Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 3, С. 87–95

УДК 512.62
DOI 10.46698/x8972-0209-8824-c

СТРОЕНИЕ СЕТЕЙ НАД КВАДРАТИЧНЫМИ ПОЛЯМИ[#]

С. С. Икаев[1], **В. А. Койбаев**[1,2], **А. О. Лихачева**[3]

[1] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
[3] Сибирский федеральный университет,
Россия, 660041, Красноярск, Свободный проспект, 79

E-mail: ikaev.sar@yandex.ru, koibaev-K1@yandex.ru, likhacheva.alyona@mail.ru

Аннотация. Исследуется структура сетей над квадратичными полями. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ — квадратичное поле, $\mathfrak{D}$ — кольцо целых поля K. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп поля K называется сетью (ковром) над K порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется неприводимой, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. Сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется D-сетью, если $1 \in \tau_{ii}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая D-сеть порядка $n \geqslant 2$ над K, причем σ_{ij} — $\mathfrak{D}$-модули. Мы доказываем, что с точностью до сопряжения диагональной матрицей все σ_{ij} являются дробными идеалами фиксированного промежуточного подкольца P, $\mathfrak{D} \subseteq P \subseteq K$, а все диагональные кольца совпадают с кольцом P: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \ldots = \sigma_{nn} = P$, причем $\sigma_{ij} \subseteq P$ — целые идеалы кольца P при любых $i < j$, если же $i > j$, то $P \subseteq \sigma_{ij}$. Для любых i, j мы имеем $\sigma_{1j} \subseteq \sigma_{ij}$.

Ключевые слова: сети, ковры, поле алгебраических чисел, квадратичное поле.

AMS Subject Classification: 20G15.

Образец цитирования: *Икаев С. С., Койбаев В. А., Лихачева А. О.* Строение сетей над квадратичными полями // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 3.—С. 87–95. DOI: 10.46698/x8972-0209-8824-c.

1. Введение

Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ — квадратичное поле, $\mathfrak{D}$ — кольцо целых поля K, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая сеть порядка $n \geqslant 2$ над K, причем σ_{ij} — $\mathfrak{D}$-модули. Работа посвящена описанию сетей $\sigma = (\sigma_{ij})$ над квадратичным полем $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$, причем аддитивные подгруппы σ_{ij} — ненулевые $\mathfrak{D}$-модули. Доказано, что с точностью до сопряжения диагональной матрицей все σ_{ij} являются дробными идеалами фиксированного промежуточного подкольца P, $\mathfrak{D} \subseteq P \subseteq K$, а все диагональные кольца σ_{ii}, $1 \leqslant i \leqslant n$, совпадают с кольцом P.

В [1] для некоторого класса квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$, точнее, для чисел d, равных

$$-1,\quad -2,\quad -3,\quad -7,\quad -11,\quad -19,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 6,\quad 7,$$
$$11,\quad 13,\quad 17,\quad 19,\quad 21,\quad 29,\quad 33,\quad 37,\quad 41,\quad 57,\quad 73,$$

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2022-890.

доказано, что с точностью до сопряжения диагональной матрицей из $D(n,K)$ все σ_{ij} являются идеалами фиксированного промежуточного подкольца P, $\mathfrak{D}\subseteq P\subseteq K$. В перечисленных случаях кольцо целых $\mathfrak{D}$ квадратичного поля K является областью главных идеалов (см. [2, гл. III, § 2]), а потому при описании сетей можно воспользоваться результатами работы [3], в которой получено полное описание сетей и элементарных сетей над полем частных области главных идеалов. Кольцо целых $\mathfrak{D}$ произвольного квадратичного поля $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ не всегда является областью главных идеалов. Так, например, кольца целых полей $\mathbb{Q}\sqrt{-5}\,)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-6}\,)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-23}\,)$ (см. [2, с. 187–189]) не являются областями главных идеалов. В общем случае кольцо целых $\mathfrak{D}$ квадратичного поля $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ является дедекиндовой областью (см. [4, гл. 9, теорема 9.5]), а потому является, в частности, областью главных идеалов. Этим определяется актуальность предложенного исследования.

2. Кольцо целых квадратичного поля

Квадратичным полем мы называем расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ степени 2. Всякое квадратичное поле имеет вид $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где $d\neq 1$ — некоторое целое рациональное число, свободное от квадратов (см. [2, гл. II, § 7, п. 1]). Множество всех целых алгебраических чисел поля K является подкольцом $\mathfrak{D}$ поля K (см. [2, алгебраическое дополнение, § 4]), которое называется кольцом целых поля K (см. также [2, гл. II, § 2, п. 4, с. 109]).

Наша работа посвящена исследованию сетей над квадратичными полями, поэтому напомним некоторые определения. Система $\sigma=(\sigma_{ij})$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} поля K называется *сетью* (*ковром*) [5, 6] над полем K порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj}\subseteq\sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ мы называем *неприводимой*, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. Через $D(n,K)$ обозначим группу обратимых диагональных $n\times n$ матриц над полем K. По сети σ и любой матрице $d=\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ из $D(n,K)$ можно определить сопряженную сеть $\pi=d\sigma d^{-1}$, где $\pi_{ij}=\varepsilon_i\sigma_{ij}\varepsilon_j^{-1}$. Сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ порядка $n\geqslant 2$ над K назовем *D-сетью*, если $1\in\sigma_{ii}$, $1\leqslant i\leqslant n$. Из сетевого условия следует, что все диагональные аддитивные подгруппы σ_{ii} D-сети σ являются кольцами с единицей.

В настоящей работе мы рассматриваем неприводимые D-сети $\sigma=(\sigma_{ij})$ аддитивных подгрупп σ_{ij} над квадратичнным полем $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, причем аддитивные подгруппы σ_{ij} — ненулевые $\mathfrak{D}$-модули ($\mathfrak{D}$ — кольцо целых поля K).

Предложение 1 [2, гл. II, § 7, теорема 1]**.** *Пусть $d\neq 1$ — целое рациональное число, свободное от квадратов. Кольцо целых $\mathfrak{D}$ квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ совпадает с кольцом*

$$\mathfrak{D}=\mathbb{Z}[\theta]=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta=\big\{x+y\theta:\ x,y\in\mathbb{Z}\big\},$$

где $\theta=\sqrt{d}$ при $d\equiv 2,3(\mathrm{mod}\,4)$ и $\theta=\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ при $d\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$.

При $d\equiv 2,3(\mathrm{mod}\,4)$ мы имеем $\theta=\sqrt{d}$ и θ удовлетворяет уравнению $x^2-d=0$. Если же $d\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, то θ удовлетворяет уравнению $x^2-x+\frac{1-d}{4}=0$. Заметим, что $\frac{1}{\theta}=\frac{4(1-\theta)}{1-d}$.

Предложение 2. *Пусть R — промежуточное кольцо, $\mathfrak{D}\subseteq R\subseteq K$. Тогда либо $R=K$, либо R является дедекиндовой областью и совпадает с кольцом частных $R=S^{-1}\mathfrak{D}$ для некоторой мультипликативной системы $S\subseteq\mathfrak{D}$.*

$\lhd$ Пусть $R\neq K$. Согласно [4, теорема 9.5] кольцо целых $\mathfrak{D}$ является дедекиндовой областью, причем группа классов идеалов (фактор-группа дробных идеалов по подгруппе главных дробных идеалов) кольца $\mathfrak{D}$ конечна (см. замечание из [4, гл. 9]). Поэтому некоторая степень всякого идеала кольца $\mathfrak{D}$ является главным идеалом кольца $\mathfrak{D}$. Таким образом, выполнены все условия следствия 2.6 из [7], согласно которому всякое промежуточное кольцо R, $\mathfrak{D} \subseteq R \subseteq K$, совпадает с кольцом частных $R = S^{-1}\mathfrak{D}$ для некоторой мультипликативной системы $S \subseteq \mathfrak{D}$ (см. [4, гл. 9, упражнение 1]). $\triangleright$

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [4, предложение 3.11 (1)]).

Лемма 1. *Пусть R — область целостности, K — поле частных кольца R. Рассмотрим кольцо частных $S^{-1}R$ (для некоторой мультипликативной системы S кольца R). Всякий идеал кольца $S^{-1}R$ имеет вид $S^{-1}\mathfrak{A}$ для некоторого (целого) идеала $\mathfrak{A}$ кольца R.*

Из леммы 1 и предложения 2 вытекает следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть R — промежуточное кольцо, $\mathfrak{D} \subseteq R \subseteq K$, $R = S^{-1}\mathfrak{D}$ (здесь S — мультипликативная система, $S \subseteq \mathfrak{D}$). Тогда всякий идеал кольца R имеет вид $S^{-1}\mathfrak{A}$ для некоторого (целого) идеала $\mathfrak{A}$ кольца целых $\mathfrak{D}$ квадратичного поля K.*

Определение 1 [4, гл. 9]. Пусть R — область целостности и K — ее поле частных. R-модуль $M \subseteq K$ называется *дробным идеалом* кольца R, если $xM \subseteq R$ для некоторого ненулевого элемента $x \in K$.

Если мы положим $xM = \mathfrak{A} \subseteq R$, то, очевидно, $\mathfrak{A}$ — целый идеал кольца R и $M = x^{-1}\mathfrak{A}$. Следовательно, всякий дробный идеал имеет вид $t\mathfrak{A}$, $t \in K$, для некоторого целого идеала $\mathfrak{A}$ кольца R. Идеал вида tR, $t \in K$, называется главным дробным идеалом.

3. D-сети второго порядка

В [7] дается следующее определение. Пусть R — произвольная область и K ее поле частных. Будем говорить, что область R обладает (QR)-свойством, если всякое промежуточное подкольцо, лежащее между R и K является кольцом частных кольца R.

Лемма 2 [7, следствие 2.6]. *Если R — нетерова область, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *R обладает (QR)-свойством;*

(2) *R — дедекиндова область и группа классов идеалов кольца R — периодическая.*

Напомним (см. доказательство предложения 2), что кольцо целых $\mathfrak{D}$ — дедекиндова область и группа классов идеалов кольца $\mathfrak{D}$ конечна, поэтому из леммы 2 следует, что кольцо целых $\mathfrak{D}$ обладает (QR)-свойством.

Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ — D-сеть порядка 2 над полем K, причем все σ_{ij} являются ненулевыми $\mathfrak{D}$-модулями (здесь $\mathfrak{D}$ — кольцо целых поля K). Мы покажем, что кольца (с 1) σ_{11} и σ_{22} совпадают: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = R$, кольцо R содержит кольцо целых $\mathfrak{D}$: $\mathfrak{D} \subseteq R$. Далее, σ_{12}, σ_{21} — дробные идеалы кольца R.

По определению D-сети кольца σ_{11}, σ_{22} содержат 1, а в силу того, что они — $\mathfrak{D}$-модули, то оба этих кольца содержат кольцо целых $\mathfrak{D}$ поля K.

Замечание 1. 1. Область целостности R является дедекиндовой областью тогда и только тогда, когда всякий ненулевой дробный идеал обратим [4, гл. 9].

2. Пусть A — дедекиндова область, S — мультипликативное множество в A. Тогда $S^{-1}A$ либо является дедекиндовой областью, либо совпадает с полем частных кольца A [4, гл. 9, упражнение 1].

Предложение 4. *Пусть R — область целостности и K — ее поле частных, Q — промежуточное подкольцо, $R \subseteq Q \subseteq K$. Если R обладает (QR)-свойством, то Q также обладает (QR)-свойством.*

$\lhd$ Пусть L — промежуточное подкольцо $Q \subseteq L \subseteq K$. Покажем что $L = F_1^{-1}Q$ для некоторого мультипликативного множества $F_1 \subseteq Q\backslash\{0\}$.

По условию $Q = S^{-1}R$, $L = F^{-1}R$, где F, S — мультипликативные множества из $R\backslash 0$. Покажем вначале, что (ясно, что FS — мультипликативная система)

$$L = (FS)^{-1}R. \tag{1}$$

$$(\subseteq):\ \lambda \in L = L \cdot Q = F^{-1}R \cdot S^{-1}R \longrightarrow \lambda = \frac{r_1}{f} \cdot \frac{r_2}{s} = \frac{r_1 r_2}{fs} \in (FS)^{-1}R,$$
$$r_1, r_2 \in R, \quad f \in F, \quad s \in S.$$

Обратно

$$(\supseteq):\ \frac{r}{fs} \in (FS)^{-1}R \longrightarrow \frac{r}{fs} = \frac{r}{f} \cdot \frac{1}{s} \in F^{-1}R \cdot S^{-1}R = L \cdot Q = L, \quad s \in S.$$

Далее, согласно [4, гл. 3, упражнение 3] мы имеем

$$(FS)^{-1}R = F_1^{-1}(S^{-1}R) = F_1^{-1}Q,$$

где F_1 — образ множества F при естественном вложении $R \to S^{-1}R = Q$ (при котором $r \to \frac{r}{1}$). Теперь из (1) мы имеем $L = F_1^{-1}Q$. $\rhd$

В дальнейшем, K — поле частных области R.

Из предложения 4, леммы 2 и замечания 1 (2) вытекает следующее утверждение.

Предложение 5. *Пусть K — поле частных области R. Пусть, далее, R — дедекиндова область, обладающая (QR)-свойством. Тогда всякое промежуточное кольцо L, $R \subseteq L \subseteq K$, является дедекиндовой областью и обладает (QR)-свойством. В частности, группа классов идеалов кольца R, а также группа классов идеалов промежуточного кольца L являются периодическими группами.*

Напомним следующее определение [4, гл. 9]: R — область целостности и K — ее поле частных; R-модуль $M \subseteq K$ называется *дробным идеалом* кольца R, если $xM \subseteq R$ для некоторого ненулевого элемента $x \in K$. Если мы положим $xM = \mathfrak{A} \subseteq R$, то, очевидно, $\mathfrak{A}$ — целый идеал кольца R и $M = x^{-1}\mathfrak{A}$. Следовательно, всякий дробный идеал имеет вид $t\mathfrak{A}$, $t \in K$, где $\mathfrak{A}$ — целый идеал кольца R. Напомним, что идеал M называется целым, если он содержится в кольце R. Идеал вида tR, $t \in K$, называется главным дробным идеалом.

Лемма 3. *Пусть R — дедекиндова область, обладающая (QR)-свойством. Пусть, далее, Q, L — промежуточные подкольца, причем $R \subseteq Q \subseteq L \subseteq K$; B — ненулевой (дробный) идеал поля K (относительно кольца L) и B — (дробный) идеал поля K (относительно кольца Q). Тогда $L = Q$.*

$\lhd$ По условию B — ненулевой идеал поля K (относительно Q и L). Согласно предложению 5 кольца Q и L дедекиндовы и обладают (QR)-свойством, причем группа классов идеалов кольца Q и группа классов идеалов кольца L являются периодическими группами. Тогда

$$B^m = t_1 Q,\ B^n = t_2 L \Longrightarrow B^{mn} = aQ = bL \Longrightarrow \frac{a}{b} \in L,\ \frac{b}{a} \in Q \subseteq L,\ t_1, t_2, a, b \in K,$$

следовательно, $\frac{b}{a}$ — обратимый элемент кольца L, а потому $Q = \frac{b}{a}L = L$. $\rhd$

Лемма 4. *Пусть R — дедекиндова область, обладающая (QR)-свойством. Пусть, далее, R_1, R_2 — промежуточные подкольца, $R \subseteq R_i \subseteq K$, $i = 1, 2$. Если B — ненулевой (дробный) идеал колец R_1 и R_2, то B — ненулевой (дробный) идеал кольца $R_1 \cap R_2$.*

$\lhd$ По условию B — R_1-модуль и B — R_2-модуль, следовательно, B — $R_1 \cap R_2$-модуль. Далее, по определению (дробного) идеала мы имеем $t_1 B \subseteq R_1$ и $t_2 B \subseteq R_2$ для некоторых $t_1 = \frac{a_1}{b_1} \in K$, $t_2 = \frac{a_2}{b_2} \in K$, где (напомним, что K — поле частных кольца R) $a_i, b_i \in R$, $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Так как B является $R_1 \cap R_2$-модулем и $R \subseteq R_1 \cap R_2$, то $a_i B \subseteq b_i R_i \subseteq R_i$, $i = 1, 2$. Поэтому

$$a_1 a_2 B = a_1(a_2 B) \subseteq a_1 R_2 \subseteq R_2, \quad a_1 a_2 B = a_2(a_1 B) \subseteq a_2 R_1 \subseteq R_1,$$

откуда $a_1 a_2 B \subseteq R_1 \cap R_2$. Следовательно, B — (дробный) идеал кольца $R_1 \cap R_2$. $\rhd$

Предложение 6. *Пусть R — дедекиндова область, обладающая (QR)-свойством. Пусть, далее, R_1, R_2 — промежуточные подкольца, $R \subseteq R_i \subseteq K$, $i = 1, 2$. Если B — ненулевой идеал R_1 и B — идеал R_2, то $R_1 = R_2$.*

$\lhd$ Согласно лемме 4 B — ненулевой идеал пересечения $R_1 \cap R_2$. Если в лемме 3 теперь положить $Q = R_1 \cap R_2$ и $L = R_1$, то мы получим $R_1 \cap R_2 = R_1$. Аналогично $R_1 \cap R_2 = R_2$. Следовательно, $R_1 = R_2$. $\rhd$

Предложение 7. *Пусть R — дедекиндова область, обладающая (QR)-свойством. Рассмотрим неприводимую D-сеть аддитивных подгрупп*

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

поля K, причем σ_{ij} являются R-модулями, для всех $i = 1, 2$. Тогда кольца (с единицей) σ_{11} и σ_{22} совпадают: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = P$, причем P — подкольцо поля K, содержащие кольцо R. Далее, $\sigma_{12}\sigma_{21}$ — целый идеал кольца $\sigma_{11} = \sigma_{22} = P$.

$\lhd$ По условию $\sigma_{ij} \neq 0$ (в силу невырожденности сети σ) для всех $i = 1, 2$. По определению D-сети σ подгруппы σ_{11} и σ_{22} являются кольцами, которые содержат единицу, $1 \in \sigma_{ii}$, $i = 1, 2$. Далее, так как σ_{ii} — R-модули и $1 \in \sigma_{ii}$, то $R \cdot 1 \subseteq \sigma_{ii}$, поэтому σ_{ii} — промежуточные подкольца, $R \subseteq \sigma_{ii} \subseteq K$, $i = 1, 2$. Рассмотрим произведение $B = \sigma_{12}\sigma_{21}$. Подгруппа B отлична от 0. По определению сети σ мы имеем $B \subseteq \sigma_{11}$ и $B \subseteq \sigma_{22}$, причем по определению сети подгруппа B является σ_{11}-модулем и σ_{22}-модулем. Следовательно, B — целый идеал кольца σ_{11} и B — целый идеал кольца σ_{22}, причем $B \neq 0$. Тогда, согласно предложению 6 (положив $R_1 = \sigma_{11}$, $R_2 = \sigma_{22}$), мы имеем $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. $\rhd$

4. Описание D-сетей над квадратичным полем

Из предложения 7 вытекает следующее предложение.

Предложение 8. *Пусть R — дедекиндова область, обладающая (QR)-свойством, K — поле частных области R. Рассмотрим неприводимую D-сеть аддитивных подгрупп*

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

поля K, причем σ_{ij} являются R-модулями, для всех $i, j = 1, \dots, n$. Тогда $\sigma_{11} = \dots = \sigma_{nn} = P$ — подкольцо поля K, содержащие кольцо R, $R \subseteq P \subseteq K$. Далее, σ_{ij} — P-модули *и $\sigma_{ij}\sigma_{ji}$ — идеал кольца P для всех $i,j=1,\dots,n$. В частности, σ_{ij} являются дробными идеалами кольца P для всех i,j.*

Теорема 1. *$K=\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ — квадратичное поле, $\mathfrak{D}$ — кольцо целых поля K, $\sigma=(\sigma_{ij})$ — неприводимая D-сеть аддитивных групп σ_{ij} поля K порядка $n\geqslant 2$, причем для любых i,j аддитивные группы σ_{ij} являются $\mathfrak{D}$-модулями. Тогда для некоторого промежуточного подкольца P, $\mathfrak{D}\subseteq P\subseteq K$, сеть σ имеет вид (2) из предложения 8. Далее, сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ сопряжена диагональной матрицей из $D(n,K)$ с D-сетью $\pi=(\pi_{ij})$ дробных идеалов π_{ij} кольца P и имеет вид*

$$\pi=\begin{pmatrix} P & \pi_{12} & \pi_{13} & \dots & \pi_{1n}\\ \pi_{21} & P & \pi_{23} & \dots & \pi_{2n}\\ \pi_{31} & \pi_{32} & P & \dots & \pi_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \pi_{n3} & \dots & P \end{pmatrix},$$

где $\pi_{ij}\subseteq P$ — целые идеалы кольца P при любых $i<j$, если же $i>j$, то $P\subseteq\pi_{ij}$. Для любых i, j имеют место включения $\pi_{1j}\subseteq\pi_{ij}$.

$\lhd$ 1) Согласно [4, теорема 9.5] кольцо целых $\mathfrak{D}$ является дедекиндовой областью, причем группа классов идеалов (фактор-группа дробных идеалов по подгруппе главных дробных идеалов) кольца $\mathfrak{D}$ конечна (см. 1) замечание в [4, гл. 9]). По лемме 2 (1) кольцо $\mathfrak{D}$ обладает (QR)-свойством. Первая часть теоремы теперь следует из предложения 8, т. е.

$$\sigma=\begin{pmatrix} P & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & P & \dots & \sigma_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & P \end{pmatrix}.$$

Так как сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ неприводима, то аддитивные подгруппы σ_{ij} — ненулевые дробные идеалы кольца P, $\mathfrak{D}\subseteq P\subseteq K$.

2) Покажем, что сеть σ сопряжена диагональной матрицей с сетью $\pi=(\pi_{ij})$, у которой все P-модули π_{ij}, лежащие ниже главной диагонали, содержат 1. Рассмотрим ненулевые элементы в подгруппах σ_{ii-1} для всех $i=2,3,\dots,n$. Предположим это элементы a_{ii-1}, $i=2,3,\dots,n$. Положим

$$d=d_2\left(\frac{1}{a_{21}}\right)d_3\left(\frac{1}{a_{32}a_{21}}\right)d_4\left(\frac{1}{a_{43}a_{32}a_{21}}\right)\dots d_n\left(\frac{1}{a_{nn-1}a_{n-1n-2}\dots a_{21}}\right).$$

Рассмотрим сеть

$$\pi=(\pi_{ij})=d\sigma d^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что

$$1\in\pi_{21},\ 1\in\pi_{32},\ \dots,\ 1\in\pi_{nn-1},\ 1\in\pi_{ii-1},\quad i=2,3,\dots,n.$$

Пусть теперь $i>j$. Тогда

$$\pi_{ii-1}\pi_{i-1i-2}\dots\pi_{j+1j}\subseteq\pi_{ij}\Longrightarrow 1\in\pi_{ij}.$$

Таким образом, мы показали что $1\in\pi_{ij}$ для любого $i>j$.

3) Покажем теперь, что $P\subseteq\pi_{ij}$ при $i>j$ и $\pi_{ij}\subseteq P$ при $i<j$.

Пусть $i>j$. Согласно доказанному п. 2) мы имеем $1\in\pi_{ij}$, но тогда $P\sigma_{ij}\subseteq\sigma_{ij}$, откуда $P\cdot 1\subseteq\pi_{ij}$, поэтому $P\subseteq\pi_{ij}$.

Пусть теперь $i < j$. Покажем, что $\sigma_{ij} \subseteq P$. Действительно, пусть $b \in \sigma_{ij}$. Имеем $1 \in \sigma_{ji}$, так как $j > i$. Тогда

$$b = b \cdot 1 \in \sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq P \Longrightarrow \sigma_{ij} \subseteq P.$$

4) Покажем, что для любых i, j имеют место включения $\pi_{1j} \subseteq \pi_{ij}$. Пусть $i > 1$. Тогда согласно доказанному п. 2) мы имеем $1 \in \pi_{i1}$. Откуда

$$\pi_{1j} = 1 \cdot \pi_{1j} \subseteq \pi_{i1}\pi_{1j} \subseteq \pi_{ij}. \quad \rhd$$

Литература

1. *Койбаев В. А.* О строении элементарных сетей над квадратичными полями // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 87–91. DOI: 10.46698/h3104-8810-6070-x.
2. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел.—М.: Наука, 1985.
3. *Дряева Р. Ю., Койбаев В. А., Нужин Я. Н.* Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН.—2017.—Т. 455.—С. 42–51.
4. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру.—М.: Мир, 1972
5. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
6. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 4.—С. 421–434.
7. *Gilmer R., Ohm J.* Integral domains with quotient overrings // Math. Ann.—1964.—Vol. 153, № 2.—P. 97–103.

Статья поступила 29 июня 2022 г.

Икаев Сармат Сосланович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
аспирант
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: ikaev.sar@yandex.ru

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
профессор кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612

Лихачева Алена Олеговна
Сибирский федеральный университет,
член научного коллектива, проект
«Комбинированные и структурные вопросы групп лиева
типа над полями и над кольцами»
РОССИЯ, 660041, Красноярск, Свободный проспект, 79
E-mail: likhacheva.alyona@mail.ru
https: //orcid.org/0000-0001-7782-8322

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 3, P. 87–95

ON THE STRUCTURE OF NETS OVER QUADRATIC FIELDS

Ikaev, S. S.[1], Koibaev, V. A.[1,2] and Likhacheva, A. O.[3]
[1] North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[3] Siberian Federal University,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia
E-mail: ikaev.sar@yandex.ru, koibaev-K1@yandex.ru, likhacheva.alyona@mail.ru

Abstract. The structure of nets over quadratic fields is studied. Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ be a quadratic field, $\mathfrak{D}$ the ring of integers of the quadratic field K. A set of additive subgroups $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of a field K is called a net of order n over K if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all values of the index i, r, j. A net $\sigma = (\sigma_{ij})$ is called irreducible if all additive subgroups σ_{ij} are different from zero. A net $\sigma = (\sigma_{ij})$ is called a D-net if $1 \in \tau_{ii}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Let $\sigma = (\sigma_{ij})$ be an irreducible D-net of order $n \geqslant 2$ over K, where σ_{ij} are $\mathfrak{D}$-modules. We prove that, up to conjugation diagonal matrix, all σ_{ij} are fractional ideals of a fixed intermediate subring P, $\mathfrak{D} \subseteq P \subseteq K$, and all diagonal rings coincide with P: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \ldots = \sigma_{nn} = P$, where $\sigma_{ij} \subseteq P$ are integer ideals of the ring P for any $i < j$, if $i > j$, then $P \subseteq \sigma_{ij}$. For any i, j we have $\sigma_{1j} \subseteq \sigma_{ij}$.

Key words: nets, carpets, algebraic number field, quadratic field.

AMS Subject Classification: 20G15.

For citation: *Ikaev, S. S., Koibaev, V. A. and Likhacheva, A. O.* On the Structure of Nets Over Quadratic Fields, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 87–95 (in Russian). DOI: 10.46698/x8972-0209-8824-c.

References

1. *Koibaev, V. A.* On the Structure of Elementary Nets Over Quadratic Fields, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 87–91 (in Russian). DOI: 10.46698/h3104-8810-6070-x.
2. *Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R. Number Theory*, Academic Pres, New York–London, 1966.
3. *Dryaeva, R. Y., Koibaev, V. A. and Nuzhin, Ya. N.* Full and Elementary Nets over the Quotient Field of a Principal Ideal Ring, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 234, no. 2, pp. 141–147. DOI: 10.1007/s10958-018-3990-y.
4. *Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G. Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley Publishing Company, 1969.
5. *Borevich, Z. I.* Subgroups of Linear Groups Rich in Transvections, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, no. 2, pp. 928–934. DOI: 10.1007/BF01089083.
6. *Levchuk, V. M.* Remark on a Theorem of L. Dickson, *Algebra and Logic*, 1983, vol. 22, no. 4, pp. 306–316. DOI: 10.1007/BF01979677.
7. *Gilmer, R. and Ohm, J.* Integral Domains with Quotient Overrings, *Mathematische Annalen*, 1964, vol. 153, no. 2, pp. 97–103.

Received June 29, 2022

Sarmat S. Ikaev
North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Graduate Student
E-mail: ikaev.sar@yandex.ru

Vladimir A. Koibaev
North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Professor;
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612

Alena O. Likhacheva
Siberian Federal University,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia,
Member of the Scientific Team
E-mail: likhacheva.alyona@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7782-8322