Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 3, С. 96–107

УДК 517.984
DOI 10.46698/z4719-5714-4623-f

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ТЕПЛИЦА В СЧЕТНО-НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

А. Э. Пасенчук[1], **В. В. Серегина**[2]

[1] Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова,
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132;
[2] Азово-Черноморский инженерный институт,
Россия, 347740, Зерноград, ул. Ленина, 21

E-mail: pasenchuk@mail.ru, vic.victora@yandex.ru

Аннотация. В счетно-нормированном пространстве гладких на единичной окружности функций рассматривается оператор Теплица с символом, являющимся отношением гладких функций. Изучаются вопросы ограниченности, нетеровости и обратимости таких операторов. Вводятся понятия гладкой вырожденной факторизации типа минус гладких функций и связанной с ней подходящей вырожденной факторизации типа минус. Получен критерий в терминах символа существования подходящей вырожденной факторизации типа минус. Как и в классическом случае оператора Теплица в пространствах суммируемых функций с винеровским символом, нетеровость оператора Теплица оказалась равносильной наличию подходящей факторизации типа минус его символа. При этом индекс этой факторизации, определяющий индекс оператора Теплица, может быть выражен через некоторые функционалы, определяемые символом оператора. В частности, получен критерий обратимости этого оператора в терминах символа оператора. Этот критерий формулируется в форме соотношения, связывающего число нулей, число полюсов и сингулярный индекс символа. Такая формулировка позволяет эффективно описать спектр оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве гладких на единичной окружности функций. Получены соотношения, связывающие спектры некоторых специальных операторов Теплица в пространствах гладких и суммируемых функций. Приводятся примеры, показывающие, что спектр оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве, вообще говоря, существенно отличается от спектра оператора Теплица в пространствах суммируемых функций. В частности, спектр ограниченного оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве может оказаться открытым и (или) неограниченным подмножеством комплексной плоскости.

Ключевые слова: оператор, Теплиц, нетеровость, обратимость, гладкий, вырожденный, факторизация, сингулярный, индекс, спектр.

AMS Subject Classification: 47A10, 47B35.

Образец цитирования: *Пасенчук А. Э., Серегина В. В.* О спектре оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве гладких функций // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 3.—С. 96–107. DOI: 10.46698/z4719-5714-4623-f.

1. Введение

Будем пользоваться стандартными обозначениями N, Z, R, C для множеств натуральных, целых, вещественных, комплексных чисел соответственно. Положим также

$$Z_+ = \{j \in Z : j \geqslant 0\}, \quad Z_- = Z \backslash Z_+, \quad \Gamma = \{z \in C : |z| = 1\},$$
$$D^+ = \{z \in C : |z| < 1\}, \quad D^- = \{z \in C : |z| > 1\}.$$

Для алгебры с единицей A через GA будем обозначать группу обратимых элементов этой алгебры.

Введем следующие множества комплекснозначных функций, определенных на единичной окружности Γ:

$$C^m(\Gamma) = \left\{ a(\xi) = \sum_{j\in Z} a_j \xi^j,\ a_j \in C : \sum_{j\in Z} (|j|+1)^m |a_j| < \infty,\ \xi \in \Gamma \right\}, \quad m \in Z_+;$$

$$C^\infty(\Gamma) = \bigcap_{m\in Z_+} C^m(\Gamma).$$

Будем рассматривать $C^m(\Gamma)$, $m \in Z_+ \cup \{\infty\}$, как линейные пространства, считая, что линейные операции определены поточечно. Более того, как известно, линейное пространство $C^m(\Gamma)$ является банаховым относительно нормы

$$\Big\| \sum_j a_j \xi^j \Big\|_m = \sum_{j\in Z} \big(|j|+1\big)^m |a_j|,$$

а $C^\infty(\Gamma)$ есть счетно-нормированное пространство с определяющей системой норм $\|\cdot\|_m$, $m \in Z_+$. Обозначим через $QC^\infty(\Gamma)$ следующее линейное пространство функций:

$$QC^\infty(\Gamma) = \left\{ q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} : a(\xi) \in C^\infty(\Gamma),\ b(\xi) \in C^\infty(\Gamma) \right\}.$$

Нам понадобится также стандартное гильбертово пространство измеримых суммируемых с квадратом функций:

$$L_2(\Gamma) = \left\{ a(\xi) = \sum_{j\in Z} a_j \xi^j,\ a_j \in C : \sum_{j\in Z} |a_j|^2 < \infty,\ \xi \in \Gamma \right\}.$$

Введем в пространствах $C^\infty(\Gamma)$, $L_2(\Gamma)$ операторы проектирования $P^\pm$, полагая

$$P^\pm\left(\sum_{j\in Z} a_j \xi^j \right) = \sum_{j\in Z_\pm} a_j \xi^j,$$

и порождаемые этими проекторами подпространства

$$C_+^\infty(\Gamma) = P^+(C^\infty(\Gamma)), \quad \widetilde{C}_-^\infty(\Gamma) = P^-(C^\infty(\Gamma)),$$

$$C_-^\infty(\Gamma) = C \oplus \widetilde{C}_-^\infty(\Gamma), \quad L_2^\pm(\Gamma) = P^\pm(L_2(\Gamma)).$$

В этой работе рассматривается оператор Теплица $T_q : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$, $T_q = P^+ q(\xi) I$ в предположении, что функция $q(\xi)$, называемая символом оператора $T_q : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$, является элементом линейного пространства $QC^\infty(\Gamma)$. Оператору Теплица и родственным операторам посвящено большое число работ (см. [1–7] и цитируемые там работы). Наиболее полные результаты относительно оператора Теплица были получены в банаховых пространствах гельдеровых и суммируемых функций (в качестве конкретного примера для демонстрации некоторых результатов мы выбрали пространство $L_2^+(\Gamma)$). В этих пространствах для широкого класса символов была построена полная теория Нетера. Например, показано, что необходимым и достаточным условием нетеровости оператора $T_q : L_2^+(\Gamma) \to L_2^+(\Gamma)$ с непрерывным символом является его невырожденность для всех $\xi \in \Gamma$. В терминах символа эффективно описаны ядро, коядро оператора T_q, построен обобщенный обратный оператор, найдена формула для индекса:

$\operatorname{ind} T_q = -\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma} q(\xi)$. Показано также, что оператор T_q фредгольмов тогда и только тогда, когда он обратим, т. е. когда $q(\xi) \neq 0$, $\xi \in \Gamma$ и $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma} q(\xi) = 0$. В связи этим спектр оператора Теплица в банаховых пространствах допускает очевидное описание. В пространстве гладких функций $C^\infty(\Gamma)$ оператор Теплица также рассматривался (см. [6, 7] и цитируемые там работы). В этих работах был получен критерий нетеровости этого оператора. Оказалось, что нетеровы в пространствах гладких функций операторы Теплица могут иметь гладкие символы с вырождениями на Γ специального типа. Точнее, оператор T_q, $q(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ нетеров в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда функция $q(\xi)$ имеет на Γ разве лишь конечное число нулей конечных порядков. Критерий обратимости оператора Теплица также может быть сформулирован в терминах символа. Но эта формулировка является достаточно сложной, поэтому задача об описании спектра оператора Теплица в пространстве гладких функций не рассматривалась. Позже выяснилось, что в пространстве гладких функций ограничены операторы Теплица и с некоторыми разрывными символами. Например, могут быть определены ограниченные операторы Теплица с символами из $QC^\infty(\Gamma)$ (см. [7] и цитируемые там работы). Вопрос о спектре операторов Теплица в этих работах также не изучался. В этой работе изучаются спектры операторов Теплица $T_q : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$ для символов $q(\xi) \in QC^\infty(\Gamma)$.

2. Вспомогательные результаты

Пусть функция $q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} \in QC^\infty(\Gamma)$ и функция $b(\xi)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков. Пусть t_k — все нули функции $b(\xi)$ порядков m_k, $k = 1, 2, \dots, s$, соответственно. Обозначим через $H_m(a, \xi)$ многочлен Эрмита функции $a(\xi)$ порядка $m = \sum_{k=1}^{s} m_k - 1$ с узлами интерполяции в точках t_k и кратностями m_k, $k = 1, 2, \dots, s$. Тогда функция $q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)}$ может быть представлена в виде

$$q(\xi) = \frac{a(\xi) - H_m(a,\xi)}{b(\xi)} + \frac{H_m(a,\xi)}{b(\xi)}\,.$$

При этом

$$q_0(\xi) = \frac{a(\xi) - H_m(a,\xi)}{b(\xi)} \in C^\infty(\Gamma),$$

а функцию $\frac{H_m(a,\xi)}{b(\xi)}$ допускает представление

$$\frac{H_m(a,\xi)}{b(\xi)} = \frac{H_m(a,\xi)}{\prod\limits_{k=1}^{s} (\xi - t_k)^{m_k} b_0(\xi)}\,,$$

где

$$b_0(\xi) = \prod_{k=1}^{s} (\xi - t_k)^{-m_k} b(\xi) \in C^\infty(\Gamma).$$

Ясно, что при этом $b_0(\xi) \neq 0$, $\xi \in \Gamma$, т. е. $\frac{1}{b_0(\xi)} \in C^\infty(\Gamma)$. Функцию $\frac{H_m(a,\xi)}{\prod_{k=1}^{s}(\xi - t_k)^{m_k}}$ представим в виде

$$\frac{H_m(a,\xi)}{\prod\limits_{k=1}^{s} (\xi - t_k)^{m_k}} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{kj}}{(\xi - t_k)^j} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{kj}\xi^{-1}}{(1 - t_k\xi^{-1})^j}\,.$$

Рассмотрим функцию
$$\frac{1}{1-t_0\,\xi^{-1}}=\sum_{l=0}^{\infty}t_0^l\,\xi^{-l},\quad |t_0|=1.$$
Положим
$$T_{(1-t_0\xi^{-1})^{-1}}\,\varphi(\xi)=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{\infty}t_0^l\,T_{\xi^l}\varphi(\xi),\quad \varphi(\xi)\in C_+^{\infty}(\Gamma).$$
Покажем, что так определенный оператор $T_{(1-t_0\xi^{-1})^{-1}}$ есть линейный ограниченный оператор в пространстве $C_+^{\infty}(\Gamma)$. В самом деле, пусть
$$\varphi(\xi)=\sum_{k\in Z_+}\varphi_k\xi^k\in C_+^{\infty}(\Gamma),$$
тогда
$$T_{(1-t_0\xi^{-1})^{-1}}\,\varphi(\xi)=\sum_{l=0}^{\infty}t_0^l\,P^+\xi^{-l}\sum_{k\in Z_+}\varphi_k\,\xi^k$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}t_0^l\sum_{k=l}^{\infty}\varphi_k\,\xi^{k-l}=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\sum_{l=0}^{k}t_0^l\,\xi^{k-l}=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\,\xi^k\sum_{l=0}^{k}t_0^{k-s}.$$
Обоснованность изменения порядка суммирования вытекает из приводимой ниже оценки при $m=0$:
$$\big\|T_{(1-t_0\xi^{-1})^{-1}}\varphi(\xi)\big\|_m=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\xi^k\sum_{l=0}^{k}t_0^{k-s}\right\|_m=\sum_{k\in Z_+}(k+1)^m\left|\varphi_k\sum_{l=0}^{k}t_0^{k-s}\right|$$
$$\leqslant\sum_{k\in Z_+}(k+1)^m\,|\varphi_k|\left|\sum_{l=0}^{k}t_0^{k-s}\right|\leqslant\sum_{k\in Z_+}(k+1)^{m+1}\,|\varphi_k|=\big\|\varphi(\xi)\big\|_{m+1}.$$
Пользуясь полученным выше представлением
$$q(\xi)=\frac{a(\xi)}{b(\xi)}=q_0(\xi)+\xi^{-1}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}a_{kj}\big(1-t_k\xi^{-1}\big)^{-j}\,\big(b_0(\xi)\big)^{-1},$$
положим
$$T_q=T_{q_0}+T_{\xi^{-1}}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}a_{kj}\big(T_{(1-t_k\xi^{-1})^{-1}}\big)^j\,T_{b_0^{-1}}.$$
Естественно считать, что определенный выше линейный ограниченный оператор T_q есть оператор Теплица с символом $q(\xi)=\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\in QC^{\infty}(\Gamma)$. Разумеется, приведенное определение оператора Теплица с разрывными, вообще говоря, символами совпадает с классическим, если $q(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$.

Можно показать, что если функция $b(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$ имеет на Γ, либо бесконечное множество нулей, либо нуль бесконечного порядка, оператор $T_q=P^+q(\xi)I$ неограничен в пространстве $C_+^{\infty}(\Gamma)$ (см. [7]). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Функция $q(\xi)=\frac{a(\xi)}{b(\xi)}\in QC^{\infty}(\Gamma)$ порождает ограниченный оператор Теплица тогда и только тогда, когда функция $b(\xi)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков.*

Нам понадобится также следующее вспомогательное утверждение, которое называют свойством частичной мультипликативности [2, 3, 7].

Лемма 2. *Пусть функции* $q(\xi)$, $q^-(\xi)$, $q^+(\xi) \in QC^\infty(\Gamma)$ *порождают ограниченные операторы Теплица в пространстве* $C_+^\infty(\Gamma)$. *Тогда если* $Q(\xi) = q^-(\xi)q(\xi)q^+(\xi)$ *и функции* $q^\pm(\xi)$ *аналитически продолжимы в области* $D^\pm$ *соответственно, то имеет место равенство* $T_Q = T_{q^-}T_qT_{q^+}$.

3. Обратимость операторов Теплица с символами из $QC^\infty(\Gamma)$

Будем говорить, что функция $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ допускает гладкую вырожденную факторизацию типа минус, если $a(\xi) = a^-(\xi)\xi^{\kappa_a}a^+(\xi)$, где 1) $a^+(\xi) \in GC_+^\infty(\Gamma)$, 2) $a^-(\xi) \in C_-^\infty(\Gamma)$, $a^-(\xi_0) \neq 0$ для любого $\xi_0 \in D^-$, и если $(a^-(\xi))^{-1} = \sum_{j\in Z_+} b_j\xi^{-j}$, $\xi \to \infty$, то найдутся $c > 0$ и $m_0 \in Z_+$ так, что$|b_j| \leqslant c(j+1)^{m_0}$. При этом, число κ_a называется индексом гладкой вырожденной факторизации типа минус. Гладкая вырожденная факторизация типа минус называется канонической, если $\kappa_a = 0$. Тот факт, что функция $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ допускает гладкую вырожденную факторизацию типа минус с индексом κ_a будем обозначать следующим образом: $a(\xi) \in \mathrm{Fact}^-(\kappa_a, C^\infty(\Gamma))$.

Пусть функция $q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} \in QC^\infty(\Gamma)$. Будем говорить, что функция $q(\xi)$ допускает подходящую факторизацию типа минус, если $a(\xi) \in \mathrm{Fact}^-(\kappa_a, C^\infty(\Gamma))$, $b(\xi) \in \mathrm{Fact}^-(\kappa_b, C^\infty(\Gamma))$. При этом число $\kappa^-(q) = \kappa_a - \kappa_b$ будем называть индексом подходящей факторизации типа минус функции $q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} \in QC^\infty(\Gamma)$.

Теорема 1. *Функция* $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ *допускает гладкую вырожденную факторизацию типа минус тогда и только тогда, когда она имеет на* Γ *не более чем конечное число нулей конечных порядков.*

Доказательство этой теоремы приведено в работе [7].

Следствие 1. *Функция* $q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} \in QC^\infty(\Gamma)$ *допускает подходящую факторизацию типа минус тогда и только тогда, когда каждая из функций* $a(\xi)$, $b(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ *имеет на* Γ *не более чем конечное число нулей конечных порядков.*

Теорема 2. *Пусть функции* $a^\pm(\xi) \in C_\pm^\infty(\Gamma)$, $b^\pm(\xi) \in C_\pm^\infty(\Gamma)$ *являются компонентами гладких вырожденных факторизаций типа минус функций* $a(\xi)$, $b(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ *соответственно. Тогда операторы Теплица* $T_{q^\pm}$, $q^\pm(\xi) = \frac{a^\pm(\xi)}{b^\pm(\xi)}$, *обратимы в пространстве* $C_+^\infty(\Gamma)$.

$\lhd$ Для оператора T_{q^+} утверждение леммы является следствием свойства частичной мультипликативности и при этом $(T_{q^+})^{-1} = T_{(q^+)^{-1}}$ (см. [6, 7]). Для доказательства обратимости оператора T_{q^-} сначала рассмотрим операторы T_{a^-}, T_{b^-}. Пусть, например,

$$\big(a^-(\xi)\big)^{-1} = \sum_{j\in Z_+} b_j\,\xi^{-j}, \quad \xi \to \infty,$$

тогда легко убедиться в том, что для любого $k \in Z_+$ имеет место равенство

$$P^+\big(a^-(\xi)\big)^{-1}\xi^k = P^+\left(\sum_{j\in Z_+} b_j\,\xi^{j-k}\right) = \sum_{j=0}^{k} b_j\,\xi^{j-k}.$$

Это означает, что оператор $P^+(a^-(\xi))^{-1}P^+$ в силу линейности определен на всех многочленах. Кроме того, для каждого многочлена $\phi(\xi)$ справедливы легко проверяемые равенства

$$T_{a^-}P^+\big(a^-(\xi)\big)^{-1}\phi(\xi) = P^+\big(a^-(\xi)\big)^{-1}T_{a^-}\phi(\xi) = \phi(\xi).$$

Таким образом, ввиду того, что множество многочленов всюду плотно в $C_+^\infty(\Gamma)$, для того, чтобы убедиться, что оператор T_{a^-} обратим, достаточно доказать, что оператор $P^+(a^-(\xi))^{-1}P^+ : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$ ограничен в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$. Пусть

$$\varphi(\xi) = \sum_{k\in Z_+} \varphi_k\, \xi^k \in C_+^\infty(\Gamma),$$

тогда

$$P^+\big(a^-(\xi)\big)^{-1}\varphi(\xi) = P^+ \sum_{j\in Z_+} b_j\, \xi^{-j} \sum_{k\in Z_+} \varphi_k\, \xi^k = \sum_{j\in Z_+} \left(\sum_{k=j}^{\infty} b_{k-j}\, \varphi_k\right) \xi^j.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \big\|P^+(a^-(\xi))^{-1}\varphi(\xi)\big\|_m &= \sum_{j\in Z_+} (j+1)^m \left|\sum_{k=j}^{\infty} b_{k-j}\varphi_k\right| \leqslant \sum_{j\in Z_+} (j+1)^m \sum_{k=j}^{\infty} |b_{k-j}|\,|\varphi_k| \\ &= \sum_{k\in Z_+} |\varphi_k|\sum_{j=0}^{k}(j+1)^m|b_{k-j}| \leqslant c \sum_{k\in Z_+} |\varphi_k| \sum_{j=0}^{k}(j+1)^m(k-j+1)^{m_0} \\ &\leqslant c \sum_{k\in Z_+} (k+1)^{m+m_0+1}|\varphi_k| = \big\|\varphi(\xi)\big\|_{m+m_0+1}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом проверяется, что оператор T_{b^-} обратим и при этом $(T_{b^-})^{-1} = T_{(b^-)^{-1}}$. Тогда, в силу свойства частичной мультипликативности, оператор T_{q^-} обратим и при этом $(T_{q^-})^{-1} = T_{(a^-)^{-1}}T_{b^-}$. $\rhd$

Теорема 3. *Пусть* $q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} \in QC^\infty(\Gamma)$. *Оператор* T_q *нетеров в пространстве* $C_+^\infty(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда функция* $q(\xi)$ *допускает подходящую вырожденную факторизацию типа минус. При выполнении последнего условия* $\operatorname{ind} T_q = -\kappa^-(q)$.

$\lhd$ Достаточность условий теоремы вытекает из свойства частичной мультипликативности и теоремы 2. Предположим теперь, что оператор T_q нетеров в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$, но функция $q(\xi)$ не допускает подходящей вырожденной факторизации. Это означает, что либо $a(\xi) \notin \mathrm{Fact}^-(\kappa_a, C^\infty(\Gamma))$, либо $b(\xi) \notin \mathrm{Fact}^-(\kappa_b, C^\infty(\Gamma))$ ни при каких $\kappa_a, \kappa_b \in Z$. Последнее исключено ввиду определения класса $QC^\infty(\Gamma)$ и теоремы 1. Тогда функция $a(\xi) \notin \mathrm{Fact}^-(\kappa_a, C^\infty(\Gamma))$ и поэтому она должна иметь нуль бесконечного порядка на Γ. По функции $a(\xi)$ построим последовательность Зильберманна $\phi_n^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma)$, $n \in Z_+$, обладающую тем свойством, что $\phi_n^+(\xi)$ не стремится к нулю в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$, а $T_a\phi_n^+(\xi) \to 0$, $n \to \infty$ (см. [4, 6]). Не ограничивая общности, можно считать, что $b(\xi) \in \mathrm{Fact}^-(0, C^\infty(\Gamma))$. В самом деле, если $b(\xi) \in \mathrm{Fact}^-(\kappa_b, C^\infty(\Gamma))$, то оператор Теплица T_{q_1} с символом $q_1(\xi) = \frac{a(\xi)}{b_1(\xi)}$, $b_1(\xi) = \xi^{-\kappa_b}b(\xi)$, нетеров лишь одновременно с оператором T_q и при этом $b_1(\xi) \in \mathrm{Fact}^-(0, C^\infty(\Gamma))$. Итак, пусть $b(\xi) \in \mathrm{Fact}^-(0, C^\infty(\Gamma))$ и $b(\xi) = b^-(\xi)b^+(\xi)$ — гладкая вырожденная каноническая факторизация типа минус. Тогда для оператора T_q имеет место представление $T_q = T_{(b^-)^{-1}}T_aT_{(b^+)^{-1}}$. Рассмотрим последовательность $\varphi_n^+(\xi) = T_{b^+}\phi_n^+(\xi)$, $n \in Z_+$. Ввиду обратимости оператора T_{b^+} эта последовательность не стремится к нулю в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$. Но при этом

$$T_q\varphi_n^+(\xi) = T_qT_{b^+}\phi_n^+(\xi) = T_{(b^-)^{-1}}T_aT_{(b^+)^{-1}}T_{b^+}\phi_n^+(\xi) = T_{(b^-)^{-1}}T_a\phi_n^+(\xi) \to 0$$

ввиду ограниченности оператора $T_{(b^-)^{-1}}$. Последнее означает, что образ оператора T_q незамкнут и, следовательно, он не является нетеровым. $\rhd$

Сингулярным индексом функции $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$, имеющей конечное число нулей конечных кратностей, будем называть число $\kappa_c(a) = \frac{1}{\pi i}\, v.\,p. \int_\Gamma \frac{a'(\xi)}{a(\xi)} d\xi$.

Пусть $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ и имеет на Γ конечное число нулей z_k порядков n_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, соответственно. Назовем число $n(a) = \sum_{k=1}^{s} n_k$ суммарным числом нулей этой функции.

Лемма 3. *Пусть $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ и $n(a) < \infty$, а*

$$a_0(\xi) = a(\xi) \prod_{k=1}^{s} (\xi - z_k)^{-n_k} \in C^\infty(\Gamma) \quad \Big(a_1(\xi) = a(\xi) \prod_{k=1}^{s} \big(1 - z_k \xi^{-1}\big)^{-n_k} \in C^\infty(\Gamma)\Big)$$

и не обращается в нуль на Γ. Тогда имеет место равенство

$$\kappa_c(a) = n(a) + 2 \operatorname*{ind}_{\xi \in \Gamma} a_0(\xi) \quad \big(\kappa_c(a) = -n(a) + 2 \operatorname*{ind}_{\xi \in \Gamma} a_1(\xi)\big).$$

◁ Воспользуемся тем, что для невырождающейся, дифференцируемой на Γ функции

$$v.\,p. \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{a_0'(\xi)\, d\xi}{a_0(\xi)} = 2 \operatorname*{ind}_{\xi \in \Gamma} a_0(\xi)$$

и тем, что для фиксированного $z_k \in \Gamma$ справедливо равенство $v.\,p. \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z_k} = \pi i$. Тогда

$$\kappa_c(a) = \frac{1}{\pi i}\, v.\,p. \int\limits_\Gamma \frac{a(\xi)\, d\xi}{a(\xi)} = \frac{1}{\pi i}\, v.\,p. \int\limits_\Gamma \frac{a_0'(\xi)\, d\xi}{a_0(\xi)} + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{s} v.\,p. \int\limits_\Gamma \frac{n_k\, d\xi}{\xi - z_k} = 2 \operatorname*{ind}_{\xi \in \Gamma} a_0(\xi) + n(a).$$

Доказательство второй формулы аналогично приведенному. ▷

Нетрудно заметить, что если функция $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ имеет конечное число нулей конечных кратностей, то $a(\xi) \in \mathrm{Fact}^-(\kappa_a, C^\infty(\Gamma))$ и при этом

$$\kappa_a = \operatorname*{ind}_{\xi} A_1(\xi), \quad A_1(\xi) = A(\xi) \prod_{k=1}^{s} \big(1 - \xi_k \xi^{-1}\big)^{-n_k}.$$

Очевидно, последним формулам можно придать следующий вид: $\kappa_c(A) = -n(A) + 2\kappa_a$. Следовательно, индекс вырожденной факторизации типа минус функции $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$, в случае ее существования, может быть найден следующим образом: $\kappa_a = \frac{1}{2}(\kappa_c(a) + n(a))$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 4. *Функция $a(\xi) \in \mathrm{Fact}_-(\kappa_a, C^\infty(\Gamma))$ тогда и только тогда, когда эта функция имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков. При выполнении последнего условия индекс гладкой вырожденной факторизации типа минус может быть найден по формуле*

$$\kappa_a = \frac{1}{2}\,(\kappa_c(a) + n(a)).$$

Принимая во внимание леммы 1, 4, теорему 3 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Пусть $q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} \in QC^\infty(\Gamma)$. Оператор T_q нетеров в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда функция $q(\xi)$ допускает подходящую вырожденную факторизацию типа минус. При выполнении последнего условия*

$$\operatorname{Ind} T_q = \frac{1}{2}\big(\kappa_c(b) - \kappa_c(a) + n(b) - n(a)\big).$$

Следствие 2. *Пусть* $q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} \in QC^\infty(\Gamma)$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *оператор* $T_q : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$ *обратим;*

2) *функция* $q(\xi)$ *допускает подходящую каноническую вырожденную факторизацию типа минус;*

3) *каждая из функций* $a(\xi)$, $b(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ *имеет не более чем конечное число нулей конечных порядков и при этом выполнены условия* $\kappa_c(a) + n(a) = \kappa_c(b) + n(b)$.

4. Спектр оператора Теплица с символом из $QC^\infty(\Gamma)$

Теорема 4 позволяет описать резольвентное множество оператора T_q с символом $q(\xi) = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} \in QC^\infty(\Gamma)$ следующим образом. Резольвентное множество оператора T_q состоит из тех и только тех $\lambda \in C$, которые удовлетворяют условиям:

1) функция $a(\xi) - \lambda b(\xi)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков;

2) величина $\kappa_c(a - \lambda b) + n(a - \lambda b)$ не зависит от λ и при этом $\kappa_c(a - \lambda b) + n(a - \lambda b) = \kappa_c(b) + n(b)$.

Следовательно, спектр оператора T_q состоит из всех тех $\lambda \in C$, для которых нарушается либо условие 1), либо условие 2).

Пример 1. Рассмотрим функцию $q(\xi) = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$. Ясно, что $q(\xi) \in QC^\infty(\Gamma)$ при любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\gamma = 1$, тогда $q(\xi) = \frac{\alpha\xi+\beta}{\xi+\delta}$. Случаи $|\delta| < 1$, $|\delta| > 1$ интереса не представляют, поскольку при их выполнении $q(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ (см. ниже, пример 2). Будем считать, что $\delta = e^{i\omega}$, $\omega \in R$. Поскольку

$$q(\xi) - \lambda = \frac{\alpha\xi + \beta}{\xi + e^{i\omega}} - \lambda = \frac{(\alpha - \lambda) + (\beta - \lambda e^{i\omega})\xi^{-1}}{1 + e^{i\omega}\xi^{-1}},$$

то условие 1) выполняется автоматически, а условие 2) равносильно выполнению неравенства

$$\left|\beta - \lambda e^{i\omega}\right| \leqslant |\alpha - \lambda| \Longleftrightarrow \left|\beta e^{-i\omega} - \lambda\right| \leqslant |\alpha - \lambda|.$$

Полагая, $\lambda = x + iy$, $\beta e^{-i\omega} = \tau + i\theta$, $\alpha = \sigma + i\rho$, будем иметь

$$\left|\beta - \lambda e^{i\omega}\right| \leqslant |\alpha - \lambda| \Longleftrightarrow \left|\beta e^{-i\omega} - \lambda\right| \leqslant |\alpha - \lambda| \Longleftrightarrow 2(\sigma - \tau)x + 2(\rho - \theta)y \leqslant -\sigma^2 - \rho^2.$$

Это означает, что резольвентное множество оператора T_q есть следующее подмножество комплексной плоскости:

$$\rho(T_q) = \left\{\lambda \in C :\ 2(\sigma - \tau)\,\mathrm{Re}\lambda + 2(\rho - \theta)\,\mathrm{Im}\lambda \leqslant -\sigma^2 - \rho^2\right\}.$$

Таким образом, спектр этого оператора Теплица $T_q : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$ есть

$$\sigma(T_q) = \left\{\lambda \in C :\ 2(\sigma - \tau)\,\mathrm{Re}\lambda + 2(\rho - \theta)\,\mathrm{Im}\lambda > -\sigma^2 - \rho^2\right\},$$

т. е. является открытым неограниченным подмножеством комплексной плоскости.

Пример 2. Пусть $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$, тогда, в силу приведенных выше соображений, резольвентное множество оператора T_a описывается условиями:

1) функция $a(\xi) - \lambda$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков;

2) $\kappa_c(a - \lambda) + n(a - \lambda) = 0$.

Функция $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ порождает ограниченные операторы Теплица и в пространстве $C^{\infty}_{+}(\Gamma)$, и в пространстве $L^{+}_{2}(\Gamma)$. Условимся каждый из этих операторов обозначать, попрежнему, T_a, а их резольвентные множества и спектры $\rho_{\infty}(T_a)$, $\sigma_{\infty}(T_a)$; $\rho_2(T_a)$, $\sigma_2(T_a)$ соответственно. Если $a(\xi) - \lambda \neq 0$, $\xi \in \Gamma$, то условие 2) означает, что $\kappa_c(a - \lambda) = 0$. Поскольку $\kappa_c(a-\lambda) = 2\,\mathrm{ind}_{\xi\in\Gamma}(a(\xi)-\lambda)$, то тогда $\mathrm{ind}_{\xi\in\Gamma}(a(\xi)-\lambda) = 0$. Однако условия $a(\xi)-\lambda \neq 0$, $\xi \in \Gamma$, $\mathrm{ind}_{\xi\in\Gamma}(a(\xi)-\lambda) = 0$ являются необходимыми и достаточными условиями обратимости оператора $T_{a-\lambda} = T_a - \lambda I$ в пространстве $L^{+}_{2}(\Gamma)$, поэтому имеют место вложения $\rho_{\infty}(T_a) \supseteq \rho_2(T_a)$; $\sigma_{\infty}(T_a) \subseteq \sigma_2(T_a)$. Иногда удается наверняка утверждать, что имеют место строгие вложения резольвентных множеств и спектров или строгие равенства.

Теорема 5. *Пусть функция $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ такова, что $a'(\xi) \neq 0$, $\xi \in \Gamma$. Тогда возможны следующие ситуации:*

1) $\rho_{\infty}(T_a) = \rho_2(T_a) \cup a(\Gamma)$; $\sigma_{\infty}(T_a) = \sigma_2(T_a) \backslash a(\Gamma)$, *если найдется, хотя бы одна точка* $\lambda = a(\xi_0) \in \rho_{\infty}(T_a)$, $\xi_0 \in \Gamma$;

2) $\rho_{\infty}(T_a) = \rho_2(T_a)$; $\sigma_{\infty}(T_a) = \sigma_2(T_a)$, *если найдется, хотя бы одна точка* $\lambda = a(\xi_0) \notin \rho_{\infty}(T_a)$, $\xi_0 \in \Gamma$.

$\lhd$ Заметим, прежде всего, что для любого $\lambda = a(\xi_0)$, $\xi_0 \in \Gamma$, функция $a(\xi) - \lambda = a(\xi) - a(\xi_0)$ имеет в точке $\xi_0 \in \Gamma$ нуль. При этом в силу того, что $(a(\xi)-\lambda)' = a'(\xi) \neq 0$, $\xi \in \Gamma$, это обязательно нуль первого порядка, т. е. $n(a(\xi)-\lambda) = 1$ для любых $\lambda \in a(\Gamma)$. Таким образом, для $\lambda = a(\xi_0) \in \rho_{\infty}(T_a)$, $\xi_0 \in \Gamma$, выполнение условия 2) означает, что $\kappa_c(a-\lambda) = -1$, $\lambda = a(\xi_0)$. Но, тогда, пользуясь определением сингулярного индекса, имеем

$$\kappa_c(a-\lambda) = \frac{1}{\pi i}\, v.\,p. \int\limits_{\Gamma} \frac{a'(\xi)}{a(\xi)-\lambda}\, d\xi = -1, \quad \lambda = a(\xi_0).$$

С другой стороны, хорошо известно, что $\frac{1}{\pi i}\, v.\,p. \int_{\Gamma} \frac{a'(\xi)}{a(\xi)-\lambda}\, d\xi$ есть непрерывная функция параметра $\lambda \in a(\Gamma)$, принимающая целочисленные значения (см., например, [1]). Поэтому условие $\kappa_c(a-\lambda) = -1$ выполняется для любого $\lambda = a(\xi_0) \in a(\Gamma)$, т. е. оператор $T_{a-\lambda} : C^{\infty}_{+}(\Gamma) \to C^{\infty}_{+}(\Gamma)$ обратим при всех $\lambda = a(\xi_0) \in a(\Gamma)$. Следовательно, $a(\Gamma) \subset \rho_{\infty}(T_a)$, что и доказывает 1). Ситуация 2) рассматривается аналогично $\rhd$

Замечание 1. Операторы $T_{\xi^{-1}}$, T_{ξ} доставляют примеры операторов Теплица, спектры которых есть открытый единичный круг и замкнутый единичный круг соответственно. Для оператора $T_{\xi^{-1}}$, как легко убедиться, имеет место ситуация 1), а для оператора T_{ξ} — ситуация 2). В приведенных выше примерах образ границы $a(\Gamma)$ либо целиком содержится в резольвентном множестве, либо целиком в спектре оператора Теплица $T_a : C^{\infty}_{+}(\Gamma) \to C^{\infty}_{+}(\Gamma)$. В следующем примере показано, что для некоторых операторов Теплица имеются непустые подмножества $a(\Gamma)$, содержащиеся в спектре $\sigma_{\infty}(T_a)$, и при этом множество $\rho_{\infty}(T_a) \cap a(\Gamma)$ также непусто.

Пример 3. Пусть $a(\xi) = (1-\xi^{-1})^3$, тогда $a(\Gamma) = \{\lambda = (1-\xi_0^{-1})^3,\ \xi_0 \in \Gamma\}$. Поскольку $\lambda = a(1) = 0$, то $0 \in a(\Gamma)$. С другой стороны, оператор $T_a : C^{\infty}_{+}(\Gamma) \to C^{\infty}_{+}(\Gamma)$, $a(\xi) = (1-\xi^{-1})^3$, обратим, поскольку, как легко проверить, $\kappa_c((1-\xi^{-1})^3) = -3$, $n((1-\xi^{-1})^3) = 3$. Это означает, что в рассматриваемом случае $0 \in \rho_{\infty}(T_a) \cap a(\Gamma)$. Покажем, что во множестве $a(\Gamma)$ имеются такие значения λ, для которых оператор $T_{a-\lambda}$ необратим. Пусть $\lambda = (1-\xi_0^{-1})^3$, $\xi_0 \in \Gamma$, тогда имеет место равенство

$$a(\xi) - \lambda = \left(1-\xi^{-1}\right)^3 - \left(1-\xi_0^{-1}\right)^3 = -\left(\xi^{-1}-\xi_0^{-1}\right)\left(\xi^{-1}-\xi_1^{-1}\right)\left(\xi^{-1}-\xi_2^{-1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$T_{a-\lambda} = T_{-(\xi^{-1}-\xi_0^{-1})(\xi^{-1}-\xi_1^{-1})(\xi^{-1}-\xi_2^{-1})} = T_{-(\xi^{-1}-\xi_0^{-1})}T_{(\xi^{-1}-\xi_1^{-1})}T_{(\xi^{-1}-\xi_2^{-1})}$$

и при этом операторы $T_{-(\xi^{-1}-\xi_0^{-1})}$, $T_{(\xi^{-1}-\xi_1^{-1})}$, $T_{(\xi^{-1}-\xi_2^{-1})}$ попарно коммутируют. Покажем, что найдется $\xi_0 = e^{i\varphi_0} \in \Gamma$ так, что оператор $T_{(\xi^{-1}-\xi_1^{-1})} : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$ необратим. Это будет означать, что и оператор $T_{a-\lambda}$ также необратим и, следовательно, $\lambda = a(\xi_0) \in \sigma_\infty(T_a)$. Для этого достаточно подобрать $\xi_0 = e^{i\varphi_0}$ так, чтобы $|\xi_1^{-1}| < 1$. В самом деле, тогда $\xi^{-1} - \xi_1^{-1} \neq 0$, $\xi \in \Gamma$ и $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}(\xi^{-1} - \xi_1^{-1}) = -1$, поэтому $\dim\ker T_{(\xi^{-1}-\xi_1^{-1})} = 1$ (см., например, [3]). Представим корни уравнения $a(\xi) - \lambda = 0$, $\lambda = (1 - \xi_0^{-1})^3$, $\xi_0 \in \Gamma$, в следующем виде:

$$\xi_k^{-1} = 1 - 2\sin\frac{\varphi_0}{2}\Big(\cos\Big(\frac{\pi-\varphi_0}{2} + \frac{2\pi k}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi-\varphi_0}{2} + \frac{2\pi k}{3}\Big)\Big), \quad k = 0, 1, 2.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\xi_k^{-1}\right|^2 = 1 - 4\sin\frac{\varphi_0}{2}\,\cos\Big(\frac{\pi-\varphi_0}{2} + \frac{2\pi k}{3}\Big) + 4\sin^2\frac{\varphi_0}{2}.$$

В частности, при $k = 1$ имеем

$$\left|\xi_1^{-1}\right|^2 = 1 - 4\sin\frac{\varphi_0}{2}\,\cos\Big(\frac{\pi-\varphi_0}{2} + \frac{2\pi}{3}\Big) + 4\sin^2\frac{\varphi_0}{2}.$$

Ввиду того, что $\sin\frac{\varphi_0}{2} > 0$, $\varphi_0 \in (0, 2\pi)$, неравенство $\left|\xi_1^{-1}\right|^2 < 1$ равносильно следующему:

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} < \cos\Big(\frac{\pi-\varphi_0}{2} + \frac{2\pi}{3}\Big).$$

Очевидно, последнее неравенство выполняется для всех φ_0 достаточно близких к 2π.

Замечание 2. Вопрос о структуре спектра общего оператора Теплица является открытым даже для операторов с рациональными символами. Это связано с вопросом о характере ветвления решений уравнений вида $a(\xi) - \lambda b(\xi) = 0$, где $a(\xi)$, $b(\xi)$ — многочлены, в точках $\lambda = \frac{a(\xi_0)}{b(\xi_0)}$, $\xi_0 \in \Gamma$.

Литература

1. *Gakhov F. D.* Boundary Value Problems.—N.Y.: Dover, 1990.—561 p.
2. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: Штиинца, 1973.—426 с.
4. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Наука, 1984.—750 с.
5. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций.—М.: Высш. шк., 1991.—210 с.
6. *Зильберман Б.* О сингулярных операторах в пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций // Мат. исследования.—Кишинев: Штиинца, 1971.—Т. 6, № 3.—С. 168–179
7. *Пасенчук А. Э.* Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности.—Ростов н/Д.: ЮФУ, 2013.—279 с.

Статья поступила 19 августа 2021 г.

Пасенчук Александр Эдуардович
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова
профессор кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: pasenchuk@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-3939-1593

Серегина Виктория Викторовна
Азово-Черноморский инженерный институт,
доцент кафедры математики и биоинформатики
РОССИЯ, 347740, Зерноград, ул. Ленина, 21
E-mail: vic.victora@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-6599-805X

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 3, P. 96–107

ON THE SPECTRUM OF A TOEPLITZ OPERATOR IN A COUNTABLE NORMED SPACE OF SMOOTH FUNCTIONS

Pasenchuk, A. E.[1] and Seregina, V. V.[2]

[1] Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI),
132 Prosveshcheniya St., Novocherkassk 346428, Russia;
[2] Azov-Black Sea Engineering Institute,
21 Lenin St., Zernograd 347740, Russia

E-mail: pasenchuk@mail.ru, vic.victora@mail.ru

Abstract. In a countable normed space of smooth functions on the unit circle, we consider the Toeplitz operator with a symbol that is the ratio of smooth functions. The questions of boundedness, Notherianness and invertibillity of such operators are studied. The notions of a smooth degenerate factorization of the minus type for smooth functions and the related appropriate degenerate factorization of the minus type are introduced. A criterion is obtained in terms of the symbol for existence of a suitable degenerate factorization of type minus. As in the classical case of Toeplitz operators in spaces of summable functions with Wiener symbols, a Toeplitz operator is Notherian if and only if its symbol admits a suitable factorization of the type minus. Moreover, the index of this factorization, which determines the index of the Toeplitz operator, can be expressed in terms of some functional defined by the operator symbol. In particular, a criterion for the invertibility of this operator in terms of the operator symbol is obtained. This criterion is formulated in the form of a relationship between the number of zeros, the number of poles and the singular index of a symbol. The latter enables one to obtain an effective description of the spectrum of the Toeplitz operator in a countable normed space of smooth functions on the unit circle. Relations are obtained that connect the spectra of some special Toeplitz operators in spaces of smooth and summable functions. Examples are given showing that the spectrum of a Toeplitz operator in a countably normed space, generally speaking, differs significantly from the spectrum of the Toeplitz operator in spaces of summable functions. In particular, the spectrum of a bounded Toeplitz operator in a countably normed space may turned out be open and (or) unbounded subset of the complex plane.

Key words: operator, Toeplitz, Noetherianness, invertibillity, smooth, degenerate, factorization, singular, index, spectrum.

AMS Subject Classification: 47A10, 47B35.

For citation: *Pasenchuk, A. E. and Seregina, V. V.* On the Spectrum of a Toeplitz Operator in a Countable Normed Space of Smooth Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 96–107 (in Russian). DOI: 10.46698/z4719-5714-4623-f.

References

1. *Gakhov, F. D. Boundary Value Problems*, New York, Dover, 1990, 561 p.
2. *Gohberg, I. C. and Feldman, I. A. Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* [Convolution Equations and Projection Methods for their Solution], Moscow, Nauka, 1971, 352 p. (in Russian).
3. *Gohberg, I. C. and Krupnik, N. Ya. Vvedenie v teoriyu odnomernykh singulyarnykh integral'nykh operatorov* [Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Integral Operators], Kishinev, Shtiinca, 1973, 426 p. (in Russian).
4. *Presdorf, Z. Nekotorye klassy singulyarnykh uravneniy* [Some Classes of Singular Equations], Moscow, Mir, 1979, 433 p. (in Russian).
5. *Soldatov, A. P. Odnomernye singulyarnye operatory i kraevye zadachi teorii funktsii* [One-Dimensional Singular Operators and Boundary Value Problems of the Theory of Functions], Moscow, Vysshaya Shkola, 1991, 210 p. (in Russian).
6. *Zilberman, B.* On Singular Operators in Spaces of Infinitely Differentiable and Generalized Functions, *Matematicheskiye Issledovaniya*, Kishinev, Shtiinca, 1971, vol. 6, no. 3, pp. 168–179 (in Russian).
7. *Pasenchuk, A. E. Diskretnye operatory tipa svertki v klassakh posledovatel'nostei so stepennym kharakterom povedeniya na beskonechnosti* [Discrete Convolution Type Operators in Classes of Sequences with Power-Law Behavior at Infinity], Rostov-on-Don, SFU, 2013, 279 p. (in Russian).

Received August 19, 2021

Alexandr E. Pasenchuk
Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI),
Department of Applied Mathematics,
132 Prosveshcheniya St., Novocherkassk 346428, Russia,
Professor
E-mail: pasenchuk@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-3939-1593

Viktoria V. Seregina
Azov-Black Sea Engineering Institute,
Department of Mathematics and Bioinformatics,
21 Lenin St., Zernograd 347740, Russia,
Associate Professor
E-mail: vic.victora@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-6599-805X