Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 3, С. 108–119

УДК 517.97
DOI 10.46698/s3949-8806-8270-n

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

С. С. Постнов[1]

[1] Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65

E-mail: `postnov.sergey@inbox.ru`

Аннотация. В данной статье рассматривается задача оптимального управления для модельной системы, которая описывается одномерным неоднородным диффузионно-волновым уравнением, представляющим собой обобщение волнового уравнения на случай, когда производная по времени имеет дробный порядок и понимается в смысле Капуто. В общем случае мы рассматриваем как граничное, так и распределенное управление, которые считаются функциями, интегрируемыми по Лебегу с некоторой степенью p ($p > 1$, включая $p = \infty$). Ставятся и анализируются два типа задач оптимального управления: задача поиска управления с минимальной нормой при заданном времени управления и задача быстродействия — задача поиска управления, переводящего систему в заданное состояние за минимальное время при заданном ограничении на норму управления. Исследование строится на использовании точного решения диффузионно-волнового уравнения, с помощью которого задача оптимального управления сводится к бесконечномерной l-проблеме моментов. Мы также рассматриваем конечномерную l-проблему моментов, получаемую аналогичным образом с использованием приближенного решения диффузионно-волнового уравнения. Для этой задачи анализируется корректность и разрешимость. Наконец, рассматривается пример расчета граничного управления с использованием конечномерной l-проблемы моментов.

Ключевые слова: оптимальное управление, производная Капуто, диффузионно-волновое уравнение, l-проблема моментов.

AMS Subject Classification: 49N05, 49J21, 34K35, 34A08.

Образец цитирования: *Постнов С. С.* Оптимальное управление для систем, моделируемых диффузионно-волновым уравнением // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 3.—С. 108–119. DOI: 10.46698/s3949-8806-8270-n.

Введение

Модели систем дробного порядка с распределенными параметрами в настоящее время пользуются популярностью, в том числе это касается вопросов оптимального управления такими системами. Упомянутые модели описывают процессы тепло- и массопереноса, диффузии в неоднородных средах, а также диффузионно-волновые явления в сложных многокомпонентных системах, колебания в неоднородных средах и т. п. Ранее задачи оптимального управления для таких систем изучались с использованием вариационных методов с ограничениями на квадратичный функционал, включающий сумму состояния системы и управления (см., например, [1–3]).

В настоящей работе исследуется задача оптимального управления с ограничением на норму управления для линейного неоднородного диффузионно-волнового уравнения. Рассматриваются как распределенное, так и граничное управления, которые считаются функциями, интегрируемыми по Лебегу на отрезке с некоторой степенью $p > 1$. Исследование задачи оптимального управления проводится с помощью метода моментов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, состояние которой описывается следующим уравнением:

$$r(x)\,{}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\,\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)Q(x,t) + f(x,t) + u(x,t), \tag{1}$$

где $Q(x,t)$ — состояние системы, ${}_0^C D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования по времени, $\alpha \in (1,2)$, $t \geqslant 0$, $x \in [0,L]$, $(x,t) \in \Omega = [0,L] \times [0,\infty)$. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения Капуто [4, § 2.4]:

$${}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = {}_0^{RL} D_t^\alpha \left[Q(x,t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\partial^k Q(x,0+)}{\partial t^k}\,\frac{t^k}{k!}\right], \tag{2}$$

где ${}_0^{RL} D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля,

$${}_0^{RL} D_t^\alpha Q(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\,\frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial \tau^{[\alpha]+1}} \int\limits_0^t \frac{Q(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\{\alpha\}}},$$

где $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ — соответственно целая и дробная части числа α.

Предполагается, что функция $Q(x,t)$ дифференцируема по времени при $t \geqslant 0$ и дважды дифференцируема по пространственной переменной на отрезке $[0,L]$. Функции $r(x) > 0$, $w(x) > 0$ и $q(x)$ считаются непрерывными на отрезке $[0,L]$. Возмущение $f(x,t)$ считается суммируемой по обеим переменным функцией на области Ω. Также будем предполагать, что распределенное управление $u(x,t)$ является элементом пространства $L_{p_1,p_2}(\Omega)$, $p_{1,2} > 1$.

Уравнение (1) будем далее называть диффузионно-волновым.

Начальные условия для уравнения (1) поставим в виде

$$\frac{\partial^k Q(x,0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0,L],\ k = 0,1. \tag{3}$$

Граничные условия для уравнения (1) ставятся в виде

$$\left[b_i\,\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_i Q(x,t)\right]_{x=x^i} = h_i(t) + u^i(t), \quad t \geqslant 0,\ i = 1,2, \tag{4}$$

где a_i и b_i — коэффициенты, $b_1 \leqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$; $h_i(t)$ — некоторые известные функции, $x^1 = 0$, $x^2 = L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами пространства $L_p[0,T]$, $p > 1$, и могут быть объединены в вектор $U(t) = (u^1(t), u^2(t))$.

Будем считать целью оптимального управления достижение системой заданного состояния $Q^*(x)$ в заданный момент времени $T > 0$:

$$Q(x,T) = Q^*(x), \quad T > 0,\ x \in [0,L]. \tag{5}$$

Задачу оптимального управления поставим в двух разновидностях следующим образом [5]. Найти управления $u(x,t)$ и/или $U(t)$ такие, что система, описываемая уравнением (1) с начальными условиями (3) и граничными условиями (4), достигнет при $t = T$ состояния (5) и при этом будет выполнено одно из условий:

- норма управлений $u(x,t)$ и/или $U(t)$ будет минимальной при заданном T (задача А);
- время перехода в заданное состояние (5) будет минимальным при заданном ограничении на норму управлений $\|u(x,t)\| \leqslant l$, $\|U(t)\| \leqslant l$ ($l > 0$ — заданное число) (задача Б).

2. Представление задачи оптимального управления в форме обобщенной l-проблемы моментов

Для уравнения (1) с начальными условиями (3) и граничными условиями (4) известно точное решение [6, формула (18)]. Запишем его для состояния (5) при $t = T$:

$$Q(x,T) = Q^*(x) = R(x,T) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^T u_n(t)\, \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n (T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)$$

$$\times \int_0^T dt\, \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n (T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}} \left[\left(v_1' w_n' - (q(x) v_1(x))_n\right) u^1(t) + \left(v_2' w_n' - (q(x) v_2(x))_n\right) u^2(t) \right] \quad (6)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^T \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n (T-t)^\alpha] \left[(r(x) v_1(x))_n \cdot {}_0^C D_t^\alpha u^1(t) + (r(x) v_2(x))_n \cdot {}_0^C D_t^\alpha u^2(t) \right] dt}{(T-t)^{1-\alpha}},$$

где

$$v_1(x) = \frac{a_2(x-L) - b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2 L}; \quad v_2(x) = \frac{b_1 - a_1 x}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2 L};$$

$$v_1' = \frac{dv_1(x)}{dx} = \frac{a_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2 L}; \quad v_2' = \frac{dv_2(x)}{dx} = -\frac{a_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2 L};$$

$$R(x,T) = v_1(x) u^1(T) + v_2(x) u^2(T) + V(x,T)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) \left[\varphi_n^0 - V_n(0+) - v_{1n} u^1(0+) - v_{2n} u^2(0+) \right] X_n(x)$$

$$+ T \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,2}(-\lambda_n T^\alpha) X_n(x) \left[\varphi_n^1 - \left(\frac{\partial V(x,0+)}{\partial t} \right)_n - v_{1n} \left(\frac{\partial u^1(0+)}{\partial t} \right)_n \right.$$

$$\left. - v_{2n} \left(\frac{\partial u^2(0+)}{\partial t} \right)_n \right] + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^T dt\, \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n (T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}$$

$$\times \left[f_n(t) + w_n' \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right)_n - (q(x) V(x,t))_n - \left(r(x)\, {}_0^C D_t^\alpha V(x,t) \right)_n \right];$$

$\varphi_n^{0,1}$, $u_n(t)$, $f_n(t)$, $V_n(t)$ и $v_{(1,2)n}$ — коэффициенты разложения функций $\varphi^{0,1}(x)$, $u(x,t)$, $f(x,t)$, $V(x,t)$ и $v_{1,2}(x)$ по системе собственных функций $\{X_n(x)\}$, аналогично $(\ldots)_n$ есть коэффициент разложения выражения в скобках по системе собственных функций $\{X_n(x)\}$; $V(x,t) = v_1(x) h_1(t) + v_2(x) h_2(t)$; $E_{\alpha,\beta}(t)$ — двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера; $E_\alpha(t) = E_{\alpha,1}(t)$. Собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ являются решением следующей задачи Штурма — Лиувилля [6]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) - q(x) \right] X(x) + \lambda r(x) X(x) = 0,$$

$$\left[b_i \frac{\partial X(x)}{\partial x} + a_i X(x) \right]_{x = x^i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Сформулируем теперь l-проблему моментов [5]. Пусть задана система функций $g_n(t) \in L_{p'}[0,T]$ и набор чисел c_n, хотя бы одно из которых отлично от нуля. Пусть также задано число $l > 0$. Необходимо найти функцию $W(t) \in L_p(0,T]$ $(1/p + 1/p' = 1)$ такую, что выполненяются следующие соотношения:

$$\int_0^T g_n(\tau)W(\tau)d\tau = c_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{7}$$

$$\|W(t)\| \leqslant l. \tag{8}$$

Выберем функции $W(t)$ и $g_n(t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} W(t) = u_n(t) + \left(v_1' w_n' - (q(x)v_1(x))_n + \lambda_n (r(x)v_1(x))_n\right) u^1(t) \\ + \left(v_2' w_n' - (q(x)v_2(x))_n + \lambda_n (r(x)v_2(x))_n\right) u^2(t), \end{aligned} \tag{9}$$

$$g_n(t,T) = \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}. \tag{10}$$

Числа c_n выберем в виде

$$\begin{aligned} c_n(T) = Q_n^* - V_n(T) - \left[\varphi_n^0 - V_n(0+)\right] E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) - \left[\varphi_n^1 - \left(\frac{\partial V(x,0+)}{\partial t}\right)_n\right] T E_{\alpha,2}(-\lambda_n T^\alpha) \\ - \int_0^T g_n(t,T)\left[f_n(t) + w_n'\left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right)_n - (q(x)V(x,t))_n - \left(r(x)\, {}_0^C D_t^\alpha V(x,t)\right)_n\right] dt \\ + \left[(v_1(x)r(x))_n - v_{1n}\right] u^1(T) + \left[(v_2(x)r(x))_n - v_{2n}\right] u^2(T) \\ - \left(\left[(v_1(x)r(x))_n - v_{1n}\right] u^1(0+) + \left[(v_2(x)r(x))_n - v_{2n}\right] u^2(0+)\right) E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) \\ - \left(\left[(v_1(x)r(x))_n - v_{1n}\right] \frac{\partial u^1(0+)}{\partial t} + \left[(v_2(x)r(x))_n - v_{2n}\right] \frac{\partial u^2(0+)}{\partial t}\right) T E_{\alpha,2}(-\lambda_n T^\alpha). \end{aligned} \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть функция* $W(t)$, *определяемая выражением* (9), *точечно разрывна и имеет не более чем счетное число точек разрыва и интервалов непрерывности. Предположим также, что* $\alpha \in (1, 2)$, *выражение в правой части формулы* (11) *определено, ограничено и отлично от нуля хотя бы при одном значении* n. *Тогда выражение* (6) *эквивалентно выражению* (7) *с учетом выражений* (9)–(11).

$\lhd$ Разложим функции $Q^*(x)$ и $R(x,T)$ по системе собственных функций $\{X_n(x)\}$ и подставим результат в выражение (6). Поскольку система $\{X_n(x)\}$ по определению является полной, то выражение (6) эквивалентно соответствующему набору выражений для коэффициентов разложения при каждом n.

Рассмотрим теперь интеграл в формуле (6), содержащий дробные производные граничных управлений (представляющий собой взвешенную сумму моментов дробных производных граничных управлений относительно функций $g_n(t)$). Воспользовавшись формулой дробного интегрирования по частям [7] и проведя необходимые вычисления, получим

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^T g_n(t,T)\left[(r(x)v_1(x))_n \cdot {}_0^C D_t^\alpha u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n \cdot {}_0^C D_t^\alpha u^2(t)\right] dt \\
= \int\limits_0^T \left[(r(x)v_1(x))_n u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n u^2(t)\right] \cdot {}_t^{RL} D_T^\alpha g_n(t,T)\, dt \\
+ \left[\left[(r(x)v_1(x))_n \frac{\partial u^1(t)}{\partial t} + (r(x)v_2(x))_n \frac{\partial u^2(t)}{\partial t}\right] \cdot {}_t^{RL} I_T^{1-\{\alpha\}} g_n(t,T)\right]\Bigg|_0^T \\
+ \left[\left[(r(x)v_1(x))_n u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n u^2(t)\right] \cdot {}_t^{RL} D_T^{\{\alpha\}} g_n(t,T)\right]\Bigg|_0^T,
\end{gathered} \tag{12}
$$

${}_t^{RL} D_T^\sigma$ и ${}_t^{RL} I_T^\sigma$ — соответственно правосторонние операторы дробного дифференцирования и интегрирования порядка σ в смысле Римана — Лиувилля.

Пользуясь определениями правосторонних операторов Римана — Лиувилля [4] и формулой (10), получим

$$
{}_t^{RL} D_T^\alpha g_n(t,T) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\big[-\lambda_n (T-\tau)^\alpha\big] d\tau, \tag{13}
$$

$$
{}_t^{RL} D_T^{\{\alpha\}} g_n(t,T) = -\frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\big[-\lambda_n (T-\tau)^\alpha\big] d\tau, \tag{14}
$$

$$
{}_t^{RL} I_T^{1-\{\alpha\}} g_n(t,T) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int\limits_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\big[-\lambda_n (T-\tau)^\alpha\big] d\tau. \tag{15}
$$

Интеграл в правой части выражений (13)–(15) можно вычислить, воспользовавшись представлением функции Миттаг-Леффлера в виде степенного ряда [4]

$$
E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{16}
$$

Ряд (16) сходится равномерно на вещественной оси и, следовательно, мы можем менять порядок суммирования и интегрирования в ходе вычисления интеграла в правой части выражений (13)–(15). В итоге получим

$$
\begin{gathered}
K_\alpha(T,t) = \int\limits_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\big[-\lambda_n (T-\tau)^\alpha\big]\, d\tau \\
= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha(k+1)]} \int\limits_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T-\tau)^{\alpha(k+1)-1}\, d\tau \\
= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha(k+1)]} (T-t)^{\alpha k + [\alpha]} B(1-\{\alpha\}, \alpha(k+1)) \\
= \Gamma(1-\{\alpha\})(T-t)^{[\alpha]} E_{\alpha,1+[\alpha]}\big[-\lambda_n (T-t)^\alpha\big],
\end{gathered} \tag{17}
$$

где $B(\alpha,\beta)$ — бета-функция Эйлера, $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

В рассматриваемом нами случае $\alpha \in (1,2)$, т. е. $[\alpha] = 1$. Используя выражение (15), получим из (17)

$$\begin{aligned}\Bigg[\bigg[(r(x)v_1(x))_n \frac{\partial u^1(t)}{\partial t} + (r(x)v_2(x))_n \frac{\partial u^2(t)}{\partial t}\bigg] \cdot {}_t^{RL}I_T^{1-\{\alpha\}} g_n(t,T)\Bigg]\Bigg|_0^T \\ = -TE_{\alpha,2}\big[-\lambda_n T^\alpha\big]\bigg[(r(x)v_1(x))_n \frac{\partial u^1(0+)}{\partial t} + (r(x)v_2(x))_n \frac{\partial u^2(0+)}{\partial t}\bigg].\end{aligned} \tag{18}$$

Вычислим далее первую и вторую производные выражения (17), используя представление (16). Для первой производной будем иметь

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t} K_\alpha(T,t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(1-\{\alpha\})(T-t)^{[\alpha]} E_{\alpha,1+[\alpha]}\big[-\lambda_n(T-t)^\alpha\big] \\ &= \Gamma(1-\{\alpha\})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha k+1+[\alpha]]}(\alpha k+[\alpha])(T-t)^{\alpha k+[\alpha]-1} \\ &= \Gamma(1-\{\alpha\})(T-t)^{[\alpha]-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha k+[\alpha]]}(T-t)^{\alpha k} \\ &= \Gamma(1-\{\alpha\})(T-t)^{[\alpha]-1}E_{\alpha,[\alpha]}\big[-\lambda_n(T-t)^\alpha\big].\end{aligned}$$

Учтя (14) и $[\alpha] = 1$, получим

$${}_t^{RL}D_T^{\{\alpha\}} g_n(t,T) = E_\alpha\big[-\lambda_n(T-t)^\alpha\big].$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\Big[\big[(r(x)v_1(x))_n u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n u^2(t)\big] \cdot {}_t^{RL}D_T^{\{\alpha\}} g_n(t,T)\Big]\Big|_0^T \\ = (r(x)v_1(x))_n u^1(T) + (r(x)v_2(x))_n u^2(T) \\ - \big[(r(x)v_1(x))_n u^1(0+) + (r(x)v_2(x))_n u^2(0+)\big] E_\alpha\big[-\lambda_n T^\alpha\big].\end{aligned} \tag{19}$$

Аналогичным образом вычислим вторую производную выражения (17):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} K_\alpha(T,t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Gamma(1-\{\alpha\})(T-t)^{[\alpha]}E_{\alpha,1+[\alpha]}\big[-\lambda_n(T-t)^\alpha\big] \\ &= \Gamma(1-\{\alpha\})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha k+1+[\alpha]]}(\alpha k+[\alpha])(\alpha k+[\alpha]-1)(T-t)^{\alpha k+[\alpha]-2} \\ &= \Gamma(1-\{\alpha\})(T-t)^{[\alpha]-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_n)^k(\alpha k+[\alpha]-1)}{\Gamma[\alpha k+[\alpha]]}(T-t)^{\alpha k} \\ &= \Gamma(1-\{\alpha\})(T-t)^{[\alpha]-2}\left[\frac{[\alpha]-1}{\Gamma([\alpha])} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\lambda_n)^k(\alpha k+[\alpha]-1)}{\Gamma[\alpha k+[\alpha]]}(T-t)^{\alpha k}\right].\end{aligned}$$

Сделав в полученном выражении замену индекса $k = m+1$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} K_\alpha(T,t) &= \Gamma(1-\{\alpha\})(T-t)^{[\alpha]-2}\left[\frac{[\alpha]-1}{\Gamma([\alpha])} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{[-\lambda_n(T-t)^\alpha]^{m+1}}{\Gamma[\alpha(m+1)+[\alpha]-1]}\right] \\ &= \Gamma(1-\{\alpha\})(T-t)^{[\alpha]-2}\left[\frac{[\alpha]-1}{\Gamma([\alpha])} - \lambda_n(T-t)^\alpha E_{\alpha,[\alpha]+\alpha-1}\big[-\lambda_n(T-t)^\alpha\big]\right].\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в формулу (13) с учетом формулы (10) и $[\alpha]=1$, получим

$$ {}^{RL}_{\ t}D^{\alpha}_{T} g_n(t,T) = -\lambda_n g_n(t,T). \tag{20} $$

Подставив выражения (18), (19) и (20) в правую часть выражения (12), получим

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^T g_n(t,T)\left[(r(x)v_1(x))_n\cdot {}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n\cdot {}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}u^2(t)\right]dt \\
= -\lambda_n\int\limits_0^T \left[(r(x)v_1(x))_n u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n u^2(t)\right] g_n(t,T)\,dt - T E_{\alpha,2}\big[-\lambda_n(T-t)^{\alpha}\big] \\
\times\left[(r(x)v_1(x))_n\,\frac{\partial u^1(0+)}{\partial t} + (r(x)v_2(x))_n\,\frac{\partial u^2(0+)}{\partial t}\right] + (r(x)v_1(x))_n u^1(T) + (r(x)v_2(x))_n u^2(T) \\
- \left[(r(x)v_1(x))_n u^1(0+) + (r(x)v_2(x))_n u^2(0+)\right] E_{\alpha}\big[-\lambda_n T^{\alpha}\big].
\end{gathered}
$$

Подставив полученное выражение в формулу (6) и учтя выражения (9), (11) и (10), окончательно получим выражение (7). ▷

Следствие 1. *Задача оптимального управления, поставленная в п.* 1, *при заданных l и T эквивалентна счетномерной l-проблеме моментов* (7)–(8) *для функции* (9), *моментов* (11) *и функций* (10).

Замечание 1. Выражения (11) содержат начальные и конечные значения граничных управлений и их производных. В общем случае эти значения могут быть определены из некоторых дополнительных условий или предположений. В случае $r(x)=1$ коэффициенты при этих значениях обнуляются и необходимость в таком доопределении отпадает.

3. Конечномерная l-проблема моментов

Как было показано в предыдущем разделе, рассматриваемая в данной работе задача оптимального управления может быть сведена к счетномерной l-проблеме моментов. Однако для полученной проблемы неизвестно четких критериев, позволяющих установить ее разрешимость, и алгоритмов построения решения. Для конечномерной l-проблемы моментов такие критерии и алгоритмы существуют [5], что делает целесообразным ее рассмотрение. Конечномерная l-проблема моментов (7)–(8) может быть получена по аналогии со счетномерной проблемой, если вместо точного решения (6) использовать приближенное, получаемое при усечении входящих в формулу рядов. Тогда из решения (6), в котором ряды заменены частичными суммами, мы получим уже не счетный, а конечный набор из некоторого числа N равенств для коэффициентов разложения. Этот набор может быть переписан в виде конечномерной проблемы моментов, которую в данном случае можно назвать $\{l,N\}$-проблемой моментов.

Будем говорить, что конечномерная $\{l,N\}$-проблема моментов корректна, если норма функций $g_n(t)$ определена в пространстве $L_{p'}[0,T]$.

Конечномерная l-проблема моментов, как известно, является разрешимой, если функции $g_n(t)\in L_{p'}[0,T]$ линейно независимы или среди них можно выделить подсистему линейно независимых функций [5].

Теорема 2. $\{l,N\}$*-проблема моментов* (7))–(8) *с учетом выражений* (9)–(11) *при любом фиксированном N и заданном $l>0$ корректна и разрешима.*

$\lhd$ Оценим норму функций $g_n(t)$, заданных формулой (10), в пространстве $L_{p'}[0,T]$:

$$\big\|\tilde{g}_n(t,T)\big\| \leqslant \big\|E_{\alpha,\alpha}\big[-\lambda_n\,(T-\tau)^{\alpha}\big]\big\| \cdot \big\|(T-t)^{\alpha-1}\big\|, \quad n=1,\ldots,N.$$

Первый множитель в результирующем выражении ограничен [4, с. 42]. Второй множитель вычислим в явном виде, учтя, что $p' \geqslant 1$ и $\alpha \in (1,2)$:

$$\big\|(T-t)^{\alpha-1}\big\| = \frac{(T-t)^{[p'(\alpha-1)+1]/p'}}{[p'(\alpha-1)+1]^{1/p'}}\Bigg|_0^T, \quad t\in[0,T].$$

Полученное выражение ограничено при любых вещественных $T>0$, $p'\geqslant 1$ и $\alpha\in(1,2)$. Следовательно, рассматриваемая $\{l,N\}$-проблема моментов корректна.

Функции, определяемые формулой (10), являются линейно независимыми, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Следовательно, рассматриваемая проблема моментов разрешима. $\rhd$

Как известно, конечномерная l-проблема моментов (для которой обоснованы корректность и разрешимость) эквивалентна следующей задаче условной оптимизации [5]: найти

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_N}\left(\int_0^T\left|\sum_{i=1}^N \xi_i g_i(t)\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} = \left(\int_0^T\left|\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t)\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} \tag{21}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^N \xi_i c_i = \sum_{i=1}^N \xi_i^* c_i = 1, \tag{22}$$

где ξ_i — произвольные числа, а числа ξ_i^* соответствуют решению задачи, $i=1,\ldots,N$.

Основываясь на решении данной задачи оптимизации, можно построить решение конечномерной l-проблемы моментов и, следовательно, задачи оптимального управления [5]. Это решение при $W(t)\in L_p[0,T]$, $p>1$ будет единственным. В случае задачи А функция $\widetilde{W}(t)$, являющаяся единственным решением конечномерной l-проблемы моментов, будет определяться выражением

$$\widetilde{W}(t) = \Lambda_N^{p'}\left|\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t)\right|^{p'-1} \operatorname{sign}\left[\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t)\right], \quad t\in[0,T]. \tag{23}$$

Аналогично, в случае задачи Б

$$\widetilde{W}(t) = l^{p'}\left|\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t)\right|^{p'-1} \operatorname{sign}\left[\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t)\right], \quad t\in[0,T^*], \tag{24}$$

где T^* — минимальное вещественное неотрицательное число, для которого выполняется условие

$$\Lambda_N(T)\leqslant l, \tag{25}$$

где

$$\frac{1}{\Lambda_N(T)} = \left(\int_0^T\left|\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t)\right|^{p'} dt\right)^{1/p'}.$$

Пример 1. Рассмотрим приближенное решение задачи Б оптимального граничного управления для уравнения супердиффузии, к которому уравнение (1) сводится при следующих предположениях:

$$f(x,t)=u(x,t)=0,\quad r(x)=w(x)=1,\quad q(x)=0,$$
$$b_1=b_2=0,\quad a_1=a2=1,\quad h_1(t)=h_2(t)=0,$$
$$u^1(t)=u^2(t)=u(t),\quad \varphi^0(x)=Q^0=\mathrm{const},\quad \varphi_1(x)=Q^1=\mathrm{const}\,.$$

Конечное состояние (5), в которое необходимо перевести систему за минимальное время, зададим в виде
$$Q^*(x)=Q^T=\mathrm{const},\quad Q^T>Q^0.$$

Собственные функции $X_n(x)$ и собственные значения λ_n в данном случае выражаются формулами
$$X_n(x)=\sin\frac{\pi n x}{L},\quad \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2.$$

Будем рассматривать граничные управления, являющиеся существенно ограниченными функциями, $u(t)\in L_\infty[0,T]$.

В целом, исследуемая в данном примере задача аналогична исследованной ранее задаче оптимального граничного управления для уравнения субдиффузии, в котором $\alpha\in(0,1]$ [8].

Моменты (11) в данном случае будут выражаться следующей формулой:

$$c_n=\frac{2}{\pi n}\big(1-(-1)^n\big)\big[Q^T-Q^0E_\alpha(-\lambda_nT^\alpha)-Q^1TE_{\alpha,2}(-\lambda_nT^\alpha)\big].$$

Функция (9) будет пропорциональна граничному управлению

$$W(t)=\frac{2\lambda_n}{\pi n}\big(1-(-1)^n\big)u(t).$$

Конечномерная $\{l,N\}$-проблема моментов в данном случае запишется в следующем виде:
$$\int\limits_0^T g_n(t,T)u(t)\,dt=\frac{Q^T-Q^0E_\alpha(-\lambda_nT^\alpha)-Q^1TE_{\alpha,2}(-\lambda_nT^\alpha)}{\lambda_n}=\tilde{c}_n. \tag{26}$$

Положим $N=3$ и найдем решение проблемы (26). Используя (22) сведем задачу условной минимизации (21) к задаче безусловной минимизации следующего вида:

$$\frac{1}{\Lambda_3(T)}=\min_{\xi_1,\,\xi_2}\rho_\xi(T),$$

где
$$\rho_\xi(T)=\int\limits_0^T\left|\xi_1g_1(t)+\xi_2g_2(t)+\frac{1-\xi_1c_1-\xi_2c_2}{c_3}\,g_3(t)\right|dt.$$

Эта задача может быть решена численно, например, используя алгоритм из монографии [5, гл. 4, § 1]. Найдя таким образом оценки T^* и $\xi^*_{1,2}$, можно вычислить оптимальное управление по формуле (24) и состояние системы в конечный момент времени:

$$Q^N(x,T^*)=\sum_{n=1}^N Q_n(T^*)X_n(x),$$

где

$$Q_n(T^*) = \frac{2}{\pi n}\big(1-(-1)^n\big)\left[\lambda_n \int\limits_0^{T^*} g_n(t,T^*)u(t)dt + Q^0 E_\alpha(-\lambda_n (T^*)^\alpha) + Q^1 T^* E_{\alpha,2}(-\lambda_n (T^*)^\alpha)\right].$$

На рис. 1 показаны оптимальное управление и конечное состояние, вычисленные при следующих значениях параметров: $l = 100$, $\alpha = 1,8$, $Q^0 = 10$, $Q^T = 30$, $Q^1 = 0$ (точность численного нахождения времени управления 5×10^{-2}). На рис. 2 показана зависимость времени управления T^* от показателя α при $Q^1 = 0$ (сплошная линия) и $Q^1 = 5$ (штриховая линия), соответствующие линии очень близки.

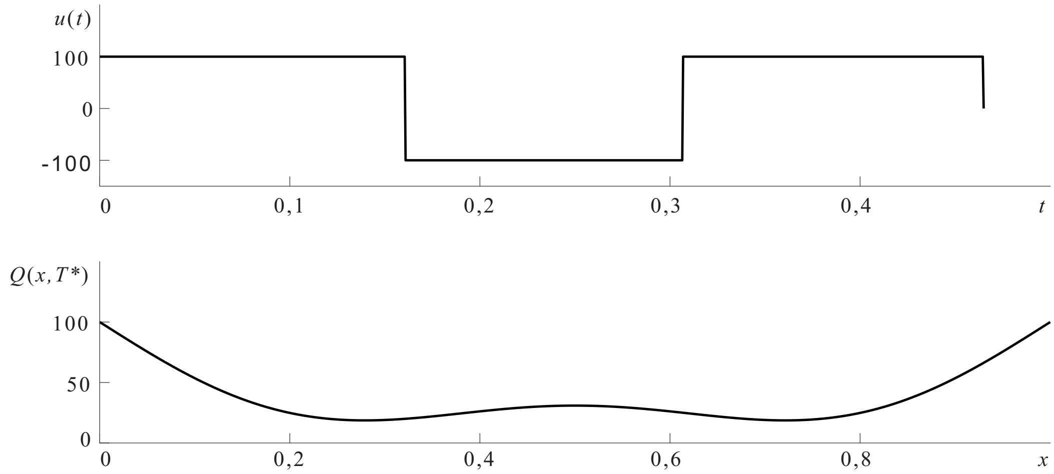

Рис. 1. Пример вычисленного оптимального управления (верхний график) и конечного состояния системы (нижний график).

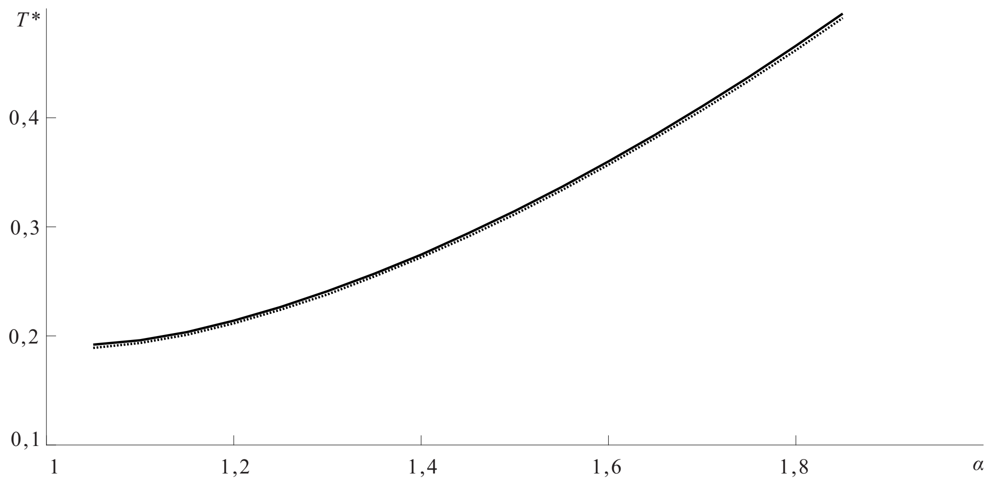

Рис. 2. Зависимость времени управления от показателя α.

Заключение

В настоящей работе исследована задача оптимального управления для системы, поведение которой описывается диффузионно-волновым уравнением, содержащим дробную производную Капуто по времени. Задача сведена к счетномерной l-проблеме моментов на основе точного решения диффузионно-волнового уравнения и к конечномерной l-проблеме моментов на основе приближенного решения. В последнем случае доказана корректность и разрешимость полученной проблемы.

Литература

1. *Mophou G. M.* Optimal control of fractional diffusion equation // Comp. Math. Appl.—2010.—Vol. 61, № 1.—P. 68–78. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.10.030.
2. *Tang Q., Ma Q.* Variational formulation and optimal control of fractional diffusion equations with Caputo derivatives // Adv. Differ. Equ.—2015.—Article number 283. DOI: 10.1186/s13662-015-0593-5.
3. *Zhou Z., Gong W.* Finite element approximation of optimal control problems governed by time fractional diffusion equation // Comp. Math. Appl.—2016.—Vol. 71, № 1.—P. 301–318. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.11.014.
4. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations.—Amsterdam: Elsevier, 2006.—540 p.
5. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.—М.: Наука, 1965.—475 с.
6. *Sandev T., Tomovski Z.* The general time fractional wave equation for a vibrating string // J. Phys. A: Math. Theor.—2010.—Vol. 43, № 5.—Paper ID 055204. DOI: 10.1088/1751-8113/43/5/055204.
7. *Agrawal O. P.* Fractional variational calculus in terms of Riesz fractional derivatives // J. Phys. A: Math. Theor.—2007.—Vol. 40, № 24.—P. 6287—6303. DOI: 10.1088/1751-8113/40/24/003.
8. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка // Автоматика и телемеханика.—2018.—№ 5.—С. 137–152.

Статья поступила 29 октября 2021 г.

Постнов Сергей Сергеевич
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
научный сотрудник
РОССИЯ, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
E-mail: postnov.sergey@inbox.ru
https://orcid.org/0000-0002-0392-3762

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 3, P. 108–119

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR SYSTEMS MODELLED BY DIFFUSION-WAVE EQUATION

Postnov, S. S.[1]

[1] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS,
65 Profsoyuznaya St., 117997 Moscow, Russia

E-mail: postnov.sergey@inbox.ru

Abstract. This paper deals with an optimal control problem for a model system defined by a one-dimensional non-homogeneous diffusion-wave equation with a time derivative of fractional-order. In general case we consider both of boundary and distributed controls which are p-integrable functions (including $p = \infty$).

In this case two types of optimal control problem are posed and analyzed: the problem of control norm minimization at given control time and the problem of time-optimal control at given restriction on control norm. The study is based on the use of an exact solution of the diffusion-wave equation, with the help of which the optimal control problem is reduced to an infinite-dimensional l-moment problem. We also consider a finite-dimensional l-moment problem obtained in a similar way using an approximate solution of the diffusion-wave equation. Correctness and solvability are analyzed for this problem. Finally, an example of boundary control calculation using a finite-dimensional l-moment problem is considered.

Key words: optimal control, Caputo derivative, diffusion-wave equation, l-problem of moments.

AMS Subject Classification: 49N05, 49J21, 34K35, 34A08.

For citation: *Postnov, S. S.* Optimal Control Problem for Systems Modelled by Diffusion-Wave Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 108–119 (in Russian). DOI: 10.46698/s3949-8806-8270-n.

References

1. *Mophou, G. M.* Optimal Control of Fractional Diffusion Equation, *Computational and Applied Mathematics*, 2010, vol. 61, no. 1, pp. 68–78. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.10.030.
2. *Tang, Q. and Ma, Q.* Variational Formulation and Optimal Control of Fractional Diffusion Equations with Caputo Derivatives, *Advances in Difference Equations*, 2015, article number 283. DOI: 10.1186/s13662-015-0593-5.
3. *Zhou, Z. and Gong, W.* Finite Element Approximation of Optimal Control Problems Governed by Time Fractional Diffusion Equation, *Computational and Applied Mathematics*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 301–318. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.11.014.
4. *Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam, Elsevier, 2006, 540 p.
5. *Butkovskii, A. G. Distributed Control Systems*, New York, American Elsevier, 1969, 446 p.
6. *Sandev, T. and Tomovski, Z.* The General Time Fractional Wave Equation for a Vibrating String, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2010, vol. 43, no. 5, paper ID 055204. DOI: 10.1088/1751-8113/43/5/055204.
7. *Agrawal, O. P.* Fractional Variational Calculus in Terms of Riesz Fractional Derivatives, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2007, vol. 40, no. 24, pp. 6287—6303. DOI: 10.1088/1751-8113/40/24/003.
8. *Kubyshkin, V. A. and Postnov, S. S.* Time-Optimal Boundary Control for Systems Defined by a Fractional Order Diffusion Equation, *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 5, pp. 884–896. DOI: 10.1134/S0005117918050090.

Received October 29, 2021

Sergey S. Postnov
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS,
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia
Researcher
E-mail: postnov.sergey@inbox.ru
https://orcid.org/0000-0002-0392-3762