Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 4, С. 58–67

УДК 514.13
DOI 10.46698/d0031-4733-6473-n

ОБ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМЫ ФУРМАНА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО#

А. В. Костин[1]

[1] Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
Россия, 423604, Елабуга, ул. Казанская, 89

E-mail: `kostin_andrei@mail.ru`

Аннотация. Согласно теореме Птолемея, у четырехугольника, вписанного в окружность на евклидовой плоскости, произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон. Эта теорема имеет различные обобщения. На плоскости в одном из обобщений вместо четырехугольника рассматривается вписанный шестиугольник. Соответствующее утверждение, связывающее длины сторон и больших диагоналей вписанного шестиугольника, называют теоремой Птолемея для шестиугольника или теоремой Фурмана. Теорема Кейси является другим обобщением теоремы Птолемея. В ней вместо четырех точек, лежащих на некоторой фиксированной окружности, рассматриваются четыре окружности, касающиеся этой окружности, а вместо длин сторон и диагоналей — длины отрезков касательных к окружностям. Если кривизна плоскости Лобачевского равна минус единице, то в аналогах теорем Птолемея, Фурмана и Кейси для вписанных в окружность многоугольников или окружностей, касающихся одной окружности, длины соответствующих отрезков, деленные на два, будут стоять под знаками гиперболических синусов. В данной работе доказываются теоремы, обобщающие на плоскости Лобачевского и теорему Кейси, и теорему Фурмана. На плоскости Лобачевского рассматриваются шесть окружностей, касающихся некоторой линии постоянной кривизны, и для длин отрезков касательных доказываются утверждения, обобщающие эти теоремы. Если в дополнение к длинам отрезков геодезических касательных рассматривать длины дуг касательных орициклов, то между евклидовыми и гиперболическими соотношениями можно установить соответствие. Наиболее наглядно это можно продемонстрировать, если взять набор орициклов, касающихся одной линии постоянной кривизны на плоскости Лобачевского. В этом случае если длина отрезка геодезической касательной к орициклам равна t, то длина «орициклической» касательной к ним равна $\operatorname{sh}\frac{t}{2}$. Значит, если геодезические касательные связаны «гиперболическим» соотношением, то «орициклические» касательные будут связаны соответствующим «евклидовым» соотношением.

Ключевые слова: теорема Птолемея, теорема Кези, теорема Фурмана, плоскость Лобачевского, орицикл, эквидистанта.

AMS Subject Classification: 51M09.

Образец цитирования: *Костин А. В.* Об аналогах теоремы Фурмана на плоскости Лобачевского // Владикавк. матем. журн.—2023.—Т. 25, вып. 4.—С. 58–67. DOI: 10.46698/d0031-4733-6473-n.

1. Введение

На евклидовой плоскости для выпуклого шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, вписанного в окружность (см. рис. 1), имеет место соотношение

$$\begin{gathered}A_1A_4\cdot A_2A_5\cdot A_3A_6=A_1A_2\cdot A_3A_6\cdot A_4A_5+A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6\\+A_2A_3\cdot A_1A_4\cdot A_5A_6+A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_1A_6+A_3A_4\cdot A_2A_5\cdot A_1A_6.\end{gathered}\tag{1}$$

#Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («Приоритет-2030»).

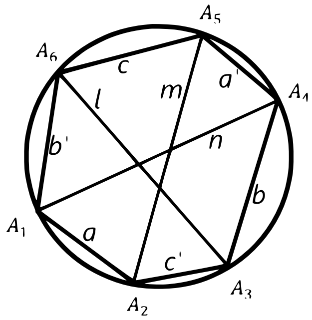

Рис. 1. Вписанный шестиугольник.

Эта теорема обобщает теорему Птолемея: произведение длин диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений длин противоположных сторон. Ее называют теоремой Птолемея для шестиугольника или теоремой Фурмана (Fuhrmann). На плоскости Лобачевского кривизны $K = -1$ аналог этого соотношения имеет следующий вид:

$$\operatorname{sh}\frac{l}{2}\operatorname{sh}\frac{m}{2}\operatorname{sh}\frac{n}{2} = \operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{a'}{2}\operatorname{sh}\frac{l}{2} + \operatorname{sh}\frac{b}{2}\operatorname{sh}\frac{b'}{2}\operatorname{sh}\frac{m}{2} + \operatorname{sh}\frac{c}{2}\operatorname{sh}\frac{c'}{2}\operatorname{sh}\frac{n}{2} + \operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{b}{2}\operatorname{sh}\frac{c}{2} + \operatorname{sh}\frac{a'}{2}\operatorname{sh}\frac{b'}{2}\operatorname{sh}\frac{c'}{2}. \qquad (2)$$

Для шестиугольника, вписанного в окружность, это соотношение автоматически получается вследствие связи между дугой и хордой орицикла. Для окружностей, вписанных в орицикл или ветвь эквидистанты, соотношение имеет такой же вид и может быть доказано с использованием гиперболической теоремы Птолемея, независимо доказанной Т. Куботой [1] и П. А. Широковым [2]. Если вершины шестиугольника лежат на двух ветвях эквидистанты, то в аналоге этого соотношения длины отрезков, соединяющих вершины на разных ветвях, будут стоять под знаком гиперболических косинусов.

Теорема Кези (Кейси, Casey) [3] является «циклическим» обобщением теоремы Птолемея. Вершины вписанного в окружность многоугольника в ней заменяются на окружности, касающиеся основной окружности, а длины сторон и диагоналей — на длины отрезков общих касательных. Пусть окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ в указанном порядке касаются окружности ω. Обозначим через t_{ij} длину отрезка общей касательной окружностей ω_i и ω_j. Если окружности ω_i и ω_j касаются окружности ω одинаково — обе внутренним, или обе внешним образом, то берется длина отрезка внешней касательной. Если же ω_i и ω_j касаются окружности ω по-разному, то берется длина отрезка их общей внутренней касательной. При выполнении указанных условий имеет место соотношение

$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14}.$$

Гиперболический аналог этой теоремы получен Н. В. Абросимовым и Л. А. Микайловой [4]. Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога на изотропных сферах соответственно псевдоевклидова и псевдогиперболического пространств приведены в работе [5]. Для шести окружностей (см. рис. 2) можно доказать утверждение, обобщающее и теорему Кези, и теорему Фурмана. Это утверждение будем называть теоремой Кези — Фурмана. На евклидовой плоскости аналитически оно имеет такой же вид, как и соотношение (1), на плоскости Лобачевского — такой же, как и соотношение (2), только вместо сторон и диагоналей будут стоять длины отрезков касательных к соответствующим окружностям [6].

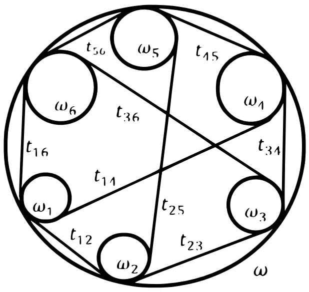

Рис. 2. Шесть окружностей, касающихся одной окружности внутренним образом.

Многомерное обобщение теоремы Кези получено Н. В. Абросимовым и В. В. Асеевым [7]. Смежным идеям посвящена статья Х. Мартини и Х. Маехары [8]. Обобщения теоремы Птолемея для разных случаев расположения четырех точек в евклидовом пространстве изложены в статье Н. С. и И. С. Астаповых [9]. Необходимые для чтения работы сведения из геометрии Лобачевского имеются в [10, 11].

2. Основные результаты

В теореме Кези и ее аналоге для шести окружностей однородными соотношениями связаны длины отрезков касательных к окружностям. На плоскости Лобачевского в аналогичных утверждениях касательные расстояния стоят под знаками гиперболических функций. Наряду с касательными расстояниями можно рассматривать преобразования, сохраняющие эти касательные расстояния [12–14]. На плоскости Лобачевского при таких преобразованиях окружности могут переходить в циклы другого типа. Это является предпосылкой для обобщений теорем об окружностях и касательных расстояниях между ними на разного рода линии постоянной кривизны. В статье [6] доказаны аналоги теоремы для шести окружностей, внутренним образом касающихся окружности или орицикла. В данной работе доказываются соответствующие утверждения для шести окружностей, касающихся различными способами ветви эквидистанты (теоремы 1–3). В теореме 4 доказывается утверждение, в некотором смысле связывающее евклидовы и гиперболические версии теорем такого рода. Если рассматривать набор орициклов, касающихся линии постояннной кривизны, то касательные геодезичекие расстояния между орициклами будут стоять в соотношениях под знаками гиперболических функций, а длины дуг орициклов, касающихся орициклов из набора (касательные «орициклические» расстояния), будут связаны таким же соотношением, как и отрезки касательных к окружностям на евклидовой плоскости.

3. Теорема Кези — Фурмана для окружностей, касающихся эквидистанты

Множество точек, расположенных на фиксированном расстоянии h от прямой на плоскости Лобачевского, называется *эквидистантой*. Эквидистанта имеет две ветви. Саму прямую называют *базой эквидистанты*, а расстояние h — *высотой эквидистанты*. Первоначально рассмотрим случай, когда окружности касаются эквидистанты внешним образом.

Теорема 1. *Пусть окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 в указанном порядке внешним образом касаются ветви эквидистанты γ на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1$.*

Пусть t_{ij} — длина отрезка общей внешней касательной окружностей ω_i, ω_j. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}\frac{t_{14}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{25}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{36}}{2} &= \operatorname{sh}\frac{t_{12}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{45}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{36}}{2} + \operatorname{sh}\frac{t_{12}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{34}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{56}}{2}\\ &+ \operatorname{sh}\frac{t_{56}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{23}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{14}}{2} + \operatorname{sh}\frac{t_{45}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{16}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{23}}{2} + \operatorname{sh}\frac{t_{34}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{16}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{25}}{2}.\end{aligned} \tag{3}$$

$\lhd$ Пусть b — база эквидистанты γ высоты h (см. рис. 3). Обозначим через K_i, K_j точки касания окружностей ω_i, ω_j с линией γ. Из точек O_i, O_j опустим перпендикуляры O_iH_i и O_jH_j на базу b. Эти перпендикуляры пройдут через точки касания K_i, K_j. Четырехугольники $H_iK_iK_jH_j$ и $H_iO_iO_jH_j$ являются двупрямоугольниками первого рода (см. [11]) с прямыми углами H_i, H_j. Пусть T_i, T_j — точки касания внешней касательной с окружностями ω_i, ω_j. Четырехугольник $T_iO_iO_jT_j$ является двупрямоугольником первого рода с прямыми углами T_i, T_j. В этих двупрямоугольниках имеем

$$\operatorname{ch} K_iK_j = \operatorname{ch}^2 h\cdot\operatorname{ch} H_iH_j - \operatorname{sh}^2 h, \tag{4}$$

$$\operatorname{ch} O_iO_j = \operatorname{ch}(h+R_i)\cdot\operatorname{ch}(h+R_j)\cdot\operatorname{ch} H_iH_j - \operatorname{sh}(h+R_i)\cdot\operatorname{sh}(h+R_j), \tag{5}$$

$$\operatorname{ch} O_iO_j = \operatorname{ch} R_i\cdot\operatorname{ch} R_j\cdot\operatorname{ch} t_{ij} - \operatorname{sh} R_i\cdot\operatorname{sh} R_j. \tag{6}$$

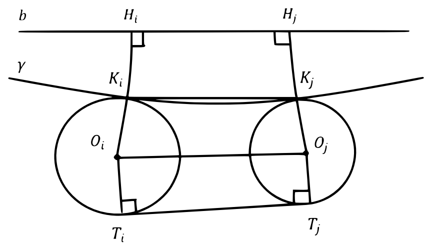

Рис. 3. Окружности, касающиеся ветви эквидистанты внешним образом.

Приравняв правые части (5), (6), получим

$$\operatorname{ch} H_iH_j = \frac{\operatorname{ch} R_i\cdot\operatorname{ch} R_j\cdot\operatorname{ch} t_{ij} - \operatorname{sh} R_i\cdot\operatorname{sh} R_j + \operatorname{sh}(h+R_i)\cdot\operatorname{sh}(h+R_j)}{\operatorname{ch}(h+R_i)\cdot\operatorname{ch}(h+R_j)}. \tag{7}$$

Отсюда

$$\operatorname{sh}^2\frac{H_iH_j}{2} = \operatorname{sh}^2\frac{t_{ij}}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch} R_i\cdot\operatorname{ch} R_j}{\operatorname{ch}(h+R_i)\cdot\operatorname{ch}(h+R_j)}. \tag{8}$$

Из (4)

$$\operatorname{sh}^2\frac{H_iH_j}{2} = \operatorname{sh}^2\frac{K_iK_j}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 h}. \tag{9}$$

Из (8), (9) получим

$$\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2} = \operatorname{sh}\frac{t_{ij}}{2}\cdot\operatorname{ch} h\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{ch} R_i\cdot\operatorname{ch} R_j}{\operatorname{ch}(h+R_i)\cdot\operatorname{ch}(h+R_j)}}. \tag{10}$$

Для шестиугольника, вписанного в ветвь эквидистанты, выполняется соотношение (см. [6, с. 406–407])

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sh}\frac{K_1K_4}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_2K_5}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_3K_6}{2}=\operatorname{sh}\frac{K_1K_2}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_4K_5}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_3K_6}{2}\\
&+\operatorname{sh}\frac{K_1K_2}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_3K_4}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_5K_6}{2}+\operatorname{sh}\frac{K_5K_6}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_2K_3}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_1K_4}{2}\\
&+\operatorname{sh}\frac{K_4K_5}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_1K_6}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_2K_3}{2}+\operatorname{sh}\frac{K_3K_4}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_1K_6}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{K_2K_5}{2}.
\end{aligned}\tag{11}$$

Подставив в (11) выражения для гиперболических синусов половин сторон вписанного шестиугольника $K_1K_2K_3K_4K_5K_6$ из (10), после сокращения получим соотношение (3). $\triangleright$

Теорема 2. *Пусть окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 внутренним образом касаются ветви эквидистанты γ на плоскости Лобачевского кривизны $K=-1$. Пусть t_{ij} — длина отрезка общей внешней касательной окружностей ω_i, ω_j. Тогда имеет место соотношение* (3).

$\triangleleft$ Если радиусы окружностей меньше высоты эквидистанты (см. рис. 4), то в двупрямоугольнике $H_iO_iO_jH_j$ для боковых сторон будем иметь $H_iO_i=h-R_i$, $H_jO_j=h-R_j$.

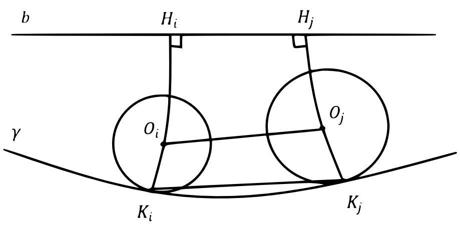

Рис. 4. Окружности, касающиеся эквидистанты внутренним образом.

Учитывая это, аналогично предыдущему получим

$$\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2}=\operatorname{sh}\frac{t_{ij}}{2}\cdot\operatorname{ch}h\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{ch}R_i\cdot\operatorname{ch}R_j}{\operatorname{ch}(h-R_i)\cdot\operatorname{ch}(h-R_j)}}.\tag{12}$$

Подставив в (11), после сокращения получим соотношение (3).

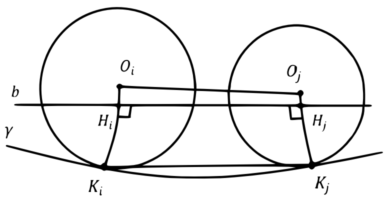

Рис. 5. Радиусы окружностей больше высоты эквидистанты.

Если радиусы окружностей больше высоты эквидистанты (см. рис. 5), то в двупрямоугольнике $H_iO_iO_jH_j$ для боковых сторон будем иметь: $H_iO_i=R_i-h, H_jO_j=R_j-h$. Равенство (3) при этом остается в силе. Аналогично оно остается в силе при любых соотношениях высоты эквидистанты и радиусов окружностей, расположенных по одну сторону от ветви эквидистанты. $\triangleright$

Рассмотрим теперь случай, обобщающий оба предыдущих случая.

Теорема 3. *Пусть окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 касаются ветви эквидистанты γ на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1$. Пусть t_{ij} — длина отрезка общей внешней касательной окружностей ω_i, ω_j, если окружности ω_i, ω_j касаются ветви эквидистанты одинаково — обе внутренним, или обе внешним образом, и t_{ij} — длина отрезка общей внутренней касательной окружностей, если эти окружности касаются ветви эквидистанты по-разному. Тогда имеет место соотношение* (3).

$\triangleleft$ Пусть окружность ω_i касается ветви эквидистанты внешним образом, а окружность ω_j — внутренним (см. рис. 6).

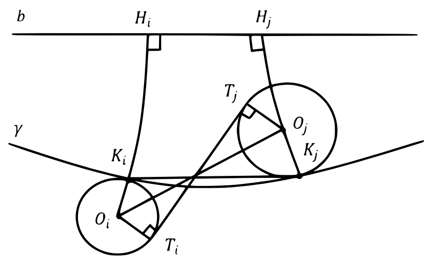

Рис. 6. Окружности, по-разному касающиеся ветви эквидистанты.

В этом случае в двупрямоугольнике $H_iO_iO_jH_j$ для боковых сторон имеем $H_iO_i = R_i + h$, $H_jO_j = h - R_j$ (если $h > R_j$, в остальных случаях итоговое соотношение (3) тоже будет выполняться), а двупрямоугольник $T_iO_iO_jT_j$ будет самопересекающимся. В соответствии с этим, будут выполняться равенство (4) и следующие равенства:

$$\operatorname{ch} O_iO_j = \operatorname{ch}(h + R_i) \cdot \operatorname{ch}(h - R_j) \cdot \operatorname{ch} H_iH_j - \operatorname{sh}(h + R_i) \cdot \operatorname{sh}(h - R_j), \tag{13}$$

$$\operatorname{ch} O_iO_j = \operatorname{ch} R_i \cdot \operatorname{ch} R_j \cdot \operatorname{ch} t_{ij} + \operatorname{sh} R_i \cdot \operatorname{sh} R_j. \tag{14}$$

Из равенств (4), (13), (14) получим:

$$\operatorname{sh} \frac{K_iK_j}{2} = \operatorname{sh} \frac{t_{ij}}{2} \cdot \operatorname{ch} h \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{ch} R_i \cdot \operatorname{ch} R_j}{\operatorname{ch}(h + R_i) \cdot \operatorname{ch}(h - R_j)}}. \tag{15}$$

Подставив эти выражения в (11), вследствие однородности соотношения опять получим равенство (3). $\triangleright$

4. Теорема Кези — Фурмана для орициклов

Линия, пересекающая под прямым углом пучок параллельных прямых на плоскости Лобачевского, называется *орициклом*. Прямые пучка называются *осями орицикла*. Все орициклы имеют одинаковую геодезическую кривизну, и совмещаются движениями плоскости. Если кривизна плоскости Лобачевского равна минус единице, то геодезическая кривизна орицикла равна единице, эквидистанты — меньше единицы, геодезическая кривизна окружности – больше единицы. Впрочем, последние факты в работе использоваться не будут.

Между евклидовым и гиперболическим соотношением в теореме Кези — Фурмана можно установить соответствие, наиболее наглядное в случае, когда шесть циклов, касающихся основного цикла, являются орициклами.

Теорема 4. *Пусть орициклы Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, Ω_5, Ω_6 в указанном порядке однотипно — все внешним или все внутренним образом — касаются окружности, ветви эквидистанты* *или внешним образом касаются орицикла. Пусть t_{ij} — длина отрезка общей внешней касательной орициклов Ω_i и Ω_j, l_{ij} — длина дуги орицикла, касающегося орициклов Ω_i и Ω_j . Тогда имеют место соотношение* (3) *и соотношение*

$$l_{14} \cdot l_{25} \cdot l_{36} = l_{12} \cdot l_{45} \cdot l_{36} + l_{12} \cdot l_{34} \cdot l_{56} + l_{56} \cdot l_{23} \cdot l_{14} + l_{45} \cdot l_{16} \cdot l_{23} + l_{34} \cdot l_{16} \cdot l_{25}. \qquad (16)$$

◁ Заметим, что орициклы в собственной области плоскости Лобачевского могут касаться только внешним образом. Внутреннее касание возможно только в несобственном центре орицикла — бесконечно удаленном центре пучка, ортогональной траекторией которого является орицикл.

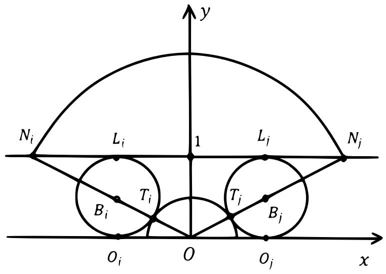

Рис. 6. Орициклические и геодезические касательные к орициклам.

Установим связь между длиной внешней касательной $t_{ij} = T_iT_j$ к двум орициклам и длиной дуги $l_{ij} = L_iL_j$, касающегося их орицикла. На рис. 7 в модели Пуанкаре с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ орициклы Ω_i и Ω_j представлены евклидовыми окружностями с центрами B_i, B_j соответственно. Длина отрезка внешней касательной T_iT_j равна длине дуги геодезической N_iN_j, так как они совмещаются сдвигом вдоль прямой $x = 0$. Длина дуги орицикла $y = 1$ между точками N_i, N_j равна $2\,\mathrm{sh}\,\frac{N_iN_j}{2}$. Значит, длина дуги орицикла $y = 1$ между точками L_iL_j будет равна $\mathrm{sh}\,\frac{T_iT_j}{2}$, так как эта дуга ровно в два раза меньше дуги между точками N_i, N_j. Т. е. имеет место равенство

$$l_{ij} = \mathrm{sh}\,\frac{t_{ij}}{2}. \qquad (17)$$

Таким образом, если мы получим какое-то соотношение между гиперболическими синусами половин длин геодезических касательных к орициклам, то такое же соотношение будет иметь место для длин орициклических касательных к этим орициклам (именно длин, а не гиперболических синусов их половин).

Если в конфигурации из шести окружностей, касающихся одного цикла, перейти к пределу при стремлении радиусов всех шести окружностей к бесконечности, то получим утверждение для шести орициклов, касающихся одного цикла. Если шесть окружностей касаются одной окружности внешним образом, то для каждой пары окружностей ω_i, ω_j с радиусами R_i, R_j соответственно будет выполняться

$$\mathrm{sh}\,\frac{K_iK_j}{2} = \mathrm{sh}\,\frac{t_{ij}}{2} \cdot \mathrm{sh}\,R \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,R_i \cdot \mathrm{ch}\,R_j}{\mathrm{sh}(R+R_i) \cdot \mathrm{sh}(R+R_j)}}. \qquad (18)$$

В (18), как и прежде, K_i, K_j — точки касания соответствующих окружностей с основным циклом (в данном случае, с окружностью), а t_{ij} — длина отрезка внешней касательной к окружностям ω_i, ω_j. Переходя к пределу при стремлении радиусов окружностей к бесконечности, получим:

$$\mathrm{sh}\,\frac{K_iK_j}{2} = \mathrm{sh}\,\frac{t_{ij}}{2} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,R}{e^R}. \qquad (19)$$

Используя (19), придем к теореме Кези — Фурмана для шести орициклов, касающихся внешним образом одной окружности. Если же в (19) дополнительно устремить к бесконечности радиус R основной окружности, то получим

$$\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2} = \operatorname{sh}\frac{t_{ij}}{2}\cdot\frac{1}{2}. \tag{20}$$

Из (20) с учетом теоремы Фурмана для шестиугольника, вписанного в орицикл, следует, что соотношение (3) будет выполняться и для шести орициклов, касающихся одного орицикла.

Рассмотрим теперь случай, когда основным циклом является эквидистанта. Если окружности касаются ветви эквидистанты внешним образом, то для отрезков, связанных с ними, выполняется соотношение (10). Перейдя в нем к пределу при стремлении радиусов R_i и R_j к бесконечности, получим

$$\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2} = \operatorname{sh}\frac{t_{ij}}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch}R}{e^{R}}. \tag{21}$$

Из (21) с учетом (11) уже следует, что для шести орициклов, касающихся ветви эквидистанты внешним образом, и отрезков геодезических касательных выполняется соотношение (3). Если же окружности касаются ветви эквидистанты внутренним образом, то для получения орициклического аналога в соотношении (12) надо также устремить радиусы R_i и R_j к бесконечности

$$\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2} = \operatorname{sh}\frac{t_{ij}}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch}R}{e^{-R}}. \tag{22}$$

Подставив (22) в (11), опять получим соотношение (3). Из соотношения (3) с учетом (17) получим соотношение (16). Это завершает доказательство теоремы. ▷

5. Заключение

Орициклы и орициклические касательные в рассматриваемых задачах играли особую роль в связях между гиперболическими и евклидовыми соотношениями. Хорошо известно, что в на орисфере пространства Лобачевского в системе точек и орициклов имеет место геометрия Евклида. Примечательно, что именно с орисферами и касательными конусами к ним связаны вопросы вложения в евклидово пространство псевдосферических поверхностей вращения (см. [15]).

Литература

1. *Kubota T.* On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry // Science Reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, Astronomy.—1912.—Vol. 2.—P. 131–156.
2. *Широков П. А.* Этюды по геометрии Лобачевского // Изв. физ.-мат. об-ва при КГУ. Сер. 2.—1924.—Т. 24, № 1.—С. 26–32.
3. *Casey J.* A seqyel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples, 5th. ed.—Dublin: Hodges Figgis and Co., 1888.
4. *Abrosimov N. V., Mikaiylova L. A.* Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сиб. электр. матем. изв.—2015.—Т. 12.—С. 354–360. DOI: 10.17377/semi.2015.12.029.
5. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога // Сиб. электр. матем. изв.—2016.—Т. 13.—С. 242–251. DOI: 10.17377/semi.2016.13.017.
6. *Костин А. В.* Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского // Сиб. электр. матем. изв.—2022.—Т. 19, № 2.—С. 404–414. DOI: 10.33048/semi.2022.19.035.

7. *Abrosimov N. V., Aseev V. V.* Generalizations of Casey's Theorem For Higher Dimensions // Lobachevskii J. Math.—2018.—Vol. 39.—P. 1–12. DOI: 10.1134/S199508021801002X.
8. *Maehara H., Martini H.* Bipartite sets of spheres and Casey-type theorems // Results Math.—2019.—Vol. 74, Article no. 47. DOI: 10.1007/s00025-019-0973-3.
9. *Астапов Н. С., Астапов И. С.* Многообразие обобщений теоремы Птолемея // Дальневост. матем. журн.—2019.—Т. 19, № 2.—С. 129–137.
10. *Несторович Н. М.* Геометрические построения в плоскости Лобачевского.—М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.—304 с.
11. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства.—М.: Наука, 1969.—548 с.
12. *Яглом И. М.* Комплексные числа и их применение в геометрии // Математика, ее преподавание, приложения и история. Матем. просв. Сер. 2.—1961.—Т. 6.—С. 60–106.
13. *Микенберг М. А.* Геометрия Лагерра и ее аналог: Дисс. канд. ф.-м. наук.—Казань, 1994.—159 с.
14. *Скопец З. А., Яглом И. М.* Преобразования Лагерра плоскости Лобачевского и дробно-линейные преобразования двойного переменного // Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии.—М.: Изд.-во МГПИ, 1965.—С. 366–374.
15. *Костин А. В.* Задача о тени и поверхности постоянной кривизны // Сиб. электр. матем. изв.—2023.—Т. 20, №. 1.—С. 150–164. DOI: 10.33048/semi.2023.20.014.

Статья поступила 26 ноября 2022 г.

Костин Андрей Викторович
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
доцент кафедры математики и прикладной информатики
РОССИЯ, 423604, Елабуга, ул. Казанская, 89
E-mail: kostin_andrei@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5353-6138

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 4, P. 58–67

ON ANALOGUES OF THE FUHRMANN'S THEOREM ON THE LOBACHEVSKY PLANE

Kostin, A. V.[1]

[1] Elabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University,
89 Kazanskaya St., Elabuga 423604, Russia
E-mail: kostin_andrei@mail.ru

Abstract. According to Ptolemy's theorem, for a quadrilateral inscribed in a circle on the Euclidean plane, the product of the lengths of the diagonals is equal to the sum of the products of the lengths of opposite sides. This theorem has various generalizations. On the plane in one of the generalizations an inscribed hexagon is considered instead of a quadrilateral. The corresponding statement relating the lengths of the sides and long diagonals of an inscribed hexagon is called Ptolemy's theorem for a hexagon or Fuhrmann's theorem. The Casey's theorem is another generalization of Ptolemy's theorem. In it, instead of four points lying on some fixed circle, four circles tangent to this circle are considered, whilst the lengths of the sides and diagonals are replaced by the lengths of the segments tangent to the circles are considered. If the curvature of Lobachevsky plane is equal to minus one, then in the analogues of the theorems of Ptolemy, Fuhrmann and Casey for polygons inscribed in a circle or circles tangent to one circles, the lengths of the corresponding segments, divided by two, will be under the signs of hyperbolic sines. In this paper, we prove theorems generalizing on the Lobachevsky plane Casey's theorem and Fuhrmann's theorem. On the Lobachevsky plane, six circles are considered that are tangent to some line of constant curvature, and for lengths tangent segments assertions generalizing these theorems are proved. If, in addition to the lengths of the segments of the geodesic tangents, we consider the lengths of the arcs of the tangent horocycles, then a correspondence can be established between the Euclidean and hyperbolic relations. This can be most clearly demonstrated if we take a set of horocycles tangent to one line of constant curvature on the Lobachevsky plane. In this case, if the length of the segment of the geodesic tangent to the horocycles is t, then the length of the «horocyclic» tangent to them is equal to $\sinh \frac{t}{2}$. Hence, if the geodesic tangents are connected by a «hyperbolic» relation, then the «horocyclic» the tangents will be connected by the corresponding «Euclidean» relation.

Keywords: Ptolemy's theorem, Casey's theorem, Fuhrmann's theorem, Lobachevsky plane, horocycle, equidistant.

AMS Subject Classification: 51M09.

For citation: *Kostin, A. V.* On Analogues of the Fuhrmann's Theorem on the Lobachevsky Plane, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 58–67 (in Russian). DOI: 10.46698/d0031-4733-6473-n.

References

1. *Kubota, T.* On the Extended Ptolemy's Theorem in Hyperbolic Geometry, *Science Reports of the Tohoku University. Ser.* 1 : *Physics, Chemistry, astronomy*, 1912, vol. 2, pp. 131–156.
2. *Shirokov, P. A.* Etudes on the Lobachevskii Geometry, *Izvestia Fiziko-matematicheskogo obschestva pri KGU, seria 2*, 1924, vol. 24, no. 1, pp. 26–32 (in Russian).
3. *Casey, J. A Seqyel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry, with Numerous Examples*, 5th. ed., Dublin, Hodges, Figgis and Co., 1888.
4. *Abrosimov, N. V. and Mikaiylova, L. A.* Casey's Theorem in Hyperbolic Geometry, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, pp. 354–360. DOI: 10.17377/semi.2015.12.029.
5. *Kostin, A. V. and Kostina, N. N.* An Interpretation of Casey's Theorem and its Hyperbolic Analogue, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, pp. 242–251 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2016.13.017.
6. *Kostin, A. V.* On generalizations of Ptolemy's theorem on the Lobachevsky plane, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 404–414 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2022.19.035.
7. *Abrosimov, N. V. and Aseev, V. V.* Generalizations of Casey's Theorem for Higher Dimensions, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, pp. 1–12. DOI: 10.1134/S199508021801002X.
8. *Maehara, H. and Martini, H.* Bipartite Sets of Spheres and Casey-Type Theorems, *Results in Mathematics*, 2018, vol. 74, Article no. 47. DOI: 10.1007/s00025-019-0973-3.
9. *Astapov, N. S. and Astapov, I. S.* The Variety of Generalizations of the Ptolemy's Theorem, *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 129–137 (in Russian).
10. *Nestorovich, N. M. Geometricheskie postroeniia v ploskosti Lobachevskogo* [Geometric Constructions in the Lobachevskii Plane], Moscow, Leningrad, GITTL, 1951, 304 p. (in Russian).
11. *Rosenfeld, B. A. Neevklidovy prostranstva* [Non-Euclidean Spaces], Moscow, Nauka, 1969, 548 p. (in Russian).
12. *Yaglom, I. M.* Complex Numbers and their application to the Geometry, *Matematicheskoe prosveschenie*, 1961, vol. 6, pp. 60–106 (in Russian).
13. *Mikenberg, M. A. The Laguerre Geometry and its Analogue*, Dis.... Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Kazan, 1994.
14. *Skopets, Z. A. and Yaglom, I. M.* Laguerre Transformations of the Lobachevskii Plane and Linear Fractional Transformations of a Double Variable, *Problems of the Differential and Non-Euclidean Geometries*, Izdatelstvo MGPI, Moscow, 1965, pp. 366–374 (in Russian).
15. *Kostin, A. V.* Problem of Shadow and Surface of Constant Curvature, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 150–164 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2023.20.014.

Received November 26, 2022

Andrey V. Kostin
Elabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University,
89 Kazanskaya St., Elabuga 423604, Russia,
Associate Professor of the Department of Mathematics and Applied Informatics
E-mail: `kostin_andrei@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5353-6138