Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 3, С. 5–14

УДК 514.764.227
DOI 10.46698/f6017-0875-0171-y

О КОНФОРМНОМ МНОЖИТЕЛЕ В КОНФОРМНОМ УРАВНЕНИИ КИЛЛИНГА НА 2-СИММЕТРИЧЕСКОМ ПЯТИМЕРНОМ НЕРАЗЛОЖИМОМ ЛОРЕНЦЕВОМ МНОГООБРАЗИИ#

Т. А. Андреева[1], Д. Н. Оскорбин[1], Е. Д. Родионов[1]

[1] Алтайский государственный университет,
Россия, 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61

E-mail: andreeva08t@mail.ru, oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru

Аннотация. Конформно киллинговы векторные поля являются естественным обобщением киллинговых векторных полей и играют важную роль в исследовании группы конформных преобразований многообразия, потоков Риччи на многообразии, теории солитонов Риччи. Псевдоримановы симметрические пространства порядка k, где $k \geqslant 2$, возникают в исследованиях по псевдоримановой геометрии и в физике. В настоящее время они исследованы в случаях $k = 2, 3$ Д. В. Алексеевским, А. С. Галаевым и другими. В случае малых размерностей эти пространства и векторные поля Киллинга на них изучались Д. Н. Оскорбиным, Е. Д. Родионовым и И. В. Эрнстом. Солитоны Риччи являются обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях и их уравнение изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, Д. Н. Оскорбиным и Е. Д. Родионовым было найдено общее решение уравнения солитона Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности, доказана локальная разрешимость этого уравнения в классе 3-симметрических лоренцевых многообразий. В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи, векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, отвечающее данной константе. Однако, для различных значений константы Эйнштейна, роль полей Киллинга играют конформно киллинговы векторные поля. Поэтому возникает потребность в их изучении. В данной работе исследован конформный аналог уравнения Киллинга на пятимерных 2-симметрических неразложимых лоренцевых многообразиях, исследованы свойства конформного множителя конформного аналога уравнения Киллинга на них. Построены нетривиальные примеры конформно киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем.

Ключевые слова: конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, k-симметрические пространства, киллинговы векторные поля, солитоны Риччи.

AMS Subject Classification: 53B30.

Образец цитирования: *Андреева Т. А., Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д.* О конформном множителе в конформном уравнении киллинга на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 3.—С. 5–14. DOI: 10.46698/f6017-0875-0171-y.

1. Введение

Векторные поля Киллинга порождают алгебру Ли группы движений многообразия и традиционно привлекают внимание математиков [1]. Естественным обобщением данных полей являются конформно киллинговы векторные поля, алгебра Ли которых соответствует группе конформных преобразований многообразия.

#Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22–21–00111 «Псевдоримановы многообразия с ограничениями на тензор Риччи».

Важным приложением конформно киллинговых векторных полей являются солитоны Риччи, которые впервые были рассмотрены Р. Гамильтоном в процессе исследования потоков Риччи на многообразиях. Солитоны Риччи являются обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях и их уравнение изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, было найдено общее решение уравнения солитона Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности, доказана локальная разрешимость этого уравнения в классе 3-симметрических лоренцевых многообразий. В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи, векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, отвечающее данной константе [2].

Ранее было описано общее решение конформного аналога уравнения Киллинга на неразложимом симметрическом четырехмерном лоренцевом многообразии [3]. Кроме того описаны конформно-киллинговы векторные поля на пятимерных локально неразложимых 2-симметрических лоренцевых многообразиях в локальных координатах, открытых А. С. Галаевым и Д. В. Алексеевским, при условии постоянного конформного множителя [4, 5]. В данной работе исследованы свойства конформного множителя конформного аналога уравнения Киллинга на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Приведем предварительные определения и факты.

2. Основные определения и обозначения

Определение 1. *Псевдоримановым многообразием* называется гладкое многообразие $\mathscr{M}$, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathscr{M}, g)$ называется *лоренцевым многообразием.*

Определение 2. Псевдориманово многообразие $(\mathscr{M}, g)$ называется *симметрическим порядка* k, если

$$\nabla^k R = 0, \quad \nabla^{k-1} R \neq 0,$$

где $k \geqslant 1$ и R — тензор кривизны (M, g), а ∇ — связность Леви-Чивиты.

Заметим, что лоренцевы k-симметрические пространства существуют при всех $k \geqslant 2$. Для римановых многообразий из условия $\nabla^k R = 0$ вытекает $\nabla R = 0$.

Локально неразложимые 1-симметрические лоренцевы многообразия описаны Кахеном и Уоллахом в [6], 2-симметрические лоренцевы многообразия исследованы в работах [7–9]. Отметим, что они являются многообразиями Уокера [10, 11].

Определение 3. Гладкое полное векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии $(\mathscr{M}, g)$ называется *полем Киллинга*, если выполняется равенство

$$L_K g = 0,$$

где $L_K g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля K.

Определение 4. Гладкое полное векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии $(\mathscr{M}, g)$ называется *конформно киллинговым* векторным полем, если выполняется равенство

$$L_K g = f(p) g,$$

где $L_K g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля $K, p \in \mathscr{M}$, а $f(p)$ — гладкая вещественная функция на многообразии.

Из теоремы Ву (см. [12]) следует, что любое лоренцево многообразие локально может быть представлено в виде прямого произведения некоторого риманова многообразия $(\mathscr{M}_1, g_1)$ и локально неразложимого лоренцева многообразия $(\mathscr{M}_2, g_2)$. Все рассматриваемые далее лоренцевы многообразия предполагаются локально неразложимыми.

С помощью теоремы А. С. Галаева и Д. В. Алексеевского (см. [7]) можно выбрать систему локальных координат $(v,\ x,\ y,\ z,\ u)$ на $\mathscr{M}$, где $(\mathscr{M}, g)$ — неразложимое неприводимое лоренцево пятимерное многообразие, такую, что

$$\begin{aligned} g = 2dudv + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \big(&H_{110}x^2 + 2H_{120}xy + 2H_{130}xz + H_{220}y^2 \\ &+ 2H_{230}yz + H_{330}z^2 + x^2uH_{111} + y^2uH_{221} + z^2uH_{331}\big)du^2, \end{aligned} \tag{1}$$

где H_{ii1} — ненулевые действительные числа, а H_{ij0} — произвольные константы.

3. Конформно киллинговы векторные поля

Вид конформного множителя $f(p)$ в уравнении конформного уравнения Киллинга $L_X g = f(p)g$ зависит от того, является ли метрика конформно плоской. Путем прямых вычислений компонент тензора Вейля метрики (1) доказывается следующая лемма.

Лемма. *Равенство тензора Вейля метрики* (1) *нулю* $W = 0$ *равносильно условиям* $H_{111} = H_{221} = H_{331}$, $H_{110} = H_{220} = H_{330}$, *а* $H_{120} = H_{130} = H_{230} = 0$.

Далее перейдем к анализу уравнения конформно киллингова поля. Зафиксируем точку $p \in \mathscr{M}$ и рассмотрим уравнение $L_K g = f \cdot g$ в локальных координатах (1). Согласно результатам работы [13] гладкая функция f зависит только от переменной u, поэтому можем положить $f = \frac{dF(u)}{du}$ для некоторой функции $F(u)$. Обозначим координаты векторного поля K через $V(v,x,y,z,u)$, $X(v,x,y,z,u)$, $Y(v,x,y,z,u)$, $Z(v,x,y,z,u)$, $U(v,x,y,z,u)$ (V, X, Y, Z, U — гладкие функции),

$$H = H_{110}x^2 + 2H_{120}xy + 2H_{130}xz + H_{220}y^2 + 2H_{230}yz + H_{330}z^2 + x^2uH_{111} + y^2uH_{221} + z^2uH_{331},$$

тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2U_v = 0; \\ U_x + X_v = 0;\ U_y + Y_v = 0;\ U_z + Z_v = 0; \\ X_y + Y_x = 0;\ X_z + Z_x = 0;\ Z_y + Y_z = 0; \\ -f + 2X_x = 0;\ -f + 2Y_y = 0;\ -f + 2Z_z = 0; \\ -f + U_u + V_v = 0;\ H \cdot U_x + X_u + V_x = 0; \\ H \cdot U_y + Y_u + V_y = 0;\ H \cdot U_z + Z_u + V_z = 0; \\ -f \cdot H + 2U_u \cdot H + 2V_u + X \cdot H_x + Y \cdot H_y + Z \cdot H_z + U \cdot H_u = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим все уравнения, кроме последнего. Из них, следуя рассуждениям работы [14], получаем

$$\begin{cases} U = F(u), \\ X = \dfrac{1}{2}\dfrac{dF(u)}{du}x + C_1 y + C_2 z + b_1(u), \\ Y = -C_1 x + \dfrac{1}{2}\dfrac{dF(u)}{du}y + C_3 z + b_2(u), \\ Z = -C_2 x - C_3 y + \dfrac{1}{2}\dfrac{dF(u)}{du}z + b_3(u), \\ V = -\dfrac{db_1(u)}{du}x - \dfrac{db_2(u)}{du}y - \dfrac{db_3(u)}{du}z - \dfrac{x^2+y^2+z^2}{4}\dfrac{d^2F(u)}{du^2} + C_4, \end{cases} \tag{3}$$

где C_i — произвольные константы, а $b_i(u)$ — гладкие функции.

Подставляя полученные выражения в последнее уравнение (2), получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{dF(u)}{du}\big(H_{111}ux^2+H_{221}uy^2+H_{331}uz^2+H_{110}x^2\\
&\quad+2H_{120}xy+2H_{130}xz+H_{220}y^2+2H_{230}yz+H_{330}z^2\big)\\
&+\Big(\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}x+C_1y+C_2z+b_1(u)\Big)\big(2H_{111}ux+2H_{110}x+2H_{120}y+2H_{130}z\big)\\
&+\Big(-C_1x+\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}y+C_3z+b_2(u)\Big)\big(2H_{221}uy+2H_{120}x+2H_{220}y+2H_{230}z\big)\\
&+\Big(-C_2x-C_3y+\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}z+b_3(u)\Big)\big(2H_{331}uz+2H_{130}x+2H_{230}y+2H_{330}z\big)\\
&-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}-2\frac{d^2b_1(u)}{du^2}x-2\frac{d^2b_2(u)}{du^2}y-2\frac{d^2b_3(u)}{du^2}z\\
&\quad+\big(H_{111}x^2+H_{221}y^2+H_{331}z^2\big)F(u)=0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Далее покажем, что в случае, когда тензор Вейля метрики (1) нетривиален, это равенство может выполняться только для постоянной функции $f=\frac{dF(u)}{du}$.

Теорема. *Пусть $\mathscr{M}$ — 2-симметрическое пятимерное неразложимое лоренцево многообразие с метрикой* (1), *тензор Вейля которого не равен* 0. *Тогда конформный множитель $f(p)$ конформного аналога уравнения Киллинга $L_Xg=f(p)g$ постоянен.*

$\lhd$ Левая часть уравнения (4) является полиномом относительно переменных x, y, z, его коэффициенты при x^2, y^2 и z^2 должны обращаться в ноль:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}+\frac{dF(u)}{du}(2H_{111}u+2H_{110})-2C_1H_{120}-2C_2H_{130}+H_{111}F(u)=0, \tag{5}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}+\frac{dF(u)}{du}(2H_{221}u+2H_{220})+2C_1H_{120}-2C_3H_{230}+H_{221}F(u)=0, \tag{6}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}+\frac{dF(u)}{du}(2H_{331}u+2H_{330})+2C_2H_{130}+2C_3H_{230}+H_{331}F(u)=0.$$

Теперь выпишем почленные разности полученных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{dF(u)}{du}\big((2H_{111}-2H_{221})u+2H_{110}-2H_{220}\big)+(H_{111}-H_{221})F(u)\\
&\quad-4C_1H_{120}-2C_2H_{130}+2C_3a_{23}=0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dF(u)}{du}\big((2H_{111}-2H_{331})u+2H_{110}-2H_{330}\big)+(H_{111}-H_{331})F(u)\\
&\quad-2C_1H_{120}-4C_2H_{130}-2C_3H_{230}=0,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dF(u)}{du}\big((2H_{221}-2H_{331})u+2H_{220}-2H_{330}\big)+(H_{221}-H_{331})F(u)\\
&\quad+2C_1H_{120}-2C_2H_{130}-4C_3H_{230}=0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим эти три уравнения в разных случаях.

Случай 1: $H_{111}=H_{221}=H_{331}$.

При $H_{111}=H_{221}=H_{331}$ рассматриваемые уравнения примут вид

$$\frac{dF(u)}{du}(2H_{110}-2H_{220})-4C_1H_{120}-2C_2H_{130}+2C_3H_{230}=0,$$

$$\frac{dF(u)}{du}(2H_{110}-2H_{330})-2C_1H_{120}-4C_2H_{130}-2C_3H_{230}=0,$$
$$\frac{dF(u)}{du}(2H_{220}-2H_{330})+2C_1H_{120}-2C_2H_{130}-4C_3H_{230}=0.$$

Из этого следует, что при $H_{111}=H_{221}=H_{331}$, $H_{ii0}\neq H_{jj0}$, $i\neq j\in\{1,2,3\}$,

$$\frac{dF(u)}{du}=\mathrm{const}\,.$$

Случай 2.

Вторым случаем рассмотрим ситуацию, если один из H_{ii1} не равен остальным. Для определенности будем считать $H_{111}\neq H_{221}$ и $H_{111}\neq H_{331}$. Тогда поделим (7) на $H_{111}-H_{221}$, а (8) на $H_{111}-H_{331}$:

$$\frac{dF(u)}{du}\left(2u+\frac{2H_{110}-2H_{220}}{H_{111}-H_{221}}\right)+F(u)+\frac{-4C_1H_{120}-2C_2H_{130}+2C_3H_{230}}{H_{111}-H_{221}}=0,$$
$$\frac{dF(u)}{du}\left(2u+\frac{2H_{110}-2H_{330}}{H_{111}-H_{331}}\right)+F(u)+\frac{-2C_1H_{120}-4C_2H_{130}-2C_3H_{230}}{H_{111}-H_{331}}=0.$$

Положим

$$D_1=\frac{2H_{110}-2H_{220}}{H_{111}-H_{221}},\quad D_2=\frac{2H_{110}-2H_{330}}{H_{111}-H_{331}},$$
$$E_1=\frac{-4C_1H_{120}-2C_2H_{130}2C_3H_{230}}{H_{111}-H_{221}},\quad E_2=\frac{-2C_1H_{120}-4C_2H_{130}-2C_3H_{230}}{H_{111}-H_{331}}.$$

$$\begin{gathered}\frac{dF(u)}{du}(2u+D_1)+F(u)+E_1=0,\\ \frac{dF(u)}{du}(2u+D_2)+F(u)+E_2=0,\end{gathered}\tag{9}$$

откуда сразу следует постоянство функции $\frac{dF(u)}{du}$.

Случай 2.1: $D_1\neq D_2$.

Вычтем второе из полученных выражений из первого:

$$\frac{dF(u)}{du}(D_1-D_2)+E_1-E_2=0.$$

Так как $D_1\neq D_2$, то

$$\frac{dF(u)}{du}=\mathrm{const}\,.$$

Случай 2.2: $D_1=D_2$.

Вычтем из (5) домноженного на H_{221} (6) домноженное на H_{111}:

$$\begin{gathered}\frac{d^3F(u)}{du^3}\frac{H_{111}-H_{221}}{2}+\frac{dF(u)}{du}(2H_{221}H_{110}-2H_{111}H_{220})\\ -2C_1(H_{111}+H_{221})H_{120}-2C_2H_{221}H_{130}+2C_3H_{111}H_{230}=0.\end{gathered}\tag{10}$$

Из (7) выразим производную $F(u)$ через $F(u)$ и вычислим из полученного выражения поочередно вторую и третью производную:

$$\frac{dF(u)}{du}=\frac{F(u)(H_{111}-H_{221})}{2u(H_{111}-H_{221})+2H_{110}-2H_{220}}+\frac{4C_1H_{120}+2C_2H_{130}-2C_3H_{230}}{2u(H_{111}-H_{221})+2H_{110}-2H_{220}},$$

$$\frac{d^2F_1(u)}{du^2} = (H_{111} - H_{221})^2 \Bigg(- \frac{F(u)(H_{111} - H_{221})}{(2u(H_{111} - H_{221}) + 2H_{110} - 2H_{220})^2} \\ - \frac{4C_1H_{120} + 2C_2H_{130} - 2C_3H_{230}}{(2u(H_{111} - H_{221}) + 2H_{110} - 2H_{220})^2}\Bigg),$$

$$\frac{d^3F(u)}{du^3} = (H_{111} - H_{221})^2 \Bigg(\frac{3F(u)(H_{111} - H_{221})}{(2u(H_{111} - H_{221}) + 2H_{110} - 2H_{220})^3} \\ + \frac{12C_1H_{120} + 6C_2H_{130} + 34C_3H_{230}}{(2u(H_{111} - H_{221}) + 2H_{110} - 2H_{220})^3}\Bigg).$$

Подставив эти выражения в (10) получим

$$P_1(u)F(u) + P_2(u) = 0,$$

где $P_i(u)$ — некоторые непостоянные многочлены от u, коэффициенты которых выражаются через H_{ijk} и C_i.

Отсюда можно заметить, что $F(u)$ — рациональная функция. Однако уравнение (10) с помощью линейной подстановки сводится к однородному дифференциальному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами и поэтому его решением не может быть рациональная функция. Значит, $F(u)$ — постоянная функция. $\triangleright$

4. Конформно плоский случай

Теперь приведем пример метрики вида (1) с тривиальным тензором Вейля, допускающей непостоянный конформный множитель в уравнении конформно киллингова поля, и определим вид этого множителя. Положим

$$g = dvdu + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dudv + ua\big(x^2 + y^2 + z^2\big)du^2,$$

где a — произвольная постоянная. Уравнение (5) примет следующий вид:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d^3F(u)}{du^3} + 2au\,\frac{dF(u)}{du} + aF(u) = 0.$$

Из этого уравнения $F(u)$ выражается как:

$$F(u) = C_5\mathrm{AiryAi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)^2 + C_6\mathrm{AiryBi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)^2 \\ + C_7\mathrm{AiryAi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)\mathrm{AiryBi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big),$$

где $\mathrm{AiryAi}(u)$, $\mathrm{AiryBi}(u)$ — частные решения дифференциального уравнения $y'' - uy = 0$ называемого уравнением Эйри. Это простейшее дифференциальное уравнение, имеющее на действительной оси точку, в которой вид решения меняется с колеблющегося на экспоненциальный. Для действительных u функция Эйри 1-го рода определяется следующим несобственным интегралом:

$$\mathrm{AiryAi}(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + ut\right)dt.$$

Другим линейно независимым частным решением данного уравнения является функция Эйри 2-го рода $\mathrm{AiryBi}(u)$, у которой при $x \to -\infty$ колебания имеют ту же амплитуду, что и у $\mathrm{AiryAi}(u)$, но отличаются по фазе на $\pi/2$. Для действительных u функция Эйри 2-го рода выражается интегралом:

$$\mathrm{AiryBi}(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{t^3}{3}+ut\right)+\sin\left(\frac{t^3}{3}+ut\right)\right]dt$$

(см. подробнее [15]).

В данном случае векторное поле вида (3), где

$$\begin{aligned}
b_1 =& C_8\mathrm{AiryAi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)+C_9\mathrm{AiryBi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big),\\
b_2 =& C_{10}\mathrm{AiryAi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)+C_{11}\mathrm{AiryBi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big),\\
b_3 =& C_{12}\mathrm{AiryAi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)+C_{13}\mathrm{AiryBi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big),
\end{aligned}$$

является решением уравнения $L_X g = f(p)g$ для системы координат (1). А конформный множитель примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
f(u) = &-2C_5\mathrm{AiryAi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)(-a)^{\frac{1}{3}}\cdot\mathrm{AiryAi}\big(1,-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)\\
&-2C_6\mathrm{AiryBi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)(-a)^{\frac{1}{3}}\cdot\mathrm{AiryBi}\big(1,-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)\\
&-C_7(-a)^{\frac{1}{3}}\mathrm{AiryAi}\big(1,-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)\cdot\mathrm{AiryBi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)\\
&-C_7\mathrm{AiryAi}\big(-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big)(-a)^{\frac{1}{3}}\cdot\mathrm{AiryBi}\big(1,-(-a)^{\frac{1}{3}}u\big).
\end{aligned}$$

5. Заключение

В данной работе исследованы конформно киллинговы векторные поля на пятимерных 2-симметрических неразложимых лоренцевых многообразиях. Установлено, что конформный множитель конформного аналога уравнения Киллинга на них зависит от поведения тензора Вейля. Кроме того, в случае равенства нулю тензора Вейля, построены нетривиальные примеры конформно киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем.

Литература

1. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics.—Cham: Springer, 2020.—XXII+482 pp.—(Springer Monographs in Mathematics).
2. *Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д.* Солитоны Риччи и поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена — Уоллаха // Сиб. матем. журн.—2019.—Т. 60, № 5.—С. 1165–1170. DOI: 10.33048/smzh.2019.60.513.
3. *Андреева Т. А., Балащенко В. В., Оскорбин Д. Н.* Конформно-киллинговы поля на симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию.—2020.—Т. 6.—С. 19–25.
4. *Hall G. S.* Symmetries and Curvature Structure in General Relativity.—2004.—440 p.—(World Sci. Lect. Notes Phys. Vol. 46). DOI: 10.1142/1729.
5. *Андреева Т. А., Балащенко В. В., Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д.* Конформно киллинговы векторные поля на 2-симметрических пятимерных лоренцевых многообразиях // Изв. Алтайск. гос. ун-та.—2021.—Т. 117, № 1.—С. 68–71. DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-11.

6. *Cahen M., Wallach N.* Lorentzian symmetric spaces // Bull. Amer. Math. Soc.—1970.—Vol. 76, № 3.—P. 585–592. DOI: 10.1090/S0002-9904-1970-12448-X.
7. *Galaev A. S., Alexeevskii D. V.* Two-symmetric Lorentzian manifolds // J. Geometry Phys.—2011.—Vol. 61, № 12.—P. 2331–2340. DOI: 10.1016/j.geomphys.2011.07.005.
8. *Blanco O. F., Sanchez M., Senovilla J. M.* Structure of second-order symmetric Lorentzian manifold // J. Eur. Math. Soc.—2013.—Vol. 15, № 2.—P. 595–634. DOI: 10.4171/JEMS/368.
9. *Galaev A. S., Leistner T.* Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications // Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry.—2008.—P. 53–96. DOI: 10.4171/051.
10. *Walker A. G.* On parallel fields of partially null vector spaces // Quart. J. Math.—1949.—Vol. os-20, № 1.—P. 135–145. DOI: 10.1093/qmath/os-20.1.135.
11. *Brozos-Vázquez M., García-Río E., Gilkey P., Nikčević S., Vázquez-Lorenzo R.* The geometry of Walker manifolds.—Morgan & Claypool Publ., 2009.—179 p.—(Synthesis Lect. Math. Statistics). DOI: 10.2200/S00197ED1V01Y200906MAS005.
12. *Wu H.* On the de Rham decomposition theorem // Illinois J. Math.—1964.—Vol. 8, № 2.—P. 291–311. DOI: 10.1215/ijm/1256059674.
13. *Hall G. S.* Conformal symmetries and fixed points in spacetime // J. Math. Phys.—1989.—Vol. 31, № 5.—P. 1198–1207. DOI: 10.1063/1.528753.
14. *Blau M., O'Loughlin M.* Homogeneous plane waves // Nuclear Phys.—2003.—Vol. 654, № 1–2.—P. 135–176. DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00055-5.
15. *Федорюк М. В.* Эйри функции // Математическая энциклопедия. Т. 5 / Гл. ред. И. М. Виноградов.—М.: Советская энциклопедия, 1985.—С. 939–941.

Статья поступила 29 апреля 2022 г.

Андреева Татьяна Андреевна
Алтайский государственный университет,
магистр кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61
E-mail: `andreeva08t@mail.ru`

Оскорбин Дмитрий Николаевич
Алтайский государственный университет,
должность доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61
E-mail: `oskorbin@yandex.ru`

Родионов Евгений Дмитриевич
Алтайский государственный университет,
профессор кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61
E-mail: `edr2002@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0003-3624-1749

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 3, P. 5–14

ON CONFORMAL FACTOR IN THE CONFORMAL KILLING EQUATION ON THE 2-SYMMETRIC FIVE-DIMENSIONAL INDECOMPOSABLE LORENTZIAN MANIFOLD

Andreeva, T. A.[1], Oskorbin, D. N.[1] and Rodionov, E. D.[1]

[1] Altai State University, 61 Lenin Ave., Barnaul 656049, Russia

E-mail: andreeva08t@mail.ru, oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru

Abstract. Conformally Killing vector fields are a natural generalization of Killing vector fields and play an important role in the study of the group of conformal transformations of a manifold, Ricci flows on a manifold, and the theory of Ricci solitons. Pseudo-Riemannian symmetric spaces of order k, where $k \geqslant 2$, arise in the study of pseudo-Riemannian geometry and in physics. At present, they have been investigated in cases $k = 2, 3$ by D. V. Alekseevsky, A. S. Galaev and others. In the case of low dimensions, these spaces and Killing vector fields on them were studied by D. N. Oskorbin, E. D. Rodionov, and I. V. Ernst. Ricci solitons are a generalization of Einstein's metrics on (pseudo) Riemannian manifolds, and their equation has been studied on various classes of manifolds by many mathematicians. In particular, D. N. Oskorbin and E. D. Rodionov found a general solution of the Ricci soliton equation on 2-symmetric Lorentzian manifolds of low dimension, and proved the local solvability of this equation in the class of 3-symmetric Lorentzian manifolds. For a single Einstein constant in the Ricci soliton equation the Killing vector fields make it possible to find the general solution of the Ricci soliton equation corresponding to the given constant. However, for different values of the Einstein constant, conformally Killing vector fields play the role of Killing fields. Therefore, there is a need to study them. In this paper, we investigate the conformal analogue of the Killing equation on five-dimensional 2-symmetric indecomposable Lorentzian manifolds, and investigate the properties of the conformal factor of the conformal analogue of the Killing equation on them. Nontrivial examples of conformally Killing vector fields with a variable conformal factor are constructed.

Keywords: conformal Killing vector fields, Lorentzian manifolds, k-symmetric spaces, Killing vector fields, Ricci solitons.

AMS Subject Classification: 53B30.

For citation: *Andreeva, T. A., Oskorbin, D. N. and Rodionov, E. D.* On Conformal Factor in the Conformal Killing Equation on the 2-Symmetric Five-Dimensional Indecomposable Lorentzian Manifold, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 3, pp. 5–14 (in Russian). DOI: 10.46698/f6017-0875-0171-y.

References

1. *Berestovskii, V. N. and Nikonorov, Yu. G.* Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics, *Springer Monographs in Mathematics*, Springer, Cham, 2020 , XXII+482 pp.
2. *Oskorbin, D. N. and Rodionov, E. D.* Ricci Solitons and Killing Fields on Generalized Cahen–Wallach Manifolds, *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, pp. 911–915. DOI: 10.1134/S0037446619050136.
3. *Andreeva, T. A., Balashchenko, V. V. and Oskorbin, D. N.* Conformal Killing Fields on Symmetric Lorentzian Manifolds of Low Dimension, *Proceedings of the Seminar on Geometry and Mathematical Modeling*, 2020, vol. 6, pp. 19–25 (in Russian).
4. *Hall, G. S. Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, World Scientific Lecture Notes in Physics, 2004, vol. 46, 400 p. DOI: 10.1142/1729.
5. *Andreeva, T. A., Balashchenko, V. V., Oskorbin D. N. and Rodionov E. D.* Conformally Killing Fields on 2-Symmetric Five-Dimensional Lorentzian Manifolds, *Izvestiya of Altai State University*, 2021, vol. 117, no 1, pp. 68–71 (in Russian). DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-11.
6. *Cahen, M. and Wallach, N.* Lorentzian Symmetric Spaces, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1970, vol. 76, no. 3, pp. 585–592. DOI: 10.1090/S0002-9904-1970-12448-X.

7. *Galaev, A. S. and Alexeevskii, D. V.* Two-Symmetric Lorentzian Manifolds, *Journal of Geometry and Physics*, 2011, vol. 61, no. 12, pp. 2331–2340. DOI: 10.1016/j.geomphys.2011.07.005.
8. *Blanco, O. F., Sanchez, M. and Senovilla, J. M.* Structure of Second-Order Symmetric Lorentzian Manifold, *Journal of the European Mathematical Society*, 2013, vol. 15, no. 2, pp. 595–634. DOI: 10.4171/JEMS/368.
9. *Galaev, A. S. and Leistner, T.* Holonomy Groups of Lorentzian Manifolds: Classification, Examples, and Applications, *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*, 2008, pp. 53–96. DOI: 10.4171/051.
10. *Walker, A. G.* On Parallel Fields of Partially Null Vector Spaces, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1949, vol. os-20, no. 1, pp. 135–145. DOI: 10.1093/qmath/os-20.1.135.
11. *Brozos-Vázquez, M., García-Río, E., Gilkey, P., Nikčević, S. and Vázquez-Lorenzo, R. The Geometry of Walker Manifolds*, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, Morgan & Claypool Publishers, 2009, 179 p. DOI: 10.2200/S00197ED1V01Y200906MAS005.
12. *Wu, H.* On the de Rham Decomposition Theorem, *Illinois Journal of Mathematics*, 1964, vol. 8, no. 2, pp. 291–311. DOI: 10.1215/ijm/1256059674.
13. *Hall, G. S.* Conformal Symmetries and Fixed Points in Spacetime, *Journal of Mathematical Physics*, 1989, vol. 31, no. 5, pp. 1198–1207. DOI: 10.1063/1.528753.
14. *Blau, M. and O'Loughlin, M.* Homogeneous Plane Waves, *Nuclear Physics*, 2003, vol. 654, no. 1–2, pp. 135–176. DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00055-5.
15. *Fedoryuk, M. V.* Eyri Functions, *Matematicheskaya entsiklopediya* [Encyclopaedia of Mathematics], vol. 5, ed. I. M. Vinogradov, Moscow, Sovetskaya Entsiklopediya Publisher, 1985, pp. 939–941.

Received April 29, 2022

Tatjana A. Andreeva
Altai State University,
61 Lenin Ave., Barnaul 656049, Russia,
Master's Degree Student
E-mail: andreeva08t@mail.ru

Dmitrij N. Oskorbin
Altai State University,
61 Lenin Ave., Barnaul 656049, Russia,
Docent
E-mail: oskorbin@yandex.ru

Evgenij D. Rodionov
Altai State University,
61 Lenin Ave., Barnaul 656049, Russia,
Professor
E-mail: edr2002@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-3624-1749