Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 3, С. 81–88

УДК 541.124+517.9
DOI 10.46698/n3062-4932-2162-c

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С МЕДЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ЛИСТОВ[#]

Л. И. Кононенко[1]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: larak@math.nsc.ru

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, описывающая задачу химической кинетики. Данная система исследуется с помощью метода интегральных многообразий, который служит удобным аппаратом изучения многомерных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, позволяющим понижать размерность системы. Интегральное многообразие состоит из листов и при малом параметре $\varepsilon = 0$ является медленной поверхностью. Для системы сформулированы прямая и обратная задача. Прямая задача заключается в следующем: по известным правым частям системы найти решение системы или доказать его существование. Обратная задача состоит в нахождении неизвестных правых частей системы дифференциальных уравнений по некоторым данным о решении прямой задачи. Сначала мы рассматриваем вырожденный случай, когда $\varepsilon = 0$, при этом имеем некоторые ограничения на размерность медленных и быстрых переменных, на задание правых частей в виде многочленов (здесь степень многочлена равна 1), на количество листов медленной поверхности. Затем переходим к невырожденному случаю $\varepsilon \neq 0$. В случае одного листа медленной поверхности ранее была доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи для этого случая. В данной работе рассмотрена система с медленной поверхностью, состоящей из нескольких листов. Доказана теорема существования и единственности решения такой системы. Доказательство опирается на результат, полученный ранее для системы с медленной поверхностью, состоящей из одного листа.

Ключевые слова: обратная задача, обыкновенные дифференциальные уравнения, сингулярно возмущенные системы, листы медленной поверхности, малый параметр, химическая кинетика.

AMS Subject Classification: 34E15.

Образец цитирования: *Кононенко Л. И.* Обратная задача для сингулярно возмущенной системы с медленной поверхностью, состоящей из нескольких листов // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 3.—С. 81–88. DOI: 10.46698/n3062-4932-2162-c.

1. Введение

Настоящая работа основана на исследованиях, опубликованных в статье [1]. Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big), \quad \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big),$$

$x \in \mathbb{R}^m$ — медленные, $y \in \mathbb{R}^n$ — быстрые переменные, f, g — достаточно гладкие функции, $t \in \mathbb{R}$, ε — положительный малый параметр. Система рассматривается в ограниченной выпуклой инвариантной притягивающей области.

[#] Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2022-0005.

Для данной системы поставлена обратная задача: по известному решению системы при некоторых условиях надо восстановить правые части системы. Для исследования обратной задачи в [1] были введены некоторые ограничения. Данная работа является обобщением результатов, полученных в [1]; это обобщение связано с ограничением на число листов медленной поверхности.

Работа состоит из краткого обзора уже имеющихся результатов, изложенных в соответствующих статьях, и нового разультата о существовании и единственности решения системы с медленной поверхностью, состоящей из нескольких листов.

2. Прямая задача и метод интегральных многообразий

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{R}^m$, Y — область в $\mathbb{R}^n$, $T := \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$. Положим $E := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, $F := C(X \times Y \times T \times E,\, \mathbb{R}^m)$, $G := C(X \times Y \times T \times E,\, \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим задачу P с областью данных $\operatorname{Dom} P = F \times G \times E$, областью искомых $\operatorname{Im} P = C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$ и условием

$$P\big((f, g, \varepsilon), (x, y)\big) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big) \end{cases} \quad \text{для всех } t \in T,$$

где $f \in F$, $g \in G$, $\varepsilon \in E$, $x \in C^1(T, X)$, $y \in C^1(T, Y)$ [2, 3].

Задача P является прямой задачей: по известным правым частям системы находим решение $x(t), y(t)$ системы или доказываем его существование и единственность.

Такая задача P исследуется методом интегральных многообразий [4–8], который служит удобным аппаратом изучения многомерных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, позволяющим понижать размерность рассматриваемых систем.

В задаче P система распадается на «медленную» и «быструю» подсистемы:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big) \quad \text{и} \quad \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big). \tag{1}$$

Напомним необходимые сведения о методе интегральных многообразий для системы (1).

Гладкая поверхность S в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ называется *интегральным многообразием* системы (1), если любая траектория этой системы, имеющая хотя бы одну общую точку с S, целиком принадлежит поверхности S. Формально, если при $t = t_0$ точка $(x(t_0), y(t_0), t_0) \in S$, то траектория $(x(t), y(t), t)$ целиком принадлежит S.

Если в системе (1) положить $\varepsilon = 0$, получим *порождающую* или *вырожденную* систему

$$\dot{x} = f(x, y, t, 0), \tag{2}$$
$$0 = g(x, y, t, 0). \tag{3}$$

Уравнение $g(x, y, t, 0) = 0$ задает *медленную поверхность.* Это уравнение медленной поверхности может иметь одно или несколько решений, каждое из которых задает *лист медленной поверхности.*

Листы интегрального многообразия медленных движений (или медленного интегрального многообразия) являются уточнением при учете малого параметра ε листов медленной поверхности и получаются из них с помощью асимптотического разложения по степеням ε:

$$h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \cdots + \varepsilon^k h_k(x, t) + \cdots, \tag{4}$$

где коэффициенты разложения $h_k(x,t)$ подсчитываются по рекуррентной формуле, приведенной, например, в [6]:

$$h_k = -B^{-1}\left[g^{(k)} - \frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} - \sum_{p=0}^{k-1}\frac{\partial h_p}{\partial x}f^{(k-1-p)}\right], \quad B = \det\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x,t), t, 0)\right) \neq 0. \quad (5)$$

Среди интегральных многообразий системы (1) нас интересуют m-мерные интегральные многообразия (размерность медленных переменных), которые представимы в виде графика вектор-функции $y = h(x,t,\varepsilon)$.

Выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(x,t,\varepsilon) = h_0(x,t),$$

где $h_0(x,t)$ — функция, график которой является листом медленной поверхности.

Нахождение решения системы (1) сводится к отысканию решения вырожденной системы (2)–(3), получаемой из исходной, если параметр ε формально положить равным нулю. Этот факт следует из работ А. Н. Тихонова (например, [9]), в которых доказаны теоремы о предельном переходе к решению вырожденной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Правые части системы (1) являются достаточно гладкими функциями, поэтому удовлетворяют требуемым условиям, в частности, обеспечивают единственность решения.

3. Существование интегрального многообразия медленных движений

В [6] было доказано существование интегрального многообразия для системы (1). Приведем соответствующую теорему.

Пусть для системы (1) выполнены следующие условия:

I. Уравнение $g(x,y,t,0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(x,t)$ при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$.

II. В области $\Omega_0 = \{(x,y,t,\varepsilon):\ x \in \mathbb{R}^m,\ \|y - h_0(x,t)\| < \rho,\ t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$ функции f, g и h_0 равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по переменным до $(k+2)$-го порядка включительно ($k \geqslant 0$).

III. Собственные значения $\lambda_i(x,t)$ $(i = 1,\ldots,n)$ матрицы $\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x,t), t, 0)$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i(x,t) \leqslant -2\gamma < 0$.

Требуется по заданным функциям $f(x,y,t,\varepsilon)$, $g(x,y,t,\varepsilon)$ в правой части системы (1) найти $x(t)$, $y(t)$ в некоторой области Ω_0 или доказать существование решения $x(t), y(t)$.

Теорема 1 (Гольдштейн — Соболев). *Пусть выполняются условия* I–III. *Тогда существует такое* ε_1 $(0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$, *что для каждого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *система* (1) *имеет интегральное многообразие медленных движений* $y = h(x,t,\varepsilon)$, *представленное формулой* (4) *с коэффициентами* (5), *движение по которому описывается уравнением*

$$\dot{x} = f\big(x, h(x,t,\varepsilon), t, \varepsilon\big).$$

Если $x(t)$ — решение этого уравнения, то пара $x(t)$, $y(t)$, где $y(t) = h(x,t,\varepsilon)$, является решением исходной системы (1), т. е. пара $x(t)$, $y(t)$ есть решение прямой задачи.

В качестве примеров прямой задачи в [7, 8] были рассмотрены две модели из химической кинетики: математическая модель реактора идеального смешения и математическая модель каталитической реакции окисления CO на иридии.

4. Обратная задача (вырожденный случай)

Приведем постановку обратной задачи для системы (1) (вырожденный случай). Для упрощения исследования обратной задачи введены следующие ограничения:

1) рассматривается обратная задача для системы (1) при $\varepsilon = 0$, т. е. для вырожденной системы (2)–(3); тесная связь с вырожденной системой мотивирует рассмотрение случая $\varepsilon = 0$;

2) функция f в правой части медленной подсистемы системы (1) задается в виде многочлена p-й степени $f = \sum_{i+j\leqslant p} b_{ij}x^i y^j$, так как в задачах химической кинетики правые части системы часто являются полиномами, более того, будем рассматривать многочлен первой степени;

3) рассматриваются системы с одной медленной и одной быстрой переменными, т. е. $m = n = 1$; при этом область изменения переменных

$$W = \{(x, y) :\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ x + y \leqslant 1\}; \tag{6}$$

4) функцию $g(x, y, t, \varepsilon)$ считаем заданной и удовлетворяющей всем условиям теоремы о неявной функции в каждой точке области, в частности, $\frac{\partial g(x,y,t,0)}{\partial y} \neq 0$, следовательно, при $\varepsilon = 0$ медленная поверхность, уравнение которой $g(x, y, t, 0) = 0$, задана;

5) медленная поверхность состоит из n листов.

Заметим, что ограничения 1)–4) совпадают с ограничениями, принятыми в [1], и лишь в 5) мы снимаем ограничение на количество листов медленной поверхности. Итак, медленная поверхность задается уравнением $g(x, y, t, \varepsilon) = 0$, предполагаем, что оно имеет n решений, каждое из которых задает лист медленной поверхности $y = h_i(x(t), t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Задача, обратная к P, состоит в нахождении неизвестных правых частей системы дифференциальных уравнений по некоторым данным о решении прямой задачи P. Обратные задачи для различных систем дифференциальных уравнений рассматривались, например, в [10–16].

Будем рассматривать обратную задачу для системы (1) на каждом из заданных листов $y = h_i(x(t), t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $h_i \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Для каждого i рассмотрим задачу Q_i с областью данных $\operatorname{Dom} Q_i = \mathbb{R}^3$, областью искомых $\operatorname{Im} Q_i = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$Q_i(p, (x, y)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = p_1^i + p_2^i x(t) + p_3^i y(t), \\ y(t) = h_i(x(t), t), \end{cases}$$

где $p = (p_1^i, p_2^i, p_3^i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $x, y \in C^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.

В роли данных используются конечные наборы значений функций или их производных, а не всюду определенные функции. Соответствующая корректировка обратной задачи реализуется посредством композиции задачи Q_i^{-1} и вспомогательной задачи R_i с областью данных $\operatorname{Dom} R_i = (\mathbb{R}^3)^3$, областью искомых $\operatorname{Im} R_i = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$R_i\left((t, \alpha^i, \beta^i), (x, y)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t_1) = \alpha_1^i, \quad x(t_2) = \alpha_2^i, \quad x(t_3) = \alpha_3^i, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1^i, \quad \dot{x}(t_2) = \beta_2^i, \quad \dot{x}(t_3) = \beta_3^i, \end{cases}$$

где $t, \alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}^3$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$.

В области W из (6) имеем следующие ограничения на начальные данные:

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant m_\alpha \leqslant \alpha_j^i \leqslant \mu_\alpha \leqslant 1, \\
0 \leqslant m_\beta \leqslant \beta_j^i \leqslant \mu_\beta, \\
0 \leqslant m_\alpha \leqslant h_j^i \leqslant \mu_h \leqslant 1, \quad j = 1,2,3,\ i = 1,2,\ldots,n.
\end{gathered} \tag{7}
$$

По сравнению с формальной обратной задачей Q_i^{-1} композиция $Q_i^{-1} \circ R_i$ более практична и представляет собой следующую задачу: по данным $t, \alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}^3$ найти коэффициенты $p_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,3$, для которых существуют функции $x, y \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию

$$
\begin{cases}
x(t_1) = \alpha_1^i,\ x(t_2) = \alpha_2^i,\ x(t_3) = \alpha_3^i, \\
\dot{x}(t_1) = \beta_1^i,\ \dot{x}(t_2) = \beta_2^i,\ \dot{x}(t_3) = \beta_3^i, \\
\dot{x}(t) = p_1^i + p_2^i x(t) + p_3^i y(t),\ t \in \mathbb{R}, \\
y(t) = h_i\bigl(x(t), t\bigr),\ i = 1,\ldots,n,\ t \in \mathbb{R}.
\end{cases} \tag{8}
$$

В [17] был получен результат об однозначной разрешимости обратной задачи для системы (1) с медленной поверхностью, состоящей из одного листа. Аналогичную теорему мы сформулируем для каждого листа $y = h_i(x,t)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Теорема 2. *Если $t, \alpha^i \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условию*

$$
\Delta^i := \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^i & h_i(\alpha_1^i, t_1) \\ 1 & \alpha_2^i & h_i(\alpha_2^i, t_2) \\ 1 & \alpha_3^i & h_i(\alpha_3^i, t_3) \end{vmatrix} \neq 0,
$$

то при любых $\beta^i \in \mathbb{R}^3$ задача $Q_i^{-1} \circ R_i$ однозначно разрешима для данных (t, α^i, β^i) и ее решение $(p_1^i, p_2^i, p_3^i) = (Q_i^{-1} \circ R_i)^{\mathrm{s}}(t, \alpha^i, \beta^i)$ вычисляется по формулам

$$
p_j^i = \Delta_j / \Delta^i, \quad j = 1,2,3,\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{9}
$$

где Δ_j — определитель матрицы, полученной из приведенной выше матрицы заменой j-го столбца столбцом $\beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \beta_3^i)$.

В [18] был доказан критерий, который позволяет выяснить, в каких случаях существует набор чисел t_k, удовлетворяющий условию теоремы 2.

5. Существование и единственность решения обратной задачи (невырожденный случай)

В [1] был предложен алгоритм, с помощью которого исследовалась обратная задача для системы (1) с медленной поверхностью, состоящей из одного листа, в невырожденном случае ($\varepsilon \neq 0$) с теми же ограничениями на правую часть системы, которые были наложены в вырожденном случае ($\varepsilon = 0$). Этот итерационный алгоритм состоит в комбинировании на каждом шаге итерации решения обратной задачи для исследованного случая $\varepsilon = 0$ и решения прямой задачи, которое обеспечивается теоремой существования и единственности при $\varepsilon \neq 0$ для каждого листа медленной поверхности.

В данной работе каждый лист медленной поверхности является тем самым одним листом медленной поверхности, для которого был приведен алгоритм в [1], доказана его сходимость, тем самым доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи на каждом листе $y = h_i(x(t), t)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Обозначим через L_i константу из принципа сжимающих отображений [19], которая является, по сути, скоростью сходимости алгоритма на i-ом листе медленной поверхности системы (1). В качестве $L = \max\{L_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, мы рассмотрим максимальную скорость сходимости алгоритма на листе, и, учитывая все ограничения (7), аналогичные ограничениям в [1], имеем теорему существования и единственности для сингулярно возмущенной системы с медленной поверхностью, состоящей из нескольких листов.

Теорема 3. *Пусть в области W, описанной формулой* (6), *выполняются условия* 1)–5) *из раздела* **3**; *имеют место ограничения* (7); $x, y \in C^1(\mathbb{R})$ *в системе* (1). *Если $t, \alpha^i \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условию*

$$\Delta^i = \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1^i & h_i(\alpha_1^i, t) \\ 1 & \alpha_2^i & h_i(\alpha_2^i, t) \\ 1 & \alpha_3^i & h_i(\alpha_3^i, t) \end{pmatrix} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

tто при любых $\beta^i \in \mathbb{R}^3$ обратная задача для системы (1) ($\varepsilon \neq 0$) *имеет единственное решение при $L < 1$, где константа $L = \max L_i$.*

Благодарность. Автор выражает благодарность коллегам за помощь в работе и критические замечания, которые были учтены.

Литература

1. *Кононенко Л. И.* Задача идентификации для невырожденной системы дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными // Мат. заметки СВФУ.—2021.—Т. 28, № 2.—С. 3–15. DOI: 10.25587/SVFU.2021.58.21.001.
2. *Гутман А. Е., Кононенко Л. И.* Формализация обратных задач и ее приложения // Сиб. журн. чист. и прикл. матем.—2017.—Т. 17, № 4.—С. 49–56. DOI: 10.17377/PAM.2017.17.5.
3. *Гутман А. Е., Кононенко Л. И.* Обратная задача химической кинетики как композиция бинарных соответствий // Сиб. электрон. мат. изв.—2018.—Т. 15.—С. 48–53. DOI: 10.17377/semi.2018.15.006.
4. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.—М.: Наука, 1963.—512 с.
5. *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.—М.: Изд-во МГУ, 1978.—106 с.
6. *Гольдштейн В. М., Соболев В. А.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем.—Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1988.
7. *Кононенко Л. И.* О гладкости медленных поверхностей сингулярно возмущенных систем // Сиб. журн. индустр. матем.—2002.—Т. 5, № 2.—С. 109–125.
8. *Кононенко Л. И.* Медленные поверхности в задачах химической кинетики // Мат. заметки ЯГУ.—2012.—Т. 19, вып. 2.—С. 49–67.
9. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб.—1948.—Т. 22 (64), № 2.—С. 193–204.
10. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа.—М: Наука, 1980.—286 с.
11. *Романов В. Г.* Обратные задачи для гиперболических систем // Вычислительные методы в мат. физике, геофизике и оптимальном управлении.—Новосибирск: Наука, 1978.—С. 128–142.
12. *Романов В. Г., Слинючева Л. И.* Обратная задача для линейных гиперболических систем первого порядка // Мат. проблемы геофизики.—Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972.—Вып. 3.—С. 187–215.
13. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычисл. математики и мат. физики.—2004.—Т. 44, № 4.—С. 694–716.
14. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи.—Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.—458 с.
15. *Аниконов Ю. Е.* Несколько вопросов теории обратных задач для кинетических уравнений // Обратные задачи мат. физики.—Новосибирск, 1985.—С. 28–41.
16. *Голубятников В. П.* Обратная задача для уравнения Гамильтона — Якоби на замкнутом многообразии // Сиб. матем. журн.—1997.—Т. 38, № 2.—С. 276–279.

17. *Кононенко Л. И.* Задача идентификации для сингулярных систем с малым параметром в химической кинетике // Сиб. электрон. мат. изв.—2016.—Т. 13.—С. 175–180. DOI: 10.17377/semi.2016.13.015.
18. *Gutman A. E., Kononenko L. I.* Binary Correspondences and the Inverse Problem of Chemical Kinetics // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 3.—С. 37–47 (in English). DOI: 10.23671/VNC.2018.3.17981.
19. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.—Ч. 1, кн. 2; 2000, Ч. 2, кн. 1.

Статья поступила 5 ноября 2022 г.

Кононенко Лариса Ивановна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
научный сотрудник
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: larak@math.nsc.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 3, P. 81–88

THE INVERSE PROBLEM FOR SINGULAR PERTURBED SYSTEM WITH MANY-SHEETED SLOW SURFACES

Kononenko, L. I.[1]

[1] Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS,
4 Ac. Koptyuga Ave., Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: larak@math.nsc.ru

Abstract. We consider a singularly perturbed system of ordinary differential equations with small parameter, which describes a problem of chemical kinetics. We examine the system by using the method of integral manifolds that serves as a convenient tool for studying multidimensional singularly perturbed systems of differential equations and makes it possible to lower the dimension of the system. The integral manifold consists of sheets; for the small parameter $\varepsilon = 0$, it is a slow surface. We formulate the direct and inverse problems for the system. The direct problem is as follows: given the right-hand sides of the system, find a solution to the system or prove its existence. The inverse problem is to find the unknown right-hand sides of the system of differential equations from some data on a solution of the direct problem. First, we consider the degenerate case, in which the small parameter ε equals zero, and some restrictions are imposed on the dimension of the slow and fast variables, on the class of the right-hand sides that are assumed polynomial (with degree 1), and on the number of sheets of the slow surface. Then we pass to the nondegenerate case $\varepsilon \neq 0$. In the case of a single sheet of the slow surface, the existence and uniqueness theorem was previously proven for a solution of the inverse problem. In this paper, we consider a system whose slow surface consists of several sheets. We prove an existence and uniqueness theorem for a solution to such a system. The proof is based on the result previously obtained for a system whose slow surface consists of a single sheet.

Keywords: inverse problem, ordinary differential equation, small parameter, slow surface, contraction mapping principle, chemical kinetics.

AMS Subject Classification: 34E15.

For citation: *Kononenko, L. I.* The Inverse Problem for Singular Perturbed System with Many-Sheeted Slow Surfaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 3, pp. 81–88 (in Russian). DOI: 10.46698/n3062-4932-2162-c.

References

1. *Kononenko, L. I.* The Identification Problem for a Nondegenerate System of Ordinary Differential Equations with Fast and Slow Variables, *Mathematical Notes of NEFU*, 2021, vol. 28, no. 2, pp. 3–15 (in Russian). DOI: 10.25587/SVFU.2021.58.21.001.
2. *Gutman, A. E. and Kononenko, L. I.* Formalization of Inverse Problems and its Applications, *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 49–56 (in Russian). DOI: 10.17377/PAM.2017.17.5.
3. *Gutman, A. E. and Kononenko, L. I.* The Inverse Problem of Chemical Kinetics as a Composition of Binary Correspondences, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2018, vol. 15, pp. 48–53 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2018.15.006.
4. *Mitropolsky, Yu. A. and Lykova, O. B. Integral'nye mnogoobraziya v nelinejnoj mekhanike* [Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics], Moscow, Nauka, 1963, 512 p. (in Russian).
5. *Vasil'eva, A. V. and Butuzov, V. F. Singulyarno vozmuschennye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh* [Singularly Perturbed Equations in Critical Cases], Moscow, Moscow State University, 1978, 106 p. (in Russian).
6. *Goldstein V. M. and Sobolev V. A. Kachestvennyj analiz singulyarno vozmuschennykh sistem* [Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Systems], Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics, 1988 (in Russian).
7. *Kononenko, L. I.* On the Smoothness of Slow Surfaces of Singularly Perturbed Systems, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2002, vol. 5, no. 2, pp. 109–125 (in Russian).
8. *Kononenko, L. I.* Slow Surfaces in Problems of Chemical Kinetics, *Mathematical Notes of YSU*, 2012, vol. 19, issue 2, pp. 49–67 (in Russian).
9. *Tikhonov, A. N.* On Independence of Solutions to Differential Equations on a Small Parameter, *Matematicheskii Sbornik*, 1948, vol. 22 (64), no. 2, pp. 193–204 (in Russian).
10. *Lavrent'ev, M. M., Romanov, V. G. and Shishatskii, S. P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza* [Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis], Moscow, Nauka, 1980, 287 p. (in Russian).
11. *Romanov, V. G.* Inverse Problems for Hyperbolic Systems, *Vychislitel'nye metody v matematicheskoj fizike, geofizike i optimal'nom upravlenii* [Numerical Methods in Mathematical Physics, Geophysics and Optimal Control], Novosibirsk, Nauka, 1978, pp. 75–83 (in Russian).
12. *Romanov, V. G. and Slinyucheva L. I.* Inverse Problem for Linear Hyperbolic Systems of the First Order, *Matematicheskie problemy geofiziki* [Math Problems Geophysics], Novosibirsk, Izdatelstvo VTs SO AN SSSR, 1972, no. 3, pp. 187–215 (in Russian).
13. *Kozhanov, A. I.* Nonlinear Loaded Equations and Inverse Problems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 657–675.
14. *Kabanikhin, S. I. Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-posed Problems], Novosibirsk, 2010, 458 p. (in Russian).
15. *Anikonov, Yu. E.* Some Questions in the Theory of Inverse Problems for Kinetic Equations, *Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki* [Inverse Problems of Mathematical Physics], Novosibirsk, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Vychisl. Tsentr, 1985, pp. 28–41 (in Russian).
16. *Golubyatnikov, V. P.* An Inverse Problem for the Hamilton–Jacobi Equation on a Closed Manifold, *Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, no. 2, pp. 235–238. DOI: 10.1007/BF02674621.
17. *Kononenko, L. I.* Identification Problem for Singular Systems with Small Parameter in Chemical Kinetics, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2016, vol. 13, pp. 175–180 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2016.13.015.
18. *Gutman, A. E. and Kononenko, L. I.* Binary Correspondences and the Inverse Problem of Chemical Kinetics, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 37–47. DOI: 10.23671/VNC.2018.3.17981.
19. *Reshetnyak, Yu. G. Kurs matematicheskogo analiza* [Mathematical Analysis Course], Novosibirsk, 1999, vol. 1; 2000, vol. 2. (in Russian).

Received November 5, 2022

Larisa I. Kononenko
Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS,
4 Ac. Koptyuga Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Researcher
E-mail: larak@math.nsc.ru