frac{y^{\frac{s}{p}} - y^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}, \quad \mu^{j+\frac{k}{p}} = \mu\big(x, t_{j+\frac{k}{p}}\big), \quad \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} = f_k\big(x, t_{j+\frac{k}{p}}\big), \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

σ_k — произвольные параметры, $\gamma_{h,k}$ — множество граничных по направлению x_k узлов,

$$x \in \overline{\omega}_h = \left\{ x_i = (i_1 h_1, \ldots, i_p h_p) \in \overline{G},\ i_k = 0, 1, \ldots, N_k,\ h_k = \frac{l_k}{N_k} \right\},$$

$$d_k^j = q(x_i, \bar t), \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad a_i^j = \Theta\big(x_{i-\frac{1}{2}}, \bar t\big), \quad \bar t = t_{j+\frac{1}{2}}.$$

Разностный оператор $\Lambda_k \sim L_k$ имеет следующий вид:

1) в регулярных узлах

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} = \Big(a_k y_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}\Big)_{x_k} - d_k y^{j+\frac{k}{p}}, \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad a_i^j = \Theta\big(x_{i-\frac{1}{2}} \bar t\big);$$

2) в нерегулярных узлах

$$\Lambda_k y_{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{h_k}\left(a_{k,i_k+1}\,\dfrac{y^{(+1_k)} - y}{h_k} - a_{k,i_k}\,\dfrac{y - y^{(-1_k)}}{h_k^*}\right) - d_k y_{(k)}, & x^{(-1_k)} \in \gamma_{h,k}, \\ \dfrac{1}{h_k}\left(a_{k,i_k+1}\,\dfrac{y^{(+1_k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k}\,\dfrac{y - y^{(-1_k)}}{h_k}\right) - d_k y_{(k)}, & x^{(+1_k)} \in \gamma_{h,k}, \end{cases}$$

где h_k^* — расстояние от нерегулярного узла x до граничного узла $x^{(+1_k)}$ или $x^{(-1_k)}$. Если оба соседних с $x \in \omega_{h,k}^*$ узла $x^{(+1_k)}$ и $x^{(-1_k)}$ являются граничными, т. е. $x^{(\pm 1_k)} \in \gamma_{h,k}$, то

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} = \frac{1}{h_k}\left(a_{k,i_k+1}\,\frac{y^{(+1_k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k}\,\frac{y - y^{(-1_k)}}{h_k^*}\right) - d_k y^{j+\frac{k}{p}}$$

— общий вид оператора, где $h_{k\pm}^*$ — расстояние между x и $x^{(+1_k)}$, $h_{k\pm}^* \leqslant h_k$.

В регулярных узлах Λ_k имеет второй порядок аппроксимации, $\Lambda_k u - L_k u = O(h_k^2)$, а в нерегулярных узлах $\Lambda_k u - L_k u = O(1)$ (см. [15, с. 232]).

3. Погрешность аппроксимации ЛОС

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) локально-одномерной схемы и убедимся в том, что каждое в отдельности уравнение (19) номера k не аппроксимирует уравнение (18), но сумма погрешностей аппроксимации $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_p$ стремится к нулю при τ и $|h|$ стремящимся к нулю, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2$.

Будем считать $\sigma_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Пусть $u = u(x,t)$ — решение задачи (4)–(6), а $y^{j+\frac{k}{p}}$ — решение разностной задачи (19). Характеристикой точности локально-одномерной схемы является разность $y^{j+1} - u^{j+1} = z^{j+1}$. Промежуточные значения $y^{j+\frac{k}{p}}$ будем сравнивать с $u^{j+\frac{k}{p}} = u\big(x, t_{j+\frac{k}{p}}\big)$, полагая $z^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} - u^{j+\frac{k}{p}}$. Подставляя $y^{j+\frac{k}{p}} = z^{j+\frac{k}{p}} + u^{j+\frac{k}{p}}$ в разностное уравнение (19), получим

$$\begin{gathered} \frac{\varepsilon}{p} z_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \Big(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\Big) z_{\bar t}^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \\ z^{j+\frac{k}{p}}\Big|_{\gamma_{h,k}} = 0, \quad z(x,0) = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\Big(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\Big)u_{\bar t}^{\frac{s}{p}} - \frac{\varepsilon}{p}\,u_t^{j+\frac{k}{p}}.$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_k = \Big(L_k u + f_k - \frac{\varepsilon}{p}u_t - \frac{1}{p}\,\partial^\alpha_{ot}u\Big)^{j+\frac{1}{2}}$$

и замечая, что $\sum_{k=1}^p \overset{\circ}{\psi}_k = 0$, если $\sum_{k=1}^p f_k = f$, представим $\psi_k = \psi_k^{j+\frac{k}{p}}$ в виде $\psi_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k$, где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \Big(\Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} - L_k u^{j+\frac{1}{2}}\Big) + \Big(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\Big) - \Big(\frac{1}{p}\,\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}}u^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\,(\partial^\alpha_{0t}u)^{j+\frac{1}{2}}\Big) - \Big(\frac{\varepsilon}{p}\,u_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p}\,u_t^{j+\frac{1}{2}}\Big) + \overset{\circ}{\psi}_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k,$$

$$\overset{*}{\psi}_k = \Big(\Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} - L_k u^{j+\frac{1}{2}}\Big) + \Big(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\Big) - \Big(\frac{1}{p}\,\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}}u^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\,(\partial^\alpha_{0t}u)^{j+\frac{1}{2}}\Big) - \Big(\frac{\varepsilon}{p}\,u_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p}\,u_t^{j+\frac{1}{2}}\Big).$$

Ясно, что

$$\overset{*}{\psi}_k = \begin{cases} O(h_k^2+\tau) & \text{в регулярных узлах,}\\ O(1) & \text{в нерегулярных узлах,}\end{cases}$$

так как каждая из схем (19) номера k аппроксимирует в обычном смысле соответствующее уравнение (18). Таким образом,

$$\overset{*}{\psi}_k = O\big(h_k^2+\tau\big), \quad \overset{\circ}{\psi}_k = O(1), \quad \sum_{k=1}^p \overset{\circ}{\psi}_k = 0,$$

$$\psi = \sum_{k=1}^p \psi_k = \sum_{k=1}^p \Big(\overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k\Big) = \sum_{k=1}^p \overset{*}{\psi}_k = O\big(|h|^2+\tau\big)$$

в регулярных узлах сетки ω_h, т. е. ЛОС (19) обладает суммарной аппроксимацией $O(|h|^2+\tau)$ в регулярных узлах сетки ω_h. В нерегулярных узлах $\psi = O(1)$.

4. Устойчивость ЛОС

Получим априорную оценку в сеточной норме C для решения разностной задачи (19), выражающую устойчивость локально-одномерной схемы по начальным данным и правой части. Исследование устойчивости разностной схемы (19) будем проводить с помощью принципа максимума [15, с. 226], для чего решение задачи (19) представим в виде суммы

$$y = \bar y + v + w,$$

где $\bar y$ — решение однородных уравнений (19) с неоднородными краевыми и начальными условиями

$$\bar y^{\,j+\frac{k}{p}}\Big|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+\frac{k}{p}}, \quad \bar y(x,0) = u_0(x),$$

v, w — решения неоднородных уравнений (19) с однородными краевыми и начальными условиями.

Итак, получаем три задачи:

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}\,\bar{y}_{\bar{t}}^{\,j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\Big(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\Big)\bar{y}_{\bar{t}}^{\,\frac{s}{p}}=\Lambda_k\bar{y}^{\,j+\frac{k}{p}},\\ \bar{y}^{\,j+\frac{k}{p}}\Big|_{\gamma_{h,k}}=\mu^{j+\frac{k}{p}},\quad \bar{y}(x,0)=u_0(x),\end{gathered}\tag{21}$$

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}\,v_{\bar{t}}^{\,j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\Big(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\Big)v_{\bar{t}}^{\,\frac{s}{p}}=\Lambda_k v^{j+\frac{k}{p}}+\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}},\\ v^{j+\frac{k}{p}}\Big|_{\gamma_{h,k}}=0,\quad v(x,0)=0,\end{gathered}\tag{22}$$

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}\,w_{\bar{t}}^{\,j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\Big(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\Big)w_{\bar{t}}^{\,\frac{s}{p}}=\Lambda_k w^{j+\frac{k}{p}}+\overset{*}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}},\\ w^{j+\frac{k}{p}}\Big|_{\gamma_{h,k}}=0,\quad w(x,0)=0,\end{gathered}\tag{23}$$

где $\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}}$, $\overset{*}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}}$ определяются условиями

$$\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}}=\begin{cases}\varphi_k, & x\in\overset{\circ}{\omega}_h,\\ 0, & x\in\overset{*}{\omega}_h,\end{cases}\qquad \overset{*}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}}=\begin{cases}\varphi_k, & x\in\overset{*}{\omega}_h,\\ 0, & x\in\overset{\circ}{\omega}_h,\end{cases}$$

так, что $\overset{\circ}{\varphi}_k+\overset{*}{\varphi}_k=\varphi_k$ при $x\in\omega_h$, т. е. $\overset{*}{\varphi}_k$ отлична от нуля только в приграничных узлах.

Получим оценку для $\bar{y}$. Для этого запишем уравнение (21) в канонической форме. В точке $P=P(x_{i_k},t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем

$$\begin{gathered}\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}}+d_k\right]\bar{y}_{i_k}^{\,j+\frac{k}{p}}=\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}}\,\bar{y}_{i_k+1}^{\,j+\frac{k}{p}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}}\,\bar{y}_{i_k-1}^{\,j+\frac{k}{p}}\\ +\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]\bar{y}_{i_k}^{\,j+\frac{k-1}{p}}+\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\Big(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\Big)\bar{y}_{i_k}^{\,0}\right.\\ \left.+\Big(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\Big)\bar{y}_{i_k}^{\,\frac{1}{p}}+\dots+\Big(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\Big)\bar{y}_{i_k}^{\,j+\frac{k-2}{p}}\right],\end{gathered}\tag{24}$$

где $\gamma=\frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$.

Справедлива следующая лемма [19].

Лемма 1. *Пусть* $l=pj+k-1\geqslant 1$, *тогда имеет место неравенство*

$$-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}>0,\quad j=0,1,\dots,j_0-1;\quad k=2,3,\dots,p.$$

В [15] доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида:

$$\begin{gathered}A(P)y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)+F(P),\quad P\in\Omega,\\ y(P)=\mu(P)\quad\text{при}\quad P\in S,\end{gathered}$$

где P, Q — узлы сетки $\Omega+S$, $Ш'(P)$ — окрестность узла P, не содержащая самого узла P. Коэффициенты $A(P)$, $B(P,Q)$ удовлетворяют условиям

$$A(P)>0, \quad B(P,Q)>0, \quad D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)} B(P,Q)\geqslant 0. \tag{25}$$

Обозначим через $P(x,t')$, где $x\in\omega_h$, $t'\in\omega'_\tau$, узел $(p+1)$-мерной сетки $\Omega=\omega_h\times\omega'_\tau$; S — границу Ω, состоящую из узлов $P(x,0)$ при $x\in\bar\omega_h$ и узлов $P\Big(x,t_{j+\frac{k}{p}}\Big)$ при $t_{j+\frac{k}{p}}\in\omega'_\tau$ и $x\in\gamma_{h,k}$ для всех $k=1,2,\ldots,p$, $j=0,1,\ldots,j_0$; $\overset{*}{\Omega}_k$ — множество узлов $P\Big(x,t_{j+\frac{k}{p}}\Big)$, где $x\in\overset{*}{\omega}_{h,k}$ — приграничный по направлению x_k узел сетки $\bar\omega_h$.

Проверим выполнимость условий теоремы 3 из [16, с. 344], опираясь на лемму 1. Тогда, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках, имеем, что коэффициенты уравнения (24) в точке $P=P\Big(x_{i_k},t_{j+\frac{k}{p}}\Big)$ удовлетворяют условиям (25) и $D(P)=0$.

Из [16, с. 344, теорема 3] следует, что для решения задачи (21) верна оценка

$$\left\|\bar y^j\right\|_C\leqslant\|u_0\|_C+\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left\|\mu(x,t')\right\|_{C_\gamma}, \tag{26}$$

где $\|y\|_C=\max_{x\in\bar\omega_h}|y|$, $\|y\|_{C_\gamma}=\max_{x\in\gamma_h}|y|$.

Переходим к оценке функции v. Уравнение (22) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\left(\frac{\varepsilon}{p}+\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{\tau}{p}\right)^{1-\alpha}\right)v_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}=\Lambda_k v^{j+\frac{k}{p}}+\widetilde{\varphi}_k^{\,j+\frac{k}{p}},\\ v^{j+\frac{k}{p}}\Big|_{\gamma_{h,k}}=0,\quad v(x,0)=0,\end{gathered} \tag{27}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_k^{\,j+\frac{k}{p}}=\overset{\circ}{\varphi}_k^{\,j+\frac{k}{p}}-\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-1}\Big(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\Big)v_{\bar t}^{\frac{s}{p}}.$$

Уравнение (27) приведем к каноническому виду:

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}}+d_k\right]v_{i_k}^{j+\frac{k}{p}}=\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}}\,\nu_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}}\,\nu_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}}+\Phi\Big(P_{j+\frac{k}{p}}\Big),$$

где

$$\Phi\big(P_{j+\frac{k}{p}}\big)=\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]v_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+\bar\varphi_k^{\,j+\frac{k}{p}},$$

$$\begin{aligned}\bar\varphi_k^{\,j+\frac{k}{p}}=\overset{\circ}{\varphi}_k^{\,j+\frac{k}{p}}&+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\,\frac{1}{\tau}\Big(t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\Big)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\\ &-\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\Big(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\Big)\Big(v_{i_k}^{\frac{s}{p}}-v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}}\Big).\end{aligned}$$

Проверим выполнимость условий теоремы 4 из [16, с. 347]:

$$\begin{gathered}D'(P_{(k)})=A(P_{(k)})-\sum_{Q\in Ш'_k(P)}B(P_{(k)},Q)=\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+d_k\geqslant\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}>0,\\ P_{(k)}=P\Big(x,t_{j+\frac{k}{p}}\Big),\quad A(P_{(k)})>0,\quad B(P_{(k)},Q)>0,\end{gathered} \tag{28}$$

для всех $Q \in Ш''_{k-1}$, $Q \in Ш'_k$,

$$\sum_{Q\in Ш''_{k-1}} B(P_{(k)}, Q) = \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right) > 0,$$

$$\frac{1}{D'(P_{(k)})} \sum_{Q\in Ш''_{k-1}} B(P_{(k)}, Q) = \frac{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^\alpha}}{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}} \leqslant 1,$$

где $Ш'\big(P\big(x, t_{j+\frac{k}{p}}\big)\big) = Ш'_k + Ш'_{k-1}$, $Ш'_k$ — множество узлов $Q = Q(\xi, t_k) \in Ш'(P\,(x, t_k))$, $Ш'_{k-1}$ — множество узлов $Q = Q(\xi, t_{k-1}) \in Ш'(P(x, t_{k-1}))$.

На основании [16, с. 347, теорема 4], в силу (28) получаем оценку для v:

$$\left\|v^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C \leqslant \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}} \left\|\bar\varphi_k^{\,j+\frac{k}{p}}\right\|_C + \frac{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^\alpha}}{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}} \left\|v^{j+\frac{k-1}{p}}\right\|_C. \tag{29}$$

Оценим $\left\|\bar\varphi_k^{\,j+\frac{k}{p}}\right\|_C$, где

$$\begin{aligned}\bar\varphi_k^{\,j+\frac{k}{p}} &= \overset{\circ}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} - \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k-2} \left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) v_{\bar t}^{\frac{s}{p}} \\ &= \overset{\circ}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right)v^0_{i_k} + \left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right)v_{i_k}^{\frac{1}{p}}\right. \\ &\qquad\left. + \ldots + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right].\end{aligned} \tag{30}$$

Так как, в силу леммы 1, выражения, стоящие в круглых скобках, положительны, то из (30) получаем оценку

$$\left\|\bar\varphi_k^{\,j+\frac{k}{p}}\right\|_C \leqslant \left\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}}\right\|_C + \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right) \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\ \max_{0\leqslant s\leqslant k-2} \left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C. \tag{31}$$

С помощью (31) из (29) находим

$$\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\ \max_{0\leqslant s\leqslant k} \left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C \leqslant \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\ \max_{0\leqslant s\leqslant k-1} \left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C + \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \max_{0\leqslant s\leqslant k} \left\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{s}{p}}\right\|_C. \tag{32}$$

Просуммировав (32) сначала по $k = 1, 2, \ldots, p$, затем по $j' = 0, 1, \ldots, j$, получим оценку

$$\left\|v^{j+1}\right\|_C \leqslant \left\|v^0\right\|_C + \sum_{j'=0}^{j} \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{p} \max_{0\leqslant s\leqslant k} \left\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{\,j'+\frac{s}{p}}\right\|_C. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь задачу (23) для w. Перепишем задачу (23) в каноническом виде:

$$\begin{gathered}\left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} + d_k\right] w_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}\, w_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}\, w_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} \\ + \left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right)\right] w_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right)w^0_{i_k}\right. \\ \left. + \left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right)w_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \ldots + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)w_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right] + \overset{*}{\varphi}{}_k^{\,j+\frac{k}{p}}, \\ w^{j+\frac{k}{p}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \gamma_{h,k}, \qquad w(x, 0) = 0,\end{gathered}$$

т. е. $w = 0$ на границе S сетки Ω, значит $w(P) = 0$ при $P \in S$.

Правая часть $\overset{*}{\varphi}$ отлична от нуля лишь в узлах (x,t'), где $x\in\overset{*}{\omega}_h$. В этих узлах в силу однородного краевого условия $w=0$ имеем

$$D(P)=\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}+d_k>0.$$

На основании [16, с. 347, теорема 4] получаем

$$\max_{\Omega+S}|w(P)|\leqslant\max_{t'\in w_\tau}\left\|\frac{\overset{*}{\varphi}(x,t')}{D}\right\|_{\overset{*}{C}}\leqslant\max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}+\tau d_k}\leqslant\max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}. \tag{34}$$

Из оценок (26), (33) и (34) следует окончательная оценка

$$\begin{gathered}\|y^{j+1}\|_C\leqslant\|u_0\|_C+\max_{0<t'\leqslant t_j}\|\mu(x,t')\|_{C_\gamma}+\max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\\+\sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\left\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_{\overset{\circ}{C}},\end{gathered} \tag{35}$$

где

$$h=\max_{1\leqslant k\leqslant p}h_k,\quad \|y\|_C=\max_{x\in\omega_h}|y|,\quad \|y\|_{C_\gamma}=\max_{x\in\gamma_h}|y|,\quad \|\varphi\|_{\overset{*}{C}}=\max_{x\in\overset{*}{\omega}_h}|\varphi|,\quad \|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}}=\max_{x\in\overset{\circ}{\omega}_h}|\varphi|.$$

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Локально-одномерная схема* (19) *устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи* (19) *справедлива оценка* (35).

5. Равномерная сходимость ЛОС

Чтобы использовать свойство $\sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k=0$, $\overset{\circ}{\psi}=O(1)$, представим, по аналогии с [15], решение задачи для погрешности (20) в виде суммы $z_{(k)}=v_{(k)}+\eta_{(k)}$, $z_{(k)}=z^{j+\frac{k}{p}}$, где $\eta_{(k)}$ определяется условиями

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}\eta_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=\overset{\circ}{\psi}_k,\quad x\in\omega_h+\gamma_{h,k},\ k=1,2,\dots,p,\\ \eta(x,0)=0.\end{gathered} \tag{36}$$

Функция $v_{(k)}$ определяется условиями

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}v_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=\Lambda_k v_{(k)}+\widetilde{\psi}_k,\\ v_{(k)}\big|_{\gamma_{h,k}}=-\eta_{(k)},\quad v(x,0)=0,\end{gathered} \tag{37}$$

где $\widetilde{\psi}_k=\overset{*}{\psi}_k+\Lambda_k\eta_{(k)}$, $\overset{*}{\psi}_k=O(h_k^2+\tau)$.

Покажем, что

$$\eta^{j+\frac{k}{p}}=O\Big(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\Big),\quad k=1,2,\dots,p,\ j=0,1,2,\dots,j_0-1.$$

Ради простоты рассмотрим двумерный случай ($p = 2$). Сначала положим $j = 0$, т. е. рассмотрим первый слой $(0, t_1]$. Тогда задача (36) примет вид

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\eta_{\bar t}^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{k}\Big(t^{1-\alpha}_{\frac{k-s+1}{2}} - t^{1-\alpha}_{\frac{k-s}{2}}\Big)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\psi}_k, \quad k = 1, 2.$$

Пусть $k = 1$, тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\,t^{1-\alpha}_{\frac{1}{2}}\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} = \overset{\circ}{\psi}_1\,. \tag{38}$$

При $k = 2$ получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\eta_{\bar t}^{1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\Big(t^{1-\alpha}_{1} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{2}}\Big)\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} + t^{1-\alpha}_{\frac{1}{2}}\eta_{\bar t}^{1}\right] = \overset{\circ}{\psi}_2\,. \tag{39}$$

Складывая выражения (38) и (39), получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\,\eta_{\bar t}^{1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\,\frac{1}{\tau^{\alpha}}\left[\left(1 - \frac{1}{2^{1-\alpha}}\right)\eta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{1-\alpha}}\,\eta^{1}\right] = 0. \tag{40}$$

Из (38) находим

$$\eta^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\,\overset{\circ}{\psi}_1 = -\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\,\overset{\circ}{\psi}_2, \tag{41}$$

где $\gamma = \frac{1}{2^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$.

Выражая η^1 из (40) и учитывая (41), получаем $\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^1 = O\big(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\big)$.

Допустим, что при $j = n$ выполнено условие

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^{1}, \eta^{1+\frac{1}{2}}, \ldots, \eta^{n+1} = O\Big(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\Big). \tag{42}$$

Опираясь на допущение (42), покажем, что аналогичное условие выполнено и при $j = n + 1$. Для чего запишем уравнение (36) при $j = n + 1$, $p = 2$:

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\eta_{\bar t}^{n+1+\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{2(n+1)+k}\Big(t^{1-\alpha}_{n+1+\frac{k-s+1}{2}} - t^{1-\alpha}_{n+1+\frac{k-s}{2}}\Big)\,\eta_{\bar t}^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\psi}_k, \quad k = 1, 2. \tag{43}$$

Полагая в (43) $k = 1$, находим

$$\begin{gathered}\tau^{1-\alpha}\left[\left(n + \frac{3}{2}\right)^{1-\alpha} - 2\,(n+1)^{1-\alpha} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\right]\eta^{\frac{1}{2}} \\ + \tau^{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - 2\left(n + \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} + n^{1-\alpha}\right]\eta^{1} + \ldots \\ - \Gamma(2-\alpha)\Big(\varepsilon - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\,(1-2^{\alpha})\Big)\eta^{n+1} + \Gamma(2-\alpha)\left(\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}\right)\eta^{n+\frac{3}{2}} = 2\Gamma(2-\alpha)\tau\,\overset{\circ}{\psi}_1\,.\end{gathered} \tag{44}$$

Откуда, с учетом (42) и достаточной ограниченности коэффициентов при $\eta^{\frac{1}{2}}$, η^1, …, $\eta^{n+\frac{3}{2}}$, находим $\eta^{n+\frac{3}{2}} = O\big(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\big)$.

Положим теперь в (43) $k = 2$, затем сложим полученное таким образом выражение с выражением (44) с учетом равенства $\overset{\circ}{\psi}_1 + \overset{\circ}{\psi}_2 = 0$. Тогда получим

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^1, \ldots, \eta^{n+1}, \eta^{n+\frac{3}{2}}, \eta^{n+2} = O\Big(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\Big). \tag{45}$$

Итак, равенство (45) выполнено при любом значении j. Нетрудно заметить, что аналогично можно показать, что

$$\eta^{j+\frac{k}{p}} = O\Big(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\Big), \quad k = 1, 2, \ldots, p, \ j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1.$$

Для оценки решения задачи (37) воспользуемся теоремой 1:

$$\big\|v^{j+1}\big\|_C \leqslant \max_{0<j'+\frac{k}{p}\leqslant j+1} \left(\frac{\tau\big\|\widetilde{\psi}\,\big\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} + \Big\|\eta^{j'+\frac{k}{p}}\Big\|_{C_\gamma}\right) + \sum_{j'=0}^{j} \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{p} \max_{0\leqslant s\leqslant k} \Big\|\widetilde{\psi}_k^{\,j'+\frac{s}{p}}\Big\|_C, \tag{46}$$

где $\widetilde{\psi}_k = \overset{*}{\psi}_k + \Lambda_k \eta_{(k)}$.

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}$, $k \neq \nu$, то

$$\Lambda_k \eta_{(k)} = -\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\, a_k \Lambda_k \Big(\overset{\circ}{\psi}_{k+1} + \cdots + \overset{\circ}{\psi}_p\Big) = O\Big(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\Big)$$

во всех узлах $x \in \omega_h$, так как $\eta_{(k)}$ определяется из уравнения (36) всюду в $\omega_h + \gamma_h$, где a_k — известные постоянные. С другой стороны, имеем $\overset{*}{\psi}_k = O\big(h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\big)$ в регулярных узлах ω_h и $\overset{*}{\psi}_k = O(1)$ в нерегулярных узлах сетки. Поэтому

$$\frac{\tau\big\|\widetilde{\psi}\,\big\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} = O\Big(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\Big), \quad \Big\|\widetilde{\psi}_k^{\,j'+\frac{s}{p}}\Big\|_C = O\Big(h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\Big).$$

Тогда из оценки (46) находим, что

$$\begin{aligned}\big\|v^{j+1}\big\|_C &\leqslant M\Big(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} + p\,\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \sum_{j'=0}^{j} \Big(h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\Big)\Big) \\ &\leqslant M_1\Big(\frac{h^2}{\varepsilon + \tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon + \tau^{1-\alpha})^2}\Big), \quad h = \max_{1\leqslant k\leqslant p} h_k.\end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\big\|z^{j+1}\big\|_C \leqslant \big\|\eta^{j+1}\big\|_C + \big\|v^{j+1}\big\|_C \leqslant O\left(\frac{h^2}{\varepsilon + \tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon + \tau^{1-\alpha})^2}\right).$$

Итак, справедлива теорема.

Теорема 2. *Пусть задача (4)–(6) имеет единственное непрерывное решение $u(x,t)$ в $\overline{Q}_T$ при всех значениях ε и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \quad \frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \quad \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \quad \frac{\partial^{2+\alpha} u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2},$$
$$\Theta_k(x,t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T), \quad q_k(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T), \quad 1 \leqslant k, \quad \nu \leqslant p, \quad k \neq \nu, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда решение разностной задачи (19) *равномерно сходится к решению дифференциальной задачи* (1)–(3) *со скоростью*

$$O\Big(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}}+\frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2}+\varepsilon\Big),\quad h^2=o\big(\varepsilon+\tau^{1-\alpha}\big),\ \tau=o\big(\big(\varepsilon+\tau^{1-\alpha}\big)^2\big),$$

где ε *— малый параметр.*

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если

$$\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}}+\frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2}=\varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon=\tau^\gamma$, тогда из последнего получаем

$$h^2\left(\tau^\gamma+\tau^{1-\alpha}\right)+\tau=\tau^\gamma\left(\tau^\gamma+\tau^{1-\alpha}\right)^2.$$

Следовательно, $\min\{\gamma,1-\alpha\}=\frac{1-\gamma}{2}$, откуда получаем, что

$$\varepsilon=\begin{cases}\tau^{\frac{1}{3}}, & 0<\alpha\leqslant\dfrac{2}{3},\\ \tau^{2\alpha-1}, & \dfrac{2}{3}<\alpha<1.\end{cases}\tag{47}$$

Итак, справедлива следующее

Следствие 1. *Если* ε *определяется из условия* (47), *тогда решение разностной задачи* (19) *равномерно сходится к решению дифференциальной задачи* (1)–(3) *со скоростью*

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{\frac{1}{3}}}+\tau^{\frac{1}{3}}\right),\quad \textit{если}\quad 0<\alpha\leqslant\frac{2}{3},$$

и

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right),\quad \textit{если}\quad \frac{2}{3}<\alpha<1.$$

Литература

1. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus.—N. Y.–London: Academic Press, 1974.—234 p.
2. *Miller K. S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.—N. Y.: John Wiley and Sons. Inc., 1993.—376 p.
3. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
4. *Шогенов В. Х., Кумыкова С. К., Шхануков-Лафишев М. Х.* Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Докл. Адыгск. (Черкесск.) Междунар. АН.—1996.—Т. 2, № 1.—С. 43–45.
5. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations.—San-Diego: Academic Press, 1999.—368 p.
6. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
7. *Кочубей А. Ю.* Диффузия дробного порядка // Диф. уравнения.—1990.—Т. 26, № 4.—С. 660–670.
8. *Мальшаков А. В.* Уравнения гидродинамики для пористых сред со структурой порового пространства, обладающей фрактальной геометрией // Инж.-Физ. журн.—1992.—Т. 62, № 3.—С. 405–410.
9. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных.—Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008.—512 с.
10. *Тарасов В. Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка.—Ижевск: Ижевский ин-т компьют. исслед., 2011.—568 р.
11. *Douglas J., Rachford H. H.* On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables // Trans. Amer. Math. Soc.—1956.—Vol. 82, № 2.—P. 421–439. DOI: 10.1090/s0002-9947-1956-0084194-4.
12. *Peaceman D. W., Rachford H. H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Industr. Appl. Math.—1955.—Vol. 3, № 1.—P. 28–41. DOI: 10.1137/0103003.

13. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.—Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1967.—196 с.
14. *Самарский А. А.* Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—1962.—Т. 2, № 5.—С. 787–811.
15. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—617 с.
16. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.
17. *Марчук Г. И.* Методы расщепления.—М.: Наука, 1988.—264 с.
18. *Дьяконов Е. Г.* Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—1962.—Т. 2, № 4.—С. 549–568.
19. *Лафишева М. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2008.—Т. 48, № 10.—С. 1878–1887.
20. *Ашабоков Б. А., Бештокова З. В., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения переноса примесей дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2017.—Т. 57, № 9.—С. 1517–1529. DOI: 10.7868/S0044466917090046.
21. *Баззаев А. К., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии с дробной производной по времени в области произвольной формы // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2016.—Т. 56, № 1.—С. 113–123. DOI: 10.7868/S0044466916010063.
22. *Бештокова З. В., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная разностная схема третьей краевой задачи для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником // Диф. уравнения.—2018.—Т. 54, № 7.—С. 891–901. DOI: 10.1134/S0374064118070051.
23. *Бештокова З. В., Лафишев М. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерные разностные схемы для параболических уравнений в средах, обладающих «памятью» // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2018.—Т. 58, № 9.—С. 1531–1542. DOI: 10.31857/S004446690002531-5.
24. *Бештоков М. Х., Водахова В. А.* Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки.—2019.—Т. 29, № 4.—С. 459–482. DOI: 10.20537/vm190401.
25. *Нахушева Ф. М., Водахова В. А., Кудаева Ф. Х., Абаева З. В.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // Современные проблемы науки и образования.—2015.—№ 2–1.—С. 763.
26. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5 (77).—С. 3–122.
27. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы.—М.: Наука, 1977.—439 с.
28. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Диф. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658–664.

Статья поступила 5 августа 2021 г.

Бештокова Зарьяна Владимировна
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
младший научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360004, Нальчик, Шортанова, 89 А
E-mail: `zarabaeva@yandex.ru`

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360004, Нальчик, Шортанова, 89 А
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов
РОССИЯ, 360004, Нальчик, Шортанова, 89 А
E-mail: `lafishev@yandex.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 3, P. 37–54

ON A DIFFERENCE SCHEME FOR SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR DIFFUSION EQUATION WITH A FRACTIONAL CAPUTO DERIVATIVE IN THE MULTIDIMENSIONAL CASE IN A DOMAIN WITH AN ARBITRARY BOUNDARY

Beshtokova, Z. V.[1], Beshtokov, M. Kh.[1] and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.[1]

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360004, Russia

E-mail: zarabaeva@yandex.ru, beshtokov-murat@yandex.ru, lafishev@yandex.ru

Abstract. In this paper, we study the Dirichlet problem for the diffusion equation with a fractional Caputo derivative in the multidimensional case in a domain with an arbitrary boundary. Instead of the original equation, we consider the diffusion equation with a fractional Caputo derivative with a small parameter. A locally one-dimensional difference scheme of A. A. Samarsky, the main essence of which is to reduce the transition from layer to layer to the sequential solution of a number of one-dimensional problems in each of the coordinate directions. Moreover, each of the auxiliary problems may not approximate the original problem, but in the aggregate and in special norms such an approximation takes place. These methods have been called splitting methods. Using the maximum principle, we obtain an a priori estimate in the uniform metric norm. The stability of the locally one-dimensional difference scheme and the uniform convergence of the approximate solution of the proposed difference scheme to the solution of the original differential problem for any $0 < \alpha < 1$ are proved. An analysis is made of the choice of optimal values of ε, at which the rate of uniform convergence of the approximate solution of the considered difference scheme to the solution of the original differential problem will be determined in the best way.

Key words: generalized equation, convection-diffusion equation, fractional order equation, fractional derivative in the sense of Caputo, maximum principle, locally one-dimensional scheme, stability and convergence, boundary value problems, a priori estimate.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12.

For citation: *Beshtokova, Z. V., Beshtokov, M. Kh. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* On a Difference Scheme for Solution of the Dirichlet Problem for Diffusion Equation with a Fractional Caputo Derivative in the Multidimensional Case in a Domain with an Arbitrary Boundary, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 37–54 (in Russian). DOI: 10.46698/v2914-8977-8335-s.

References

1. *Oldham, K. B., Spanier, J. The Fractional Calculus*, New York–London, Academic Press, 1974, 234 p.
2. *Miller, K. S. and Ross, B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York, John Wiley and Sons. Inc., 1993, 376 p.
3. *Nakhushev, A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and its Application], Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian).
4. *Shogenov, V. Kh., Kumykova, S. K. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* Generalized Transport Equation and Fractional Derivatives, *Adyghe International Scientific Journal*, 1996, vol. 2, no. 1, pp. 43–45. (in Russian).
5. *Podlubny, I. Fractional Differential Equations*, San-Diego, Academic Press, 1999, 368 p.
6. *Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications], Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian)
7. *Kochubey, A. Yu.* Fractional-Order Diffusion, *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 485–492.
8. *Mal'shakov, A. V.* Hydrodynamic Equations for Porous Media with a Pore Space Structure with Fractal Geometry, *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*, 1992, vol. 62, no. 3, pp. 405–410 (in Russian).
9. *Uchaykin, V. V. Metod drobnykh proizvodnykh* [Fractional Derivatives Method], Ul'yanovsk, Publishing House "Artishok", 2008, 512 p. (in Russian).

10. *Tarasov, V. E. Modeli teoreticheskoy fiziki s integro-differentsirovaniyem drobnogo poryadka* [Theoretical Physics Models with Integro-Differentiation of Fractional Order], Izhevsk, Izhevsk Institute of Computer Science, 2011, 568 p. (in Russian).
11. *Douglas, J. and Rachford, H. H.* On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1956, vol. 82, no. 2, pp. 421–43. DOI: 10.1090/s0002-9947-1956-0084194-4.
12. *Peaceman, D. W. and Rachford, H. H.* The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1955, vol. 3, no 1, pp. 28–41. DOI: 10.1137/0103003.
13. *Yanenko, N. N. Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki* [The Method of Fractional Steps for Solving Multidimensional Problems of Mathematical Physics], Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch, 1967, 196 p. (in Russian).
14. *Samarskii, A. A.* On an Economical Difference Method for the Solution of a Multidimensional Parabolic Equation in an Arbitrary Region, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 2, no 5, pp. 894–926. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90504-4.
15. *Samarskii, A. A. Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).
16. *Samarskii, A. A. and Gulin, A. B. Ustoychivost' raznostnykh skhem* [The Stability of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1973, 415 p. (in Russian).
17. *Marchuk, G. I. Metody rasshchepleniya* [Splitting Methods], Moscow, Nauka, 1988, 264 p. (in Russian).
18. *D'yakonov, Ye. G.* Difference Schemes with a "Disintegrating" Operator for Multidimensional Problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 2, no 4, pp. 581–607. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90531-7.
19. *Lafisheva, M. M. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* Locally One-Dimensional Difference Schemes for the Fractional Order Diffusion Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 10, pp. 1875–1884. DOI: 10.1134/S0965542508100102.
20. *Ashabokov, B. A., Beshtokova, Z. V. and Shkhanukov-Lafyshev, M. Kh.* Locally One-Dimensional Difference Scheme for a Fractional Tracer Transport Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 9, pp. 1498–1510. DOI: 10.1134/S0965542517090044.
21. *Bazzaev, A. K. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* Locally One-Dimensional Schemes for the Diffusion Equation with a Fractional Time Derivative in an Arbitrary Domain, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 106–115. DOI: 10.1134/S0965542516010061.
22. *Beshtokova, Z. V. and Shkhanukov-Lafyshev, M. Kh.* Locally One-Dimensional Difference Scheme for the Third Boundary Value Problem for a Parabolic Equation of the General Form with a Nonlocal Source, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 7, pp. 870–880. DOI: 10.1134/S0012266118070042.
23. *Beshtokova, Z. V., Lafyshev, M. M. and Shkhanukov-Lafyshev, M. Kh.* Locally One-Dimensional Difference Schemes for Parabolic Equations in Media Possessing Memory, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 9, pp. 1477–1488. DOI: 10.1134/S096554251809004X.
24. *Beshtokov, M. Kh. and Vodakhova, V. A.* Nonlocal Boundary Value Problems for a Fractional-Order Convection-Diffusion Equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 459–482 (in Russian). DOI: 10.20537/vm190401.
25. *Nakhusheva, F. M., Vodakhova, V. A., Kudaeva, F. Kh. and Abaeva, Z. V.* Locally One-Dimensional Difference Scheme for the Fractional-Order Diffusion Equation with a Concentrated Heat Capacity, *Modern Problems of Science and Education*, 2015, no. 2–1, p. 763 (in Russian).
26. *Vishik, M. I. and Lyusternik, L. A.* Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with a Small Parameter, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5 (77), pp. 3–122 (in Russian).
27. *Godunov, S. K. and Ryaben'kiy, V. S. Raznostnyye skhemy* [Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1977, 439 p. (in Russian).
28. *Alikhanov, A. A.* A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no 5, pp. 660–666. DOI: 10.1134/S0012266110050058.

Received August 5, 2021

Zaryana V. Beshtokova
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova Str., Nalchik 360000, Russia,
Junior Researcher Computational Methods Department
E-mail: zarabaeva@yandex.ru

Murat Kh. Beshtokov
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova Str., Nalchik 360000, Russia,
Leading Researcher Computational Methods Department
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Mukhamed Kh. Shkhanukov-Lafishev
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova Str., Nalchik 360000, Russia,
Chief Researcher of the Department of
Mathematical Modeling of Geophysical Processes
E-mail: lafishev@yandex.ru