Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 4, С. 103–119

УДК 517.98+530.1
DOI 10.46698/w5733-9015-3471-i

ОПИСАНИЕ СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ И СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЗНАЧЕНИЙ СПИНА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ[#]

М. М. Рахматуллаев[1,2,3], М. А. Расулова[1,3]

[1] Институт Математики им. В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9;
[2] Университет «Новый Узбекистан»,
Узбекистан, 100007, Ташкент, ул. Мустакиллик, 54;
[3] Наманганский государственный университет,
Узбекистан, 160136, Наманган, ул. Уйчи, 316

E-mail: `mrahmatullaev@rambler.ru`, `m_rasulova_a@rambler.ru`

Аннотация. Одна из основных проблем для гамильтониана модели Поттса — это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. При низких температурах каждому основному состоянию соответствует одна мера Гиббса. Следовательно, для модели Поттса изучение множества основных состояний также является актуальным. Работа посвящена изучению слабо периодических основных состояний для модели Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина на дереве Кэли. Известно, что слабо периодические основные состояния зависят от выбора нормального делителя группового представления дерева Кэли. Также известно, что не существует нормального делителя нечетного индекса, поэтому в данной работе рассматривается нормальный делитель индекса два. В данной работе для модели Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина на дереве Кэли произвольного порядка описаны множества слабо периодических основных состояний, соответствующих любым нормальным делителям индекса два группового представления дерева Кэли. При этом доказано, что эти множества включают в себе периодические основные состояния, соответствующие нормальным делителям индекса два, которые были известны ранее. Также найдены множества всех слабо периодических (непериодических) основных состояний в случае нормального делителя индекса два, т. е. найдены множества новых классов основных состояний.

Ключевые слова: дерево Кэли, модель Поттса с внешним полем, слабо периодические основные состояния.

AMS Subject Classification: 82B26, 60K35.

Образец цитирования: *Рахматуллаев М. М., Расулова М. А.* Описание слабо периодических основных состояний для модели Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина на дереве Кэли // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 4.—С. 103–119. DOI: 10.46698/w5733-9015-3471-i.

1. Введение

Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. При низких температурах каждому основному состоянию соответствует одна мера Гиббса (см. [1, 2]). Поэтому естественно возникает задача описания основных состояний.

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке государственного гранта Республики Узбекистан, проект № Ф-ФА-2021-425.

В работе [3] доказано, что для модели Изинга всякая периодическая мера Гиббса является либо трансляционно-инвариантной, либо $G_k^{(2)}$-периодической, где $G_k^{(2)}$ — нормальная подгруппа, состоящая из слов четной длины группы G_k — группового представления дерева Кэли. Такое утверждение также доказано для моделей Поттса, SOS, Hard-Core [4–8]. Чтобы найти другие меры Гиббса надо было расширить понятие периодичности. Поэтому в работе [9] вводятся более общие понятия — «слабо периодическая мера Гиббса» и «слабо периодическое основное состояние». Также в [9] доказано существование слабо периодической (непериодической) меры Гиббса и основных состояний. Слабо периодические основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями описаны в работе [10].

Периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка два изучены в [11]. В работе [12] для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями и с тремя состояниями описаны периодические и слабо периодические основные состояния на дереве Кэли произвольного порядка. В [13] для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями изучены слабо периодические основные состояния и меры Гиббса. В статье [14] для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями и с тремя состояниями изучены слабо периодические основные состояния.

В [15] для модели Поттса со счетным множеством значений спина на дереве Кэли изучены трансляционно-инвариантные меры Гиббса.

В [16] и [17] изучены некоторые периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями и счетным множеством значений спина на дереве Кэли третьего и четвертого порядка, соответственно.

В работе [18] методом Монте-Карло исследованы фазовые переходы в двумерных структурах, описываемых трехвершинной моделью Поттса с взаимодействиями между магнитными моментами, расположенными в узлах треугольной решетки, которые являются ближайшими и вторыми ближайшими соседями.

В статье [19] изучена векторная модель Поттса со спиновым значением $q = 3$, $q = 4$ и было рассмотрено одно основное состояние модели Поттса в магнитном поле. Также показана магнетизация ферромагнетики прямо пропорциональной зависит от температуры.

В [20] для модели Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$ описано множество периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индекса 2 и 4 группового представления дерева Кэли и изучено множество непериодических основных состояний.

В данной работе рассматривается модель Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$ и изучается множество слабо периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индекса 2 группового представления дерева Кэли. Эта статья является частичным обобщением [20]. Доказано, что множество всех слабо периодических основных состояний включает в себе периодические основные состояния, соответствующие нормальным делителям индекса 2, также найдены множества всех слабо периодических (непериодических) основных состояний в случае нормального делителя индекса два, т. е. найдены множества новых классов основных состояний.

Структура работы: В п. 2 и в п. 3 даются основные определения и известные факты, п. 4 посвящен изучению слабо периодических основных состояний.

2. Основные определения и известные факты

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geqslant 1$, есть дерево Кэли порядка k, т. е. бесконечное дерево, из каждой вершины, которого выходит ровно $k+1$ ребер, где V — множество вершин, L — множество ребер τ^k.

Пусть G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, соответственно, т. е. $a_i^2 = e$ (см. [21]).

Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k (см. [22, 23]).

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \big\{x \in V : d(x^0, x) = n\big\}$, $V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m$, $L_n = \big\{\langle x, y\rangle \in L : x, y \in V_n\big\}$, где $d(x,y)$ — расстояние между x и y на дереве Кэли, т. е. число ребер пути, соединяющее x и y.

Обозначим через $S(x)$ множество прямых потомков точки $x \in G_k$, т. е. если $x \in W_n$, то $S(x) = \big\{y \in W_{n+1} : d(x,y) = 1\big\}$. Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т. е. $S_1(x) = \big\{y \in G_k : \langle x, y\rangle\big\}$, и через $x_\downarrow$ обозначим единственный элемент множества $S_1(x) \setminus S(x)$.

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \mathbb{Z}$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \mathbb{Z}^V$.

Пусть $G_k/G_k^* = \big\{H_1, \ldots, H_r\big\}$ — фактор группа, где G_k^* — нормальный делитель индекса $r \geqslant 1$.

Определение 1. Конфигурация σ называется G_k^*-*периодической*, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x \in H_i$ для любого $x \in G_k$, т. е. значение конфигурации в вершине x зависит не от x, а от номера класса принадлежности x. G_k-периодическая конфигурация называется *трансляционно-инвариантной*.

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации.

Определение 2. Конфигурация σ называется G_k^*-*слабо периодической*, если $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ при $x_\downarrow \in H_i$, $x \in H_j$ для любого $x \in G_k$, т. е. значение конфигурации в вершине x зависит не от x, а от номера классов принадлежности $x_\downarrow$ и x.

Заметим, что слабо периодическая конфигурация σ совпадает с обычной периодической (см. определение 1), если значение $\sigma(x)$ не зависит от $x_\downarrow$.

Гамильтониан модели Поттса с внешним полем имеет вид (см. [15])

$$H(\sigma) = J \sum_{\substack{\langle x,y\rangle,\\ x,y\in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + \alpha \sum_{x\in V} \delta_{0\sigma(x)}, \tag{1}$$

где $J, \alpha \in \mathbb{R}$, α — внешнее поле и δ_{uv} — символ Кронекера.

3. Основные состояния

Для пары конфигураций σ и φ, совпадающих почти всюду, т. е. всюду, за исключением конечного числа точек, мы рассматриваем относительный гамильтониан $H(\sigma,\varphi)$ — различие между энергиями конфигурации σ, φ, т. е.

$$H\big(\sigma,\varphi\big) = J \sum_{\substack{\langle x,y\rangle,\\ x,y\in V}} \big(\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}\big) + \alpha \sum_{x\in V} \big(\delta_{0\sigma(x)} - \delta_{0\varphi(x)}\big), \tag{2}$$

где $\big(J,\alpha\big) \in \mathbb{R}^2$ — произвольный фиксированный параметр.

Пусть M — множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ *ограниченной конфигурацией* σ_b. Через c_b обозначим центр единичного шара b, и $B_t = \big\{x \in S_1(c_b) : \varphi_b(x) = t\big\}$ для всех $t \in \mathbb{Z}$. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U\big(\sigma_b\big) \equiv U\big(J,\alpha\big) = \frac{1}{2}\,J \sum_{x\in S_1(c_b)} \delta_{\sigma(c_b)\sigma(x)} + \alpha\delta_{0\sigma(c_b)}, \tag{3}$$

где $J = (J,\alpha) \in \mathbb{R}^2$.

В п. 4 мы воспользуемся следующими леммами.

Лемма 1 [20]**.** *Относительный гамильтониан* (2) *имеет вид*

$$H\big(\sigma,\varphi\big) = \sum_{b\in M}\big(U\big(\sigma_b\big) - U\big(\varphi_b\big)\big).$$

Лемма 2 [20]**.** *Для каждой конфигурации φ_b верно следующее:*

$$U(\varphi_b) \in \big\{U_n :\, n = \overline{1, 2k+4}\big\},$$

где

$$U_n = \frac{n-1}{2}J + \left(\alpha - \frac{k+2}{2}J\right)\left[\frac{n-1}{k+2}\right] \tag{4}$$

и $\left[\frac{n-1}{k+2}\right]$ *– целая часть* $\frac{n-1}{k+2}$.

Определение 3. Конфигурация φ называется *основным состоянием* для гамильтониана H, если

$$U(\varphi_b) = \min\Big\{U_n :\, n = 1, 2, 3, \ldots, 2k+4\Big\}$$

для любого $b \in M$.

Слабо периодическую конфигурацию, являющуюся основным состоянием, далее, назовем *слабо периодическим основным состоянием.*

Целью этой работы является описание множества слабо периодических основных состояний для модели Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$.

Обозначим $C_n = \big\{\varphi_b : U(\varphi_b) = U_n\big\}$ и

$$A_\xi = \Big\{(J,\alpha) \in \mathbb{R}^2 : U_\xi = \min\Big\{U_n :\, n = 1, 2, 3, \ldots, 2k+4\Big\}\Big\}. \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$A_1 = \Big\{(J,\alpha) \in \mathbb{R}^2 :\, J \geqslant 0,\, \alpha \geqslant 0\Big\},$$

$$A_2 = \ldots = A_{k+1} = \Big\{(J,\alpha) \in \mathbb{R}^2 :\, J = 0,\, \alpha \geqslant 0\Big\},$$

$$A_{k+2} = \Big\{(J,\alpha) \in \mathbb{R}^2 :\, J \leqslant 0,\, \alpha \geqslant 0\Big\},$$

$$A_{k+3} = \Big\{(J,\alpha) \in \mathbb{R}^2 :\, J \geqslant 0,\, \alpha \leqslant 0\Big\},$$

$$A_{k+4} = \ldots = A_{2k+3} = \Big\{(J,\alpha) \in \mathbb{R}^2 : \ J = 0, \ \alpha \leqslant 0\Big\},$$

$$A_{2k+4} = \Big\{(J,\alpha) \in \mathbb{R}^2 : \ J \leqslant 0, \ \alpha \leqslant 0\Big\},$$

и $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{2k+4} A_n$.

Замечание 1. Все конфигурации при $J = 0$, $\alpha = 0$ являются основными состояниями. Поэтому отметим, что $\bar{A} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

4. Слабо периодические основные состояния

Опишем G_k^*-слабо периодические основные состояния для нормального делителя G_k^* индекса 2. Заметим, что любой нормальный делитель индекса 2 группы G_k имеет вид

$$H_A = \Big\{x \in G_k : \ \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{четно}\Big\},$$

где $\varnothing \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, \ldots, k+1\}$ и $w_x(a_i)$ — число букв a_i в слове $x \in G_k$ (см. [22]). Заметим, что в случае $|A| = k+1$ (где через $|A|$ обозначено число элементов множества A), т. е. $A = N_k$ нормальный делитель H_A имеет следующий вид: $G_k^{(2)} := H_A = \{x \in G_k : \ |x| - \text{четно}\}$, где $|x|$ — длина слова x.

В этом пункте мы будем изучать слабо периодические основные состояния (которые не являются трансляционно-инвариантными). Заметим, что слабо периодические основные состояния были введены в работе [9]. Рассмотрим фактор-группу $G_k/H_A = \{H_0, H_1\}$, где $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$. Заметим, что H_0 и H_1 зависят от множества A, далее когда фиксируется множество A, тогда через H_0 и H_1 понимается соответствующие H_A и $G_k \setminus H_A$.

H_A-слабо периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{00}, & \text{если } \ x_\downarrow \in H_0, \ x \in H_0, \\ a_{01}, & \text{если } \ x_\downarrow \in H_0, \ x \in H_1, \\ a_{10}, & \text{если } \ x_\downarrow \in H_1, \ x \in H_0, \\ a_{11}, & \text{если } \ x_\downarrow \in H_1, \ x \in H_1, \end{cases}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $i, j \in \{0, 1\}$.

Замечание 2. Заметим, что если $a_{00} = a_{10}$, $a_{01} = a_{11}$, то H_A-слабо периодические конфигурации будут H_A-периодическими.

Далее, для удобства H_A-слабо периодическую конфигурацию $\varphi(x)$, $x \in G_k$, напишем в виде $\varphi = (a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11})$.

Следующая теорема описывает множества всех H_A-слабо периодических основных состояний в случае $1 \leqslant |A| < k$.

Теорема 1. *Пусть $k \geqslant 2$ и $|A| \in \{1, \ldots, k-1\}$. Тогда верны следующие утверждения:*

I. *Если $(J,\alpha) \in A_2$, то существуют счетные множества H_A-слабо периодических (не трансляционно-инвариантных) основных состояний, и они имеют следующий вид: (l, m, n, p), где $l, m, n, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

II. *Всякие H_A-слабо периодические конфигурации, кроме трансляционно-инвариантных и указанных в п. I конфигураций, при $(J,\alpha) \in \bar{A}$ не являются H_A-слабо периодическими основными состояниями.*

$\lhd$ **I.** Сначала докажем I в случае $|A| = 1$. Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi = (l, m, n, p)$, где $l, m, n, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Покажем, что слабо периодическая конфигурация φ является основным состоянием. Возможны следующие случаи:

1) Случай $l = m = n$, $p \neq l$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k + 1$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_p| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_2$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 2$, $|B_p| = k - 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 1$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J, \alpha) \in (J, \alpha) \in A_{k+2} \cap A_{k+1} \cap A_2 \cap A_k = A_2$ конфигурация $\varphi = (l, l, l, p)$ является слабо периодическим основным состоянием.

2) Случай $l = m = p$, $n \neq l$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k + 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k + 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k + 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J, \alpha) \in A_{k+2} \cap A_{k+1} \cap A_1 = A_{k+1} \equiv A_2$ конфигурация $\varphi = (l, l, n, l)$ является слабо периодическим основным состоянием.

3) Случай $l = n = p$, $m \neq l$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k + 1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k + 1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k + 1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$.

Значит, при $(J, \alpha) \in A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap A_1 = A_{k+1} \equiv A_2$ конфигурация $\varphi = (l, m, l, l)$ является слабо периодическим основным состоянием.

4) Случай $m = n = p$, $l \neq m$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k - 1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_2$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k+1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{k+1} \cap A_k \cap A_2 \cap A_{k+2} = A_2$ конфигурация $\varphi = (l,m,m,m)$ является слабо периодическим основным состоянием.

5) Случай $l = m$, $n = p$, $l \neq n$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_2$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_n| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_2$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = 1$, $|B_n| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = 0$, $|B_n| = k+1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{k+2} \cap A_{k+1} \cap A_2 = A_2$ конфигурация $\varphi = (l,l,n,n)$ является слабо периодическим основным состоянием.

6) Случай $l = n$, $m = p$, $l \neq m$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{k+1} \equiv A_2$ конфигурация $\varphi = (l,m,l,m)$ является слабо периодическим основным состоянием. Эта конфигурация также является периодическим основным состоянием.

7) Случай $l = p$, $m = n$, $l \neq m$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{k+1} \cap A_k \cap A_1 \equiv A_2$ конфигурация $\varphi = (l,m,m,l)$ является слабо периодическим основным состоянием.

8) Случай $l = m$, $l \neq n$, $l \neq p$, $n \neq p$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_n| = 0$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_n| = 1$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k$, $|B_n| = 0$, $|B_p| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_n| = 0$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_2$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 1$, $|B_n| = 1$, $|B_p| = k-1$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 0$, $|B_n| = 1$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J, \alpha) \in A_{k+2} \cap A_{k+1} \cap A_1 \cap A_2 \cap A_k = A_2$ конфигурация $\varphi = (l, l, n, p)$ является слабо периодическим основным состоянием.

9) Случай $l = n$, $l \neq m$, $l \neq p$, $m \neq p$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_p| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 1$, $|B_p| = k-1$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J, \alpha) \in A_{k+1} \cap A_1 \cap A_k \equiv A_2$ конфигурация $\varphi = (l, m, l, p)$ является слабо периодическим основным состоянием.

10) Случай $m = n$, $l \neq m$, $l \neq p$, $m \neq p$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_p| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 2$, $|B_p| = k-1$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{k+1} \cap A_k \cap A_1 \equiv A_2$ конфигурация $\varphi = (l,m,m,p)$ является слабо периодическим основным состоянием.

11) Случай $l = p$, $l \neq m$, $l \neq n$, $m \neq n$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{k+1} \cap A_k \cap A_1 \equiv A_2$ конфигурация $\varphi = (l,m,n,l)$ является слабо периодическим основным состоянием.

12) Случай $m = p$, $l \neq m$, $l \neq n$, $m \neq n$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{k+1} \cap A_k \cap A_1 \equiv A_2$ конфигурация $\varphi = (l,m,n,m)$ является слабо периодическим основным состоянием.

13) Случай $n = p$, $l \neq m$, $l \neq n$, $m \neq n$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_2$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k+1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+2}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{k+1} \cap A_k \cap A_2 \cap A_1 \cap A_{k+2} = A_2$ конфигурация $\varphi = (l,m,n,n)$ является слабо периодическим основным состоянием.

14) случай $l \neq m$, $l \neq n$, $l \neq p$, $m \neq n$, $m \neq p$, $n \neq p$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 1$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, $|B_p| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 1$, $|B_p| = k-1$, следовательно, $\varphi_b \in C_k$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, $|B_p| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+1}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{k+1} \cap A_k \cap A_1 \equiv A_2$ конфигурация $\varphi = (l,m,n,p)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Мощность таких конфигураций равна мощности множества $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^4$, т. е. счетно.

В остальных случаях $k \geqslant 3$, $|A| \in \{2,\ldots,k-1\}$ доказываются аналогичным методом.

II. Теперь рассмотрим другие конфигурации, т. е. рассмотрим конфигурации кроме трансляционно-инвариантных и указанных в пункте I, например, $\overline{\varphi} = (0,m,n,0)$, $m,n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Конфигурация $\overline{\varphi}$ не будет основным состоянием при $(J,\alpha) \in \bar{A}$. Действительно, пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\overline{\varphi}_b(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\overline{\varphi}_b(c_b) = 0$, $|B_0| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\overline{\varphi}_b \in C_{2k+3}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\overline{\varphi}_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\overline{\varphi}_b(c_b) = 0$, $|B_0| = k-1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\overline{\varphi}_b \in C_{2k+2}$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\overline{\varphi}_b(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\overline{\varphi}_b(c_b) = n$, $|B_0| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\overline{\varphi}_b \in C_1$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\overline{\varphi}_b(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\overline{\varphi}_b(c_b) = m$, $|B_0| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\overline{\varphi}_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\overline{\varphi}_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\overline{\varphi}_b(c_b) = 0$, $|B_0| = k-1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\overline{\varphi}_b \in C_{2k+2}$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\overline{\varphi}_b(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\overline{\varphi}_b(c_b) = 0$, $|B_0| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\overline{\varphi}_b \in C_{2k+3}$.

Значит, при $(J,\alpha) \in A_{2k+3} \cap A_{2k+2} \cap A_1 = \{(0,0)\}$ конфигурация $\overline{\varphi} = (0,m,n,0)$ является слабо периодическим основным состоянием. Отсюда при $(J,\alpha) \in \bar{A}$ получим, что H_A-слабо периодическая конфигурация $\overline{\varphi}$ не является основным состоянием.

Аналогичным образом, анализируя всевозможные случаи, при $(J,\alpha) \in \bar{A}$, кроме трансляционно-инвариантных конфигураций и конфигураций, указанных в пункте I, можно убедиться, что соответствующие конфигурации не являются H_A-слабо периодическими основными состояниями. $\rhd$

Замечание 3. Отметим, что слабо-периодические основные состояния зависят от выбора нормального делителя. В теореме 1 рассматривается нормальный делитель H_A в случае $1 \leqslant |A| < k$ и $|A| \in \{1, \ldots, k-1\}$, т. е. не рассмотрен случай $|A| = k$.

Следующая теорема описывает множества всех H_A-слабо периодических основных состояний в случае $|A| = k$.

Теорема 2. *Пусть $k \geqslant 2$ и $|A| = k$. Тогда верны следующие утверждения:*

I. а) *Если $(J, \alpha) \in A_1$, то существуют счетные множества H_A-слабо периодических (не трансляционно-инвариантных) основных состояний, и они имеют следующий вид: (l, m, n, p), где $l, m, n, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $l \neq m$, $l \neq n$, $m \neq n$, $m \neq p$, $n \neq p$;*

б) *Если $(J, \alpha) \in A_2$, то существуют счетные множества H_A-слабо периодических (не трансляционно-инвариантных) основных состояний, и они имеют следующий вид: (l, m, n, p), где $l, m, n, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;*

в) *Если $(J, \alpha) \in A_1 \cap A_{k+3}$, то существуют счетные множества H_A-слабо периодических (не трансляционно-инвариантных) основных состояний, и они имеют следующий вид: $(0, l, m, 0)$, $(0, l, m, n)$, $(l, m, n, 0)$, где $l, m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $l \neq m$, $l \neq n$, $m \neq n$.*

II. *Всякие H_A-слабо периодические конфигурации, кроме трансляционно-инвариантных и указанных в п.* I *конфигураций, при $(J, \alpha) \in \bar{A}$ не являются H_A-слабо периодическими основными состояниями.*

$\lhd$ Сначала докажем **I.** а). Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi = (l, m, n, p)$, где $l, m, n, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $l \neq m$, $l \neq n$, $m \neq n$, $m \neq p$, $\neq p$. Покажем, что слабо периодическая конфигурация φ является основным состоянием. Возможны следующие случаи:

1) Случай $l = p$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k-1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

Значит, при $(J, \alpha) \in A_1$ конфигурация $\varphi = (l, m, n, l)$ является слабо периодическим основным состоянием.

2) Случай $l \neq p$.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 1$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = p$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 0$, $|B_p| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k-1$, $|B_p| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k$, $|B_p| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = p$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = k$, $|B_p| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

Значит, при $(J, \alpha) \in A_1$ конфигурация $\varphi = (l, m, n, p)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Теперь докажем **I**. в).

1) Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi = (0, l, m, 0)$, где $l, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $l \neq m$. Покажем, что слабо периодическая конфигурация φ является основным состоянием.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = 0$, $|B_0| = 0$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+3}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_0| = 1$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_0| = 2$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_0| = 2$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k-1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_0| = 1$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = 0$, $|B_0| = 0$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+3}$.

Значит, при $(J, \alpha) \in A_1 \cap A_{k+3}$ конфигурация $\varphi = (0, l, m, 0)$ является слабо периодическим основным состоянием.

2) Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi = (0, l, m, n)$, где $l, m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $l \neq m$, $l \neq n$, $m \neq n$. Покажем, что слабо периодическая конфигурация φ является основным состоянием.

1. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = 0$, $|B_0| = 0$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{k+3}$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_0| = 1$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_0| = 1$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_0| = 1$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

б) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_0| = 0$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$;

в) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, тогда $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_0| = 0$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_1$.

Значит, при $(J,\alpha)\in A_1\cap A_{k+3}$ конфигурация $\varphi=(0,l,m,n)$ является слабо периодическим основным состоянием.

3) Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi=(l,m,n,0)$, где $l,m,n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ и $l\neq m$, $l\neq n$, $m\neq n$. Покажем, что слабо периодическая конфигурация φ является основным состоянием.

1. Пусть $c_b\in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow}\in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow})=n$, тогда $\varphi_b(c_b)=l$, $|B_l|=0$, $|B_m|=k$, $|B_n|=1$, $|B_0|=0$, следовательно, $\varphi_b\in C_1$;

б) $c_{b\downarrow}\in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow})=m$, тогда $\varphi_b(c_b)=n$, $|B_l|=1$, $|B_m|=k$, $|B_n|=0$, $|B_0|=0$, следовательно, $\varphi_b\in C_1$;

в) $c_{b\downarrow}\in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow})=0$, тогда $\varphi_b(c_b)=n$, $|B_l|=1$, $|B_m|=k-1$, $|B_n|=0$, $|B_0|=1$, следовательно, $\varphi_b\in C_1$.

2. Пусть $c_b\in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) $c_{b\downarrow}\in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow})=l$, тогда $\varphi_b(c_b)=m$, $|B_l|=1$, $|B_m|=0$, $|B_n|=k-1$, $|B_0|=1$, следовательно, $\varphi_b\in C_1$;

б) $c_{b\downarrow}\in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow})=n$, тогда $\varphi_b(c_b)=m$, $|B_l|=0$, $|B_m|=0$, $|B_n|=k$, $|B_0|=1$, следовательно, $\varphi_b\in C_1$;

в) $c_{b\downarrow}\in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow})=m$, тогда $\varphi_b(c_b)=0$, $|B_l|=0$, $|B_m|=1$, $|B_n|=k$, $|B_0|=0$, следовательно, $\varphi_b\in C_{k+3}$.

Значит, при $(J,\alpha)\in A_1\cap A_{k+3}$ конфигурация $\varphi=(l,m,n,0)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Пункты **I**. б) и **II** теоремы 2 доказываются аналогично доказательству теоремы 1. $\rhd$

Замечание 4. 1. Отметим, что слабо периодические основные состояния зависят от выбора нормального делителя. В случае $|A|=1$ и $(J,\alpha)\in A_1\setminus\bar{A}$ не существует ни одного H_A-слабо периодического основного состояния (см. теорему 1). А в случае $|A|=k$ и $(J,\alpha)\in A_1\setminus\bar{A}$ существуют H_A-слабо периодические основные состояния (см. теорему 2).

2. Отметим, что в случае $l=n$, $m=p$, $l\neq m$, соответствующие H_A-слабо периодические основные состояния $\varphi=(l,m,n,p)$, описанные в теоремах 1 и 2, являются H_A-слабо периодическими основными состояниями, которые изучены в [20]. В других случаях H_A-слабо периодические основные состояния отличаются от периодических, т. е. являются новыми основными состояниями.

Замечание 5. В работах [11, 22, 24] с помощью контурного метода доказаны существования мер Гиббса, соответствующие основным состояниям. Отметим, что полученным нами основным состояниям соответствуют некоторые меры Гиббса.

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность профессору У. А. Розикову за полезные советы и рецензентам за ценные мнения по работе.

Литература

1. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты.—М.: Наука, 1980.
2. *Minlos R. A.* Introduction to Mathematical Statistical Physics.—Amer. Math. Soc., 1999.—103 p.—(Univ. Lect. Ser. Vol. 19).
3. *Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А.* О периодических гиббсовских распределениях модели Изинга на решетке Бете // Узбек. матем. журн.—1995.—№ 4.—С. 8–18.
4. *Martin J., Rozikov U. A., Suhov Y.* A three state Hard-Core model on a Cayley tree // J. Nonlin. Math. Phys.—2005.—Vol. 12, № 3.—P. 432–448. DOI: 10.2991/jnmp.2005.12.3.7.
5. *Rozikov U. A.* A constructive description of ground states and Gibbs measures for Ising model with two-step interactions on Cayley tree // J. Stat. Phys.—2006.—Vol. 122, № 2.—P. 217–235. DOI: 10.1007/s10955-005-8029-3.
6. *Розиков У. А., Шоюсупов Ш. А.* Меры Гиббса для модели SOS с четырьмя состояниями на дереве Кэли // Теор. и матем. физика.—2006.—Т. 149, № 1.—С. 18–31. DOI: 10.4213/tmf3825.

7. *Розиков У. А., Хакимов Р. М.* Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли // Теор. и матем. физика.—2013.—Т. 175, № 2.—С. 300–312. DOI: 10.4213/tmf8423.
8. *Расулова М. А.* О периодических мерах Гиббса для модели Поттс–SOS на дереве Кэли // Теор. и матем. физика.—2019.—Т. 199, № 1.—С. 134–141. DOI: 10.4213/tmf9588.
9. *Розиков У. А, Рахматуллаев М. М.* Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теор. и матем. физика.—2009.—Т. 160, № 3.—С. 507–516. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf6412.
10. *Rahmatullaev M. M.* Description of weak periodic ground states of Ising model with competing interactions on Cayley tree // Appl. Math. Inf. Science.—2010.—Vol. 4, № 2.—P. 237–251.
11. *Ботиров Г. И., Розиков У. А.* Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли: контурный метод // Теор. и матем. физика.—2007.—Т. 153, № 1.—С. 86–97. DOI: 10.4213/tmf6123.
12. *Расулова М. А., Рахматуллаев М. М.* Периодические и слабо периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Матем. тр.—2015.—Т. 18, № 2.—С. 112–132. DOI: 10.17377/mattrudy.2015.18.207.
13. *Рахматуллаев М. М.* Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теор. и матем. физика.—2013.—Т. 176, № 3.—С. 477–493. DOI: 10.4213/tmf8530.
14. *Рахматуллаев М. М., Расулова М. А.* Существование слабо периодических основных состояний для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Докл. АН РУз.—2013.—№ 3.—С. 10–13.
15. *Ganikhodjaev N. N., Rozikov U. A.* The potts model with countable set of spin values on a cayley tree // Lett. Math. Phys.—2006.—Vol. 75.—P. 99–109. DOI: 10.1007/s11005-005-0032-8.
16. *Botirov G. I., Rakhmatullaev M. M.* Ground states for Potts model with a countable set of spin values on a Cayley tree // Algebra, Complex Analysis and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 264.—Springer, 2018.—P. 59–71. DOI: 10.1007/978-3-030-01144-4_5.
17. *Ботиров Г. И., Каюмов У. У.* Основные состояния модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями и счетным множеством значений спина на дереве Кэли // Теор. и матем. физика.—2021.—Т. 209, № 2.—С. 367–377. DOI: 10.4213/tmf10128.
18. *Бабаев А. Б., Магомедов М. А., Муртазаев А. К., Кассан-Оглы Ф. А., Прошкин А. И.* Фрустрации и фазовые переходы в трехвершинной модели Поттса на треугольной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // Письма в Журн. эксперим. и теор. физики.—2014.—Т. 100, вып. 4.—С. 242–246. DOI: 10.7868/S0370274X1416005X.
19. *Kassan-Ogly F. A.* One-dimensional 3-state and 4-state standard Potts models in magnetic field // Phase Transitions.—2000.—Vol. 71, № 1.—P. 39–55. DOI: 10.1080/01411590008228976.
20. *Рахматуллаев М. М., Расулова М. А.* Периодические основные состояния для модели Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина на дереве Кэли // Матем. заметки.—2022.—Т. 112, № 1.—С. 106–117. DOI: 10.4213/mzm13390.
21. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд.—М.: Наука, 1982.—288 с.
22. *Rozikov U. A.* Gibbs Measures on Cayley Trees.—World Scientific, 2013.—404 p. DOI:10.1142/8841.
23. *Ганиходжаев Н. Н.* Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли // Докл. АН РУз.—1994.—№ 4.—С. 3–5.
24. *Rozikov U. A.* On q-component models on Cayley tree: contour method // Lett. Math. Phys.—2005.—Vol. 71.—P. 27–38. DOI: 10.1007/s11005-004-5117-2.

Статья поступила 18 августа 2022 г.

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович
Институт Математики им. В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
заведующий Наманганского отделения института математики
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9;
Университет «Новый Узбекистан», *профессор*
Узбекистан, 100007, Ташкент, ул. Мустакиллик, 54;
Наманганский государственный университет,
профессор,
Узбекистан, 160136, Наманган, ул. Уйчи, 316
E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru
https://orcid.org/0000-0003-2987-7714

Расулова Мухайё Акбаржон кизи
Институт Математики им. В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
старший научный сотрудник Наманганского отделения института,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9;
Наманганский государственный университет,
старший преподаватель,
Узбекистан, 160136, Наманган, ул. Уйчи, 316
E-mail: `m_rasulova_a@rambler.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 4, P. 103–119

DESCRIPTION OF WEAKLY PERIODIC GROUND STATES FOR THE POTTS MODEL WITH EXTERNAL FIELD AND A COUNTABLE SET OF SPIN VALUES ON A CAYLEY TREE

Rahmatullaev, M. M.[1,2,3] and Rasulova, M. A.[1,3]
[1] V. I. Romanovsky Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
9 University St., Tashkent 100174, Uzbekistan;
[2] "New Uzbekistan" University,
54 Mustaqillik Ave., Tashkent 100007, Uzbekistan;
[3] Namangan State University,
316 Uychi St., Namangan 160136, Uzbekistan
E-mail: `mrahmatullaev@rambler.ru`, `m_rasulova_a@rambler.ru`

Abstract. One of the main problems for the Hamiltonian of the Potts model is the description of all the limiting Gibbs measures corresponding to it. At low temperatures, one Gibbs measure corresponds to each ground state. Therefore, for the Potts model, the study of the set of ground states is also relevant. The work is devoted to the study of weakly periodic ground states for the Potts model with an external field and a countable set of spin values on the Cayley tree. It is known that weakly periodic ground states depend on the choice of the normal divisor of the group representation of the Cayley tree. It is also known that there is no normal divisor of an odd index, so in this paper considered the normal divisor of index two. In this paper, for the Potts model with an external field and a countable set of spin values on a Cayley tree of arbitrary order, sets of weakly periodic ground states corresponding to any normal divisors of the index two group representation of the Cayley tree are described. At the same time, it is proved that these sets include periodic ground states corresponding to normal divisors of index two, which were known previously. The sets of all weakly periodic (non-periodic) ground states are also found in the case of a normal divisor of index two, i. e. many new classes of ground states have been found.

Keywords: Cayley tree, Potts model with external field, weakly periodic ground state.

AMS Subject Classification: 82B26, 60K35.

For citation: *Rahmatullaev, M. M. and Rasulova, M. A.* Description of Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with External Field and a Countable Set of Spin Values on a Cayley Tree, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 103–119 (in Russian). DOI: 10.46698/w5733-9015-3471-i.

References

1. *Sinai, Ya. G. Theory of Phase Transition: Rigorous Results*, Oxford, New York, Pergamon Press, 1982.
2. *Minlos, R. A. Introduction to Mathematical Statistical Physics*, University Lecture Series, vol. 19, Amer. Math. Soc., 1999.
3. *Ganikhodzhaev, N. N. and Rozikov, U. A.* On Periodic Gibbs Distributions of the Ising Model on the Bethe Lattice, *Uzbek Mathematical Journal*, 1995, vol. 4, pp. 8–18 (in Russian)].

4. *Martin, J., Rozikov, U. A. and Suhov, Y.* A Three State Hard-Core Model on a Cayley Tree, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2005, vol. 12, no. 3, pp. 432–448. DOI: 10.2991/jnmp.2005.12.3.7.
5. *Rozikov, U. A.* A Constructive Description of Ground States and Gibbs Measures for Ising Model with Two-Step Interactions on Cayley Tree, *Journal of Statistical Physics*, 2006, vol. 122, pp. 217–235. DOI: 10.1007/s10955-005-8029-3.
6. *Rozikov, U. A. and Shoyusupov, Sh. A.* Gibbs Measures for the SOS Model with Four States on Cayley Tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 149, no. 1, pp. 1312–1323. DOI: 10.1007/s11232-006-0120-7.
7. *Rozikov, U. A. and Khakimov, R. M.* Periodic Gibbs Measures for the Potts Model on the Cayley Tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 175, pp. 699–709. DOI: 10.1007/s11232-013-0055-8.
8. *Rasulova, M. A.* Periodic Gibbs Measures for the Potts-SOS Model on a Cayley Tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2019, vol. 199, pp. 586–592. DOI: 10.1134/S0040577919040081.
9. *Rozikov, U. A. and Rakhmatullaev, M. M.* Weakly Periodic Ground States and Gibbs Measures for the Ising Model with Competing Interactions on the Cayley Tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2009, vol. 160, no. 3, pp. 1292–1300. DOI: 10.1007/s11232-009-0116-1.
10. *Rahmatullaev, M. M.* Description of Weak Periodic Ground States of Ising Model with Competing Interactions on Cayley Tree, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 2010, vol. 4, no. 2, pp. 237–241.
11. *Botirov, G. I. and Rozikov, U. A.* Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree: The Contour Method, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2007, vol. 153, no. 1, pp. 1423–1433. DOI: 10.1007/s11232-007-0125-x.
12. *Rasulova, M. A. and Rahmatullaev, M. M.* Periodic and Weakly Periodic Ground States for Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree, *Siberian Advances in Mathematics*, 2016, vol. 26, pp. 215–229. DOI: 10.3103/S1055134416030056.
13. *Rahmatullaev, M. M.* Weakly Periodic Gibbs Measures and Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 176, no. 3, pp. 1236–1251. DOI: 10.1007/s11232-013-0103-4.
14. *Rahmatullaev, M. M. and Rasulova, M. A.* Existence of Weakly Periodic Ground States for Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree, *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan* [Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan], 2013, no. 3, pp. 10–13 (in Russian).
15. *Ganikhodjaev, N. N. and Rozikov, U. A.* The Potts Model with Countable Set of Spin Values on a Cayley Tree, *Letters in Mathematical Physics*, 2006, vol. 75, pp. 99–109. DOI: 10.1007/s11005-005-0032-8.
16. *Botirov, G. I. and Rakhmatullaev, M. M.* Ground States for Potts Model with a Countable set of Spin Values on a Cayley Tree, *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory, USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 264, Springer, 2018, pp. 59–71. DOI: 10.1007/978-3-030-01144-4_5.
17. *Botirov, G. I. and Qayumov, U. U.* Ground States for the Potts Model with Competing Interactions and a Countable Set of Spin Values on a Cayley Tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2021, vol. 209, no. 2, pp. 1633–1642 . DOI: 10.1134/S004057792111009X.
18. *Murtazaev, A. K., Babaev, A. B., Magomedov, M. A., Kassan-Ogly, F. A. and Proshkin, A. I.* Frustrations and phase Transitions in the Three-Vertex Potts Model with Next-Nearest-Neighbor Interactions on a Triangular Lattice, *JETP Letters*, 2014, vol. 100, pp. 242–246. DOI: 10.1134/S0021364014160115.
19. *Kassan-Ogly, F. A.* One-Dimensional 3-State and 4-State Standard Potts Models in Magnetic Field, *Phase Transitions*, 2000, vol. 71, no. 1, pp. 39–55. DOI: 10.1080/01411590008228976.
20. *Rahmatullaev, M. M. and Rasulova, M. A.* Periodic Ground States for the Potts Model with External Field and a Countable Set of Spin Values on the Cayley Tree, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 112, pp. 116–125. DOI: 10.1134/S0001434622070136.
21. *Kargapalov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I. Osnovy teorii grupp*, 3-e izd., Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).
22. *Rozikov, U. A. Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Scientific, 2013. DOI:10.1142/8841.

23. *Ganikhodjaev, N. N.* Group Presentations and Automorphisms of the Cayley Tree, *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan* [Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan], 1994, no. 5, pp. 3–5 (in Russian).
24. *Rozikov, U. A.* On q-component models on Cayley tree: contour method, *Letters in Mathematical Physics*, 2005, vol. 71, pp. 27–38. DOI: 10.1007/s11005-004-5117-2.

Received August 18, 2022

Muzaffar M. Rahmatullaev
V. I. Romanovsky Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
9 University St., Tashkent 100174, Uzbekistan,
Head of the Namangan Department of the Institute of Mathematics;

"New Uzbekistan" University,
54 Mustaqillik Ave., Tashkent 100007, Uzbekistan,
Professor;

Namangan State University,
316 Uychi St., Namangan 160136, Uzbekistan,
Professor

mrahmatullaev@rambler.ru
https://orcid.org/0000-0003-2987-7714

Muhayyo A. Rasulova
V. I. Romanovsky Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
9 University St., Tashkent 100174, Uzbekistan;
Senior Researcher;

Namangan State University,
316 Uychi St., Namangan 160136, Uzbekistan,
Senior Teacher
E-mail:m_rasulova_a@rambler.ru