ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЮМИ

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

http://www.vlmj.ru

Том 22, выпуск 2 2020

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

http://www.vlmj.ru

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

Volume 22, Issue 2 2020

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: В. В. БОЗРОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vlmj.ru**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:
свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;
свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

Editorial Office: 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Managing editor: V. V. BOZROVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: **www.vlmj.ru**

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 22, выпуск 2 апрель–июнь, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2020

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 22, issue 2 April–June, 2020

CONTENT

Vladikavkaz
2020

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 5–17

УДК 517.5
DOI 10.46698/n6807-7263-4866-r

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ «КРУГОВЫМИ» СУММАМИ ФУРЬЕ — ЧЕБЫШЕВА В $L_{2,\rho}$

О. А. Джурахонов[1]

[1] Таджикский национальный университет,
Россия, 734025, Таджикистан, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: `olim74@tajnet.tj`

Аннотация. В работе вычислены точные верхние грани приближения функций двух переменных круговыми частичными суммами двойного ряда Фурье — Чебышева на классе функций $L^{(r)}_{2,\rho}(D)$, $r \in \mathbb{N}$, в пространстве $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(Q)$, где $\rho := \rho(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $Q := \{(x,y) : -1 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, D — оператор Чебышева — Эрмита второго порядка. Получены точные неравенства, в которых величины наилучших полиномиальных приближений оцениваются сверху посредством усредненных с весом значений обобщенных модулей непрерывности m-го порядка производной $D^r f$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) в метрике пространства $L_{2,\rho}$. Даны точные оценки наилучших приближений двойного ряда Фурье по ортогональным системам Фурье — Чебышева на классах функций многих переменных, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности. Так как, в отличие от одномерного случая для двойных рядов, нет естественного способа построения частичных сумм, то мы строим некоторые классы функций, а затем соответствующий метод приближения — «круговые» частичные суммы двойного ряда Фуре — Чебышева. В вопросах, связанных с разложениями функций в ряд Фурье по тригонометрической системе и оценки их наилучших приближений, большую роль играют операторы сдвига. В работе, указывая на некоторые ранее известные результаты, построен оператор обобщенного сдвига, который позволяет определить класс функций, характеризующийся обобщенным модулем непрерывности. На этих классах вычислена верхняя грань значений, наилучшее среднеквадратическое приближение некоторых классов функций «круговыми» частичными суммами двойных рядов Фурье — Чебышева.

Ключевые слова: среднеквадратичное приближение, обобщенный модуль непрерывности, двойной ряд Фурье — Чебышева, неравенство типа Колмогорова, оператор сдвига.

Mathematical Subject Classification (2010): 30E10.

Образец цитирования: *Джурахонов О. А.* Приближение функций двух переменных «круговыми» суммами Фурье — Чебышева в $L_{2,\rho}$ // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 5–17. DOI: 10.46698/n6807-7263-4866-r.

1. Введение

Классические многочлены Чебышева имеют многочисленные применения в экстремальных задачах теории аппроксимации и прикладной математике. Так, например, хорошо известна роль многочленов Чебышева при минимизации остатка квадратурных формул, при приближенном решении дифференциальных и интегральных уравнений, а также в задачах интерполяции функций (см., например, монографии [1–4]). Что же касается работ, посвященных применению многочленов Чебышева двух и большего числа переменных в прикладных задачах, то их совсем мало. Укажем работы [3–7], где вводятся и изучаются многочлены Чебышева многих переменных, рассматриваются некоторые практические применения многочленов Чебышева двух переменных. В [8] изучается ряд теоретических вопросов, связанных с разложениями функций двух переменных в двойных рядах Фурье по многочленам Чебышева, и исследуются их скорости сходимости, а также оценка их остаточных членов.

Настоящая статья продолжает указанную тематику и посвящена вопросам вычисления верхних граней приближения в среднем двойными суммами Фурье — Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных. При этом важную роль играет оператор обобщенного сдвига, соответствующий многочленам Чебышева двух переменных, и введенный на основе этого оператора обобщенный модуль непрерывности. В некоторых задачах аппроксимации операторы обобщенного сдвига и построенные по ним обобщенные модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения структурных и конструктивных свойств функций, чем обычные модули гладкости. Некоторые точные результаты о приближении функций с использованием операторов обобщенного сдвига можно найти в работах [8–12] и в цитируемой в этих работах литературе.

2. Необходимые определения и предварительные факты

Приведем необходимые для дальнейшего определения и предварительные факты. Пусть в $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(Q)$, где

$$Q = \{(x, y) :\, -1 \leqslant x, y \leqslant 1\}, \quad \rho := \rho(x, y) = 1/\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)},$$

пространство функций f двух переменных, суммируемых с квадратом в области Q с весом ρ и нормой

$$\|f\|_{2,\rho} := \|f\|_{L_{2,\rho}} = \left(\iint\limits_{Q} \rho(x, y) f^2(x, y)\, dxdy \right)^{1/2}.$$

В пространстве $L_{2,\rho}$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} F_h f(x, y) = \frac{1}{4} \Big[& f\Big(x \cos h + \sqrt{1 - x^2} \sin h, y \cos h + \sqrt{1 - y^2} \sin h\Big) \\ & + f\Big(x \cos h + \sqrt{1 - x^2} \sin h, y \cos h - \sqrt{1 - y^2} \sin h\Big) \\ & + f\Big(x \cos h - \sqrt{1 - x^2} \sin h, y \cos h + \sqrt{1 - y^2} \sin h\Big) \\ & + f\Big(x \cos h - \sqrt{1 - x^2} \sin h, y \cos h - \sqrt{1 - y^2} \sin h\Big) \Big], \end{aligned} \tag{1}$$

который будем называть *оператором обобщенного сдвига.*

Следуя работе [8], определим разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h(f) := \Delta_h(f; x, y) = F_h f(x, y) - f(x, y) = (F_h - E) f(x, y),$$

$$\begin{aligned} \Delta_h^k(f) &:= \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1}(f)\right) = \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1}(f; \cdot, \cdot), x, y\right) \\ &= (F_h - E)^k f(x, y) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x, y), \end{aligned}$$

где

$$F_h^0 f(x,y) = f(x,y), \quad F_h^i f(x,y) = F_h(F_h^{i-1} f(x,y)) \quad (i = 1, \ldots, k,\ k \in \mathbb{N},\ 0 < h < 1),$$

и E — единичный оператор в $L_{2,\rho}$. Величину

$$\Omega_m(f,t)_{2,\rho} := \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f)\|_{2,\rho} : 0 < h \leqslant t\Big\}, \quad 0 < t < 1, \tag{2}$$

будем называть *обобщенным модулем непрерывности* m-го порядка функции $f \in L_{2,\rho}$. Далее, мы предположим, что функция $f \in L_{2,\rho}$ имеет обобщенные частные производные в смысле Леви [13, с. 172]. Введем операторы

$$D_x := \big(1 - x^2\big)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y := \big(1 - y^2\big)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial y},$$

и положим

$$D := \big(1 - x^2\big)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \big(1 - y^2\big)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} := D_x + D_y$$

— дифференциальный оператор Чебышева второго порядка по переменным x и y. Рассмотрим $L_{2,\rho}^{(r)} := L_{2,\rho}^{(r)}(D)$ — класс функций $f \in L_{2,\rho}$, имеющих обобщенные частные производные

$$\frac{\partial^k}{\partial x^{k-i}\partial y^i} f(x,y) \quad (i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 1, 2, \ldots, 2r,\ r \in \mathbb{N})$$

в смысле Леви, принадлежащие пространству $L_{2,\rho}$, и для которых $\|D^r f\|_{2,\rho} < \infty$, где, как обычно, $D^0 f \equiv f$, $D^r f \equiv D(D^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n \arccos x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

— ортонормированная система многочленов Чебышева [14, с. 76] в пространстве $L_{2,\rho}$. Разложим функцию f в двойной ряд Фурье — Чебышева:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y), \tag{3}$$

где

$$c_{kl}(f) = \iint\limits_{(Q)} \rho(x,y) f(x,y) T_k(x) T_l(y)\, dx\, dy \tag{4}$$

— коэффициенты Фурье — Чебышева функции $f \in L_{2,\rho}$, а равенство в (3) понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$. Обозначим символом

$$S_R(f; x, y) := \sum_{0 \leqslant k^2 + l^2 < R^2} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y)$$

«круговые» частные суммы ряда (3), и пусть

$$E_R(f)_{2,\rho} := E_R(f)_{L_{2,\rho}} = \inf\big\{\|f - p_R\|_{2,\rho} : p_R \in \mathscr{P}_R\big\}$$

— наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\rho}$ множеством $\mathscr{P}_R$-алгебраических полиномов вида

$$p_R(x,y) = \sum_{0\leqslant k^2+l^2<R^2} a_{kl}x^k y^l, \quad R>0, \tag{5}$$

в пространстве $L_{2,\rho}$. Хорошо известно, что

$$E_R(f)_{2,\rho} := \inf\left\{\|f-p_R\|_{2,\rho} : p_R(x,y)\in\mathscr{P}_R\right\} = \|f-S_R(f)\|_{2,\rho} = \left\{\sum_{k^2+l^2\geqslant R^2} c_{kl}^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{6}$$

В [8] доказано, что для произвольной $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$ имеет место равенство

$$\|\Delta_h^m(D^r f)\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(1-\cos kh\cos lh)^{2m}(k^2+l^2)^{2r}c_{kl}^2(f). \tag{7}$$

Легко проверить, что

$$DT_k(x)T_l(y) = -(k^2+l^2)T_k(x)T_l(y). \tag{8}$$

Применяя метод математической индукции, из (8) получаем

$$D^rT_k(x)T_l(y) = (-1)^r(k^2+l^2)^rT_k(x)T_l(y). \tag{9}$$

Учитывая (9), из (3) после r-кратного применения оператора D имеем

$$D^rf(x,y) = (-1)^r\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k^2+l^2)^r c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y). \tag{10}$$

Очевидно, что для любой $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ полученный двойной ряд в (10) сходится в смысле пространства $L_{2,\rho}$. Поэтому он будет служить рядом Фурье — Чебышева функции $D^rf \in L_{2,\rho}$ (см., например, [15, с. 169]). Пользуясь равенством Парсеваля, из (10) будем иметь

$$\|D^rf\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k^2+l^2)^{2r}c_{kl}^2(f).$$

Кроме того, очевидно

$$E_R^2(D^rf)_{2,\rho} = \sum_{k^2+l^2\geqslant R^2} c_{kl}^2(D^rf) = \sum_{k^2+l^2\geqslant R^2}(k^2+l^2)^{2r}c_{kl}^2(f). \tag{11}$$

Условимся далее при вычислении верхних граней по всем функциям $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ в соотношениях общего характера подразумевать, что $D^rf \neq p_R$, $D \neq 0$.

Лемма 1. *При любом $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_R(f)_{2,\rho}}{E_R(D^rf)_{2,\rho}} = \frac{1}{R^{2r}}. \tag{12}$$

$\lhd$ Пользуясь равенствами (6) и (11), для произвольной $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ получаем

$$E_R^2(f)_{2,\rho} = \sum_{k^2+l^2\geqslant R^2} c_{kl}^2(f) = \sum_{k^2+l^2\geqslant R^2}\frac{1}{(k^2+l^2)^{2r}}(k^2+l^2)^{2r}c_{kl}^2(f)$$
$$\leqslant \frac{1}{R^{4r}}\sum_{k^2+l^2\geqslant R^2}(k^2+l^2)^{2r}c_{kl}^2(f) = \frac{1}{R^{4r}}E_R^2(D^rf)_{2,\rho}.$$

Отсюда следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (12):

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_R(f)_{2,\rho}}{E_R(D^r f)_{2,\rho}} \leqslant \frac{1}{R^{2r}}. \tag{13}$$

С целью получения оценки снизу той же величины рассмотрим функцию

$$f_0(x,y) = \frac{1}{R^{2r}} T_0(x) T_R(y), \tag{14}$$

которая очевидно принадлежит классу $L^{(r)}_{2,\rho}$, поскольку для функции f_0 имеем

$$D^r f_0(x,y) = (-1)^r T_0(x) T_R(y),$$

и в силу формул (6) и (11)

$$E_R(f_0)_{2,\rho} = \frac{1}{R^{2r}}, \quad E_R(D^r f_0)_{2,\rho} = 1. \tag{15}$$

Пользуясь равенствами (15), запишем оценку снизу для экстремальной характеристики, стоящей в левой части неравенства (13):

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_R(f)_{2,\rho}}{E_R(D^r f)_{2,\rho}} \geqslant \frac{E_R(f_0)_{2,\rho}}{E_R(D^r f_0)_{2,\rho}} = \frac{1}{R^{2r}}. \tag{16}$$

Из сопоставления оценки сверху (13) и оценки снизу (16) получаем требуемое равенство (12). $\rhd$

Пусть

$$W^{(r)}_{2,\rho}(D) := \left\{ f \in L^{(r)}_{2,\rho}(D) : \|D^r(f)\|_{2,\rho} \leqslant 1 \right\}.$$

Теорема 1. *При любом $r \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$E_R\left(W^{(r)}_{2,\rho}(D)\right)_{2,\rho} := \sup\left\{ E_R(f)_{2,\rho} :\, f \in W^r_{2,\rho}(D)\right\} = \frac{1}{R^{2r}}. \tag{17}$$

$\lhd$ Так как для любого $f \in W^{(r)}_{2,\rho}(D)$

$$E_R(D^r f)_{2,\rho} \leqslant \|D^r f\|_{2,\rho} \leqslant 1,$$

то из неравенства (13) для произвольной функции $f \in W^{(r)}_{2,\rho}(D)$ получаем

$$E_R(f)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{R^{2r}} E_R(D^r f)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{R^{2r}},$$

откуда и следует оценка сверху:

$$E_R\left(W^{(r)}_{2,\rho}(D)\right)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{R^{2r}}. \tag{18}$$

С целью получении оценки снизу введем снова в рассмотрение функцию (14), для которой имеют место равенства (15). Пользуясь первым из равенств (15), запишем оценку снизу:

$$E_R\left(W^{(r)}_{2,\rho}(D)\right)_{2,\rho} \geqslant E_R(f_0)_{2,\rho} = \frac{1}{R^{2r}}, \tag{19}$$

и так как $\|D^r f_0\| = 1$, то введенная при доказательстве леммы 1 функция f_0, определенная равенством (14), принадлежит классу $W^{(r)}_{2,\rho}(D)$.

Требуемое равенство (17) получаем из сопоставления неравенств (18) и (19), чем и завершаем доказательство теоремы 1. $\rhd$

3. Некоторые точные результаты

При решении различных экстремальных задач теории аппроксимации функций важную роль играют неравенства между нормами последовательных производных функций или неравенства типа Колмогорова в различных банаховых пространствах. Если $\mathbb{S}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{S}=\mathbb{R}_+$, то неравенство Колмогорова для функций одной переменной имеет вид [16, 17]

$$\|f^{(s)}\|_{L_p(\mathbb{S})}\leqslant M\|f\|^{\alpha}_{L_q(\mathbb{S})}\cdot\|f^{(r)}\|^{\beta}_{L_\gamma(\mathbb{S})}, \tag{20}$$

где

$$\alpha=\frac{r-s-1/\gamma+1/p}{r-1/\gamma+1/q},\quad \beta=1-\alpha,\ 1\leqslant p,q,\gamma\leqslant\infty.$$

Следует отметить, что различные неравенства типа (20) с точными константами приведены в монографии [16]. В статье [17] приведен подробный обзор всех результатов о неравенствах вида (20), где получены наилучшие константы и анализируется связь задачи Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования D^k порядка k с неравенством (20). Отметим, что неравенства типа (20) с точными константами для функций двух переменных найдены в недавно опубликованных работах [18–20]. Здесь докажем точное неравенство Колмогорова для функций $f\in L^{(r)}_{2,\rho}(D)$ в пространстве $L_{2,\rho}$. Поскольку функция $f\in L^{(r)}_{2,\rho}$ и ее промежуточные производные D^sf, $s=1,2,\ldots,r-1$, $r\in\mathbb{N}$, принадлежат также пространству $L_{2,\rho}$, то представляет несомненный интерес изучение поведения наилучших приближений $E_R(D^sf)$, $s=1,2,\ldots,r-1$, $r\in\mathbb{N}$, на классе $L^{(r)}_{2,\rho}(D)$.

Теорема 2. *Пусть $r,s\in\mathbb{N}$, $r\geqslant s$. Тогда для произвольной функции $f\in L^{(r)}_{2,\rho}$ справедливо точное в $L_{2,\rho}$ неравенство*

$$\|D^sf\|_{2,\rho}\leqslant\|D^rf\|^{s/r}_{2,\rho}\|f\|^{1-s/r}_{2,\rho}. \tag{21}$$

$\lhd$ В самом деле, в силу линейности оператора D^s из равенства (3) с учетом равенства (9) имеем

$$D^sf(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^s(k^2+l^2)^sc_{kl}(f)T_k(x)T_l(y).$$

Применяя равенство Парсеваля, запишем

$$\|D^sf\|^2_{2,\rho}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k^2+l^2)^{2s}c^2_{kl}(f). \tag{22}$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера для двойного ряда, из (22) имеем

$$\|D^sf\|^2_{2,\rho}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left((k^2+l^2)^{2r}c^2_{kl}(f)\right)^{s/r}\left(c^2_{kl}(f)\right)^{1-s/r}$$
$$\leqslant\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k^2+l^2)^{2r}c^2_{kl}(f)\right)^{s/r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}c^2_{kl}(f)\right)^{1-s/r}=\|D^rf\|^{2s/r}_{2,\rho}\cdot\|f\|^{2(1-s/r)}_{2,\rho},$$

откуда и вытекает неравенство (21).

Для ранее рассмотренной нами функции (14), кроме равенств (15), также выполняются соотношения

$$\|f_0\|_{2,\rho} = R^{-2r}, \quad D^s f_0(x,y) = (-1)^s R^{-2(r-s)} T_0(x) T_R(y), \quad \|D^s f_0\|_{2,\rho} = R^{-2(r-s)},$$

пользуясь которыми будем иметь

$$\|D^s f_0\|_{2,\rho}^2 = \|D^r f_0\|_{2,\rho}^{2s/r} \cdot \|f_0\|_{2,\rho}^{2(1-s/r)} = R^{-4(r-s)},$$

откуда и следует точность неравенства (21). $\triangleright$

Теорема 3. *Пусть $r, s \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant s \leqslant r-1$, $r \geqslant 2$. Тогда для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ справедливо точное в $L_{2,\rho}$ неравенство*

$$E_R(D^s f)_{2,\rho} \leqslant (E_R(D^r f)_{2,\rho})^{s/r} (E_R(f)_{2,\rho})^{1-s/r}. \tag{23}$$

$\triangleleft$ Так как равенство (10) имеет место для любого $r \in \mathbb{N}$, то при любом s, $1 \leqslant s \leqslant r-1$, $r \geqslant 2$, запишем

$$E_R^2(D^s f)_{2,\rho} = \sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} (k^2+l^2)^{2s} c_{kl}^2(f) = \sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} \left((k^2+l^2)^{2r} c_{kl}^2(f)\right)^{s/r} (c_{kl}^2(f))^{1-s/r}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} (k^2+l^2)^{2r} c_{kl}^2(f)\right)^{s/r} \left(\sum_{k^2+l^2 \geqslant R^2} c_{kl}^2(f)\right)^{1-s/r} \leqslant \left(E_R^2(D^r f)_{2,\rho}\right)^{s/r} \left(E_R^2(f)_{2,\rho}\right)^{1-s/r},$$

откуда и вытекает неравенство (23).

Так как для функции $f_1(x,y) = T_R(x) T_0(y)$ в силу равенств (6) и (11) имеют место соотношения

$$E_R(f_1)_{2,\rho} = 1, \quad E_R(D^s f_1)_{2,\rho} = R^{2s}, \quad E_R(D^r f_1)_{2,\rho} = R^{2r}, \tag{24}$$

то будем иметь

$$E_R(D^s f_1)_{2,\rho} = (E_R(D^r f_1)_{2,\rho})^{s/r} (E_R(f_1)_{2,\rho})^{1-s/r} = (R^{2r})^{s/r} = R^{2s}.$$

Этим доказана точность неравенства (23). $\triangleright$

Теорема 4. *Пусть $s, r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $s < r$. Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{f \in W_{2,\rho}^{(r)}(D)} \frac{E_R(D^s f)_{2,\rho}}{(E_R(f)_{2,\rho})^{1-s/r}} = 1. \tag{25}$$

$\triangleleft$ В самом деле, из неравенства Колмогорова (23) для произвольной функции $f \in W_{2,\rho}^{(r)}(D)$, учитывая, что $E_R(D^r f)_{2,\rho} \leqslant 1$, запишем

$$E_R(D^s f)_{2,\rho} \leqslant (E_R(f)_{2,\rho})^{1-s/r},$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in W_{2,\rho}^{(r)}(D)} \frac{E_R(D^s f)_{2,\rho}}{(E_R(f)_{2,\rho})^{1-s/r}} \leqslant 1. \tag{26}$$

Соответствующую оценку снизу получаем для функции (14), для которой

$$D^s f_0(x,y) = (-1)^s R^{-2(r-s)} T_0(x) T_R(y), \quad E_R(D^s f_0)_{2,\rho} = R^{-2(r-s)},$$

а потому имеем

$$\sup_{f\in W^{(r)}_{2,\rho}(D)} \frac{E_R(D^s f)_{2,\rho}}{\left(E_R(f)_{2,\rho}\right)^{1-s/r}} \geqslant \frac{E_R(D^s f_0)_{2,\rho}}{\left(E_R(f_0)_{2,\rho}\right)^{1-s/r}} = \frac{R^{2(r-s)}}{R^{2(r-s)}} = 1. \tag{27}$$

Требуемый результат (25) вытекает из сравнения неравенств (26) и (27). ▷

4. Основные результаты

В этом параграфе приведем более общий результат.

Теорема 5. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $R\in\mathbb{R}_+$, $0<p\leqslant 2$, $0<h\leqslant \pi/R$, $q(t)\geqslant 0$, *— произвольная суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{R^{2r} E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho} q(t)\,dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\,dt\right)^{1/p}}. \tag{28}$$

◁ Воспользуемся одним вариантом неравенства Минковского, приведенного в монографии [21, с. 104],

$$\left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{j=N}^{\infty} |\tilde f_j(t)|^2\right)^{p/2} dt\right\}^{1/p} \geqslant \left\{\sum_{j=N}^{\infty}\left(\int\limits_0^h |f_j(t)|^p\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}, \tag{29}$$

где $0<p\leqslant 2$. Полагая в неравенстве (29) $\tilde f_j := f_j q^{1/p}$, получаем

$$\left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{j=N}^{\infty} |f_j(t)|^2\right)^{p/2} q(t)\,dt\right\}^{1/p} \geqslant \left\{\sum_{j=N}^{\infty}\left(\int\limits_0^h |f_j(t)|^p q(t)\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}.$$

Используя равенство (7), из последнего неравенства будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho} q(t)\,dt\right)^{1/p} \geqslant \left(\int\limits_0^h \|\Delta_t^m(D^r f)\|_{2,\rho}^p q(t)\,dt\right)^{1/p}$$

$$\geqslant \left\{\int\limits_0^h \left[\sum_{k^2+l^2\geqslant R^2} (1-\cos kt\cos lt)^{2m}(k^2+l^2)^{2r} c_{kl}^2(f)\right]^{p/2} q(t)\,dt\right\}^{1/p}$$

$$\geqslant \left\{\sum_{k^2+l^2\geqslant R^2} c_{kl}^2(f)\left((k^2+l^2)^{pr}\int\limits_0^h (1-\cos kt\cos lt)^{pm} q(t)\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}$$

$$\geqslant \inf_{\substack{k^2+l^2\geqslant R^2,\\ k,l\in\mathbb{N}}} \left\{(k^2+l^2)^{pr}\int\limits_0^h (1-\cos kt\cos lt)^{pm}q(t)\,dt\right\}^{1/p}\left\{\sum_{k^2+l^2\geqslant R^2} c_{kl}^2(f)\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{R^{2pr}\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm}q(t)\,dt\right\}^{1/p} E_R(f)_{2,\rho} = R^{2r}\left\{\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm}q(t)\,dt\right\}^{1/p} E_R(f)_{2,\rho}.$$

Отсюда для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ вытекает оценка сверху:

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r}E_R(f)_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho}q(t)\,dt\right\}^{1/p}} \leqslant \frac{1}{\left\{\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm}q(t)\,dt\right\}^{1/p}}. \tag{30}$$

Для получения соответствующей оценки снизу рассмотрим функцию $f_1(x,y) = T_R(x)\,T_0(y)$, использованную нами в конце доказательства теоремы 3. Для этой функции в силу (7) имеем

$$\|\Delta_h^m(D^r f_1)\|_{2,\rho}^2 = (1-\cos Rh)^{2m}R^{4r},$$

откуда сразу следует, что

$$\Omega_m^p(D^r f_1,t)_{2,\rho} := (1-\cos Rt)^{pm}R^{2pr} \quad (0<p\leqslant 2,\ 0<Rt\leqslant\pi). \tag{31}$$

Учитывая полученные равенства, запишем оценку снизу:

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho}q(t)\,dt\right)^{1/p}} \geqslant \frac{R^{2r}E_R(f_1)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f_1,t)_{2,\rho}q(t)\,dt\right)^{1/p}}$$

$$= \frac{R^{2r}\cdot 1}{R^{2r}\left(\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm}q(t)\,dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos Rt)^{pm}q(t)\,dt\right)^{1/p}}. \tag{32}$$

Из сопоставления оценки сверху (30) и оценки снизу (32) получаем требуемое равенство (28). ▷

Из доказанной теоремы 5 вытекают ряд следствий

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 5 *положить* $q(t) = R\sin Rt$, *то имеем*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r-1/p}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho}\sin Rt\,dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{mp+1}{(1-\cos Rh)^{mp+1}}\right\}^{1/p}.$$

В частности, отсюда при $h = \pi/R$ *вытекает равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r-1/p}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R} \Omega_m^p(D^r f,t)_{2,\rho}\sin Rt\,dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{mp+1}{2^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{33}$$

В свою очередь, если в (33) *полагать* $p = 1/m$, *то при* $2r > m$, $r,m\in\mathbb{N}$, *получаем аналог одной теоремы В. В. Шалаева* [22]*:*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r-m}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R} \Omega_m^{1/m}(D^r f,t)_{2,\rho}\sin Rt\,dt\right)^m} = \frac{1}{2^m}.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы* 5 *при* $q(t)=1$, $h=\pi/R$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-1/p)}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R}\Omega_m^p(D^rf,t)_{2,\rho}\,dt\right)^{1/p}}=\left\{\frac{\Gamma(mp+1)}{2^{mp}\sqrt{\pi}\Gamma(mp+1/2)}\right\}^{1/p},$$

где $\Gamma(u)$ — *гамма-функция Эйлера. В частности, при* $p=1/m$, $r\geqslant m$, $r,m\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-m)}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R}\Omega_m^{1/m}(D^rf,t)_{2,\rho}\,dt\right)^m}=\frac{1}{\pi^m}.$$

Следствие 3. *При* $q(t)\equiv1$, $p=1/m$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $2r>m$, $0<h\leqslant\pi/R$, *из* (28) *вытекает аналог одного результата С. Б. Вакарчука* [12]*:*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2r-m}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}\Omega_m^{1/m}(D^rf,t)_{2,\rho}dt\right)^m}=(Rh-\sin Rh)^{-m}.$$

В частности, полагая в полученном равенстве $h=\pi/(2R)$, имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2r-m}E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2R)}\Omega_m^{1/m}(D^rf,t)_{2,\rho}r\,dt\right)^m}=\left\{\frac{2}{\pi-2}\right\}^m.$$

Поскольку для функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}$ ($r\in\mathbb{N}$, $r\geqslant2$) ее промежуточные производные D^sf ($s=1,2,\dots,r-1$) также принадлежат пространству $L_{2,\rho}$, то представляет интерес изучать поведение $E_R(D^sf)_{2,\rho}$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $m,r,s\subset\mathbb{N}$, $r\geqslant s$ ($1\leqslant s\leqslant r-1$, $r\geqslant2$), $0<p\leqslant2$, $0<h\leqslant3\pi/(4R)$, $R\in\mathbb{R}_+$, $q(t)$ — *неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-s)}E_R(D^sf)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}\Omega_m^{p}(D^rf,t)_{2,\rho}q(t)\,dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^h(1-\cos Rt)^{mp}q(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \tag{34}$$

В частности, если в (34) *полагать*

$$p=1/m,\quad m\in\mathbb{N},\quad 2(r-s)>m,\quad r,s\in\mathbb{N},\quad q(t)\equiv1,$$

то имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-s)-m}E_R(D^sf)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}\Omega_m^{1/m}(D^rf,t)_{2,\rho}\,dt\right)^m}=(Rh-\sin Rh)^{-m},$$

а если же полагать $p=1/m$ *и* $q(t)=t$, *то будем иметь*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-s)-m}E_R(D^sf)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}t\Omega_m^{1/m}(D^rf;t)_{2,\rho}\,dt\right)^m}=2^m\big\{Rh(Rh-\sin Rh)-[(Rh)^2-2(1-\cos Rh)]\big\}^{-m}.$$

Отсюда, в частности, при $h=\pi/R$ имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-s)-m}E_R(D^sf)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{\pi/R}t\Omega_m^{1/m}(D^rf;t)_{2,\rho}\,dt\right)^m}=\frac{1}{2^m}.$$

$\lhd$ В самом деле, обозначив $D^sf=g$, будем иметь $D^rf=D^{r-s}g$, а потому, если $f\in L_{2,\rho}^{(r)}$, очевидно, что $g\in L_{2,\rho}^{(r-s)}$ и, пользуясь равенством (18), будем иметь

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{R^{2(r-s)}E_R(D^sf)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}\Omega_m^{p}(D^rf,t)_{2,\rho}q(t)\,dt\right)^{1/p}}$$

$$=\sup_{g\in L_{2,\rho}^{(r-s)}}\frac{R^{2(r-s)}E_R(g)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^{h}\Omega_m^{p}(D^{r-s}g,t)_{2,\rho}q(t)\,dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h(1-\cos Rt)^{pm}q(t)dt\right)^{-1/p}, \qquad (35)$$

откуда и следует утверждение теоремы 6. $\rhd$

Литература

1. *Fox L., Parker I.* Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis.—Oxford: Oxford Univer. Press, 1992.
2. *Rivlin T.* The Chebyshev Polynomials.—N. Y. ete.: Fohn Wiley and Sons, 1975.
3. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М.: Наука, 1983.—384 с.
4. *Васильев Н. И., Клоков Ю. А., Шкерстеня А. Я.* Применение полиномов Чебышева в численном анализе.—Рига: Знатне, 1984.
5. *Beerends R. I.* Chebyshev polynomials in several variables and the radial part of the Laplace–Beltrami operator // Trans. Amer. Math. Soc.—1991.—Vol. 328, № 2.—P. 779–814. DOI: 10.1090/S0002-9947-1991-1019520-3.
6. *Lidl R.* Tschebyscheffpolynome in mehreren Variablen // J. Reine Angew. Math.—1975.—bd. 273.—S. 178–198.
7. *Ricci P. E.* I polynomi di Tchbycheff in piu variabli // Rend. Math.—1978.—Vol. 11, № 2.—P. 295–327.
8. *Абилов В. А., Керимов М. К.* Об оценках остаточных членов кратных рядов Фурье — Чебышева и кубатурных формул Чебышевского типа // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2003.—Т. 43, № 5.—С. 643–663.
9. *Иванов В. И., Чертова Д. В., Лю Ю.* Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1,1]$ со степенным весом // Тр. ин-та матем. и механики УрО РАН.—2008.—Т. 14, № 3.—С. 112–126.
10. *Шабозов М. Ш., Тухлиев К.* Неравенства Джексона — Стечкина с обобщенными мод // Тр. ин-та матем. и механики УрО РАН.—2015.—Т. 21, № 4.—С.292–308.
11. *Вакарчук С. Б., Швачко А. В.* О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. мат. журн.—2013.—Т. 65, № 12.—С. 1604–1621.
12. *Вакарчук С. Б.* Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева — Эрмита и поперечники функциональных классов // Мат. заметки.—2014.—Т. 95, вып. 5.—С. 666–684.
13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теории вложения.—М.: Наука, 1977.—456 с.
14. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.—М.: Наука, 1979.—416 с.
15. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представления групп.—М.: Наука, 1965.—596 с.
16. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов С. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения.—Киев: Наукова думка, 2003.—590 с.
17. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Усп. мат. наук.—1996.—Т. 51, № 6.—С. 88–124. DOI: 10.4213/rm1019.

18. *Вакарчук С. Б., Швачко А. В.* Неравенства колмогоровского типа для производных функций двух переменных и их приложение к аппроксимации «углом» // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 11.—С. 3–22.
19. *Шабозов М. Ш., Сайнаков В. Д.* О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных // Тр. ин-та матем. и механики УрО РАН.—2018.—Т. 24, № 4.—С. 270–282. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-270-282.
20. *Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О.* О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2 // Чебышевский сб.—2019.—Т. 20, № 2.—С. 348–365. DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-2-348-365.
21. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.
22. *Шалаев В. В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн.—1991.—Т. 43, № 1.—С. 125–129.

Статья поступила 5 июня 2019 г.

Джурахонов Олимджон Акмалович
Таджикский национальный университет,
доцент кафедры функционального анализа и диф. уравнений
ТАДЖИКИСТАН, 734063, Душанбе, ул. Рудаки, 17
E-mail: `olim74@tajnet.tj`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 5–17

APPROXIMATION OF BIVARIATE FUNCTIONS BY FOURIER–TCHEBYCHEV “CIRCULAR” SUMS IN $L_{2,\rho}$

Jurakhonov, O. A.[1]

[1] Tajik National University,
17 Rudaki St., Dushanbe 734063, Tajikistan
E-mail: `olim74@tajnet.tj`

Abstract. In this paper the sharp upper bounds of approximation of functions of two variables with generalized Fourier–Chebyshev polynomials for the class of functions $L_{2,\rho}^{(r)}(D)$, $r \in N$, are calculated in $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(Q)$, where $\rho := \rho(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $Q := \{(x,y) : -1 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, and D is a second order Chebyshev–Hermite operator. The sharp estimates for the best polynomial approximation are obtained by means of weighted average of module of continuity of m-th order with $D^r f$ $(r \in Z_+)$ in $L_{2,\rho}$. The sharp estimates for the best approximation of double Fourier series in Fourier–Chebyshev orthogonal system in the classes of functions of several variables which are characterized by generalized module of continuity are given. We first form some classes of functions and then the corresponding methods of approximations, “circular” by partial sum of Fourier–Chebyshev double series, since, unlike the one-dimensional case, there is no natural way of expressing the partial sums of double series. The shift operator plays a crucial role in the problems related to expansion of functions in Fourier series in trigonometric system and estimating their best approximation properties. Based on some previous known research we construct the shift operator, which enables one to determine some classes of functions which characterized by module of continuity. And for these classes of functions the upper bound for the best mean squared approximation by “circular” partial sum of Fourier–Chebyshev double series is calculated.

Key words: mean-squared approximation, generalized module of continuity, Fourier–Tchebychev double series, Kolmogorov type inequality, shift operator.

Mathematical Subject Classification (2010): 30E10.

For citation: *Jurakhonov, O. A.* Approximation of Bivariate Functions by Fourier–Tchebychev “Circular” Sums in $L_{2,\rho}$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 5–17 (in Russian). DOI: 10.46698/n6807-7263-4866-r.

References

1. *Fox, L. and Parker, I. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, Oxford, Oxford Univer. Press, 1992.
2. *Rivlin, T. The Chebyshev Polynomials*, New York ete., Fohn Wiley and Sons, 1975.

3. *Pashkovskii, S. Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Chebyshev Polynomials and Series Used for Calculations], Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).
4. *Vasil'ev, N. I., Klokov, Yu. A., and Shkerstena, A. Ya. Primenenie polinomov Chebysheva v chislennom analize* [Chebyshev Polynomials Application in Numerical Analysis], Riga, Zinatne, 1984 (in Russian).
5. *Beerends, R. I.* Chebyshev Polynomials in Several Variables and the Radial Part of the Laplace–Beltrami Operator, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1991, vol. 328, no. 2, pp. 779–814. DOI: 10.1090/S0002-9947-1991-1019520-3.
6. *Lide, R.* Tschebyscheffpolynome in Mehreren Variablen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1975, vol. 273, pp. 178–198.
7. *Ricci, P. E.* Chebyshev Polynomials in Several Variables, *Rend. Math.*, 1978, vol. 11, no. 2, pp. 295–327 (in Italian).
8. *Abilov, V. A. and Kerimov, M. K.* Estimates of Residual Terms of Multiple Fourier–Chebyshev Series and the Chebyshev Type Cubature Formulas, *Computational Mathematics and Mathematical Physic*s, 2003, vol. 43, no. 5, pp. 613–632.
9. *Ivanov, V. I., Chertova, D. V. and Liu, Y.* The Sharp Jackson Inequality in the Space L_2 on the Segment $[-1, 1]$ with the Power Weight, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2009, vol. 264, pp. 133–149. DOI: 10.1134/S0081543809050113.
10. *Shabozov, M. Sh. and Tuhliev, K.* Jackson–Stechkin Type Inequalities with Generalized Moduli of Continuity and Widths of Some Classes of Functions, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 21, no. 4, pp. 292–308 (in Russian).
11. *Vakarchuk, S. B. and Shvachko, A. V.* On the Best Approximation in the Mean by Algebraic Polynomials with Weight and the Exact Values of Widths for the Classes of Functions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2014, vol. 65, pp. 1774–1792. DOI: 10.1007/s11253-014-0897-8.
12. *Vakarchuk, S. B.* Mean Approximation of Functions on the Real Axis by Algebraic Polynomials with Chebyshev–Hermite Weight and Widths of Function Classes, *Mathematical Notes*, 2014, vol. 95, pp. 599–614. DOI: 10.1134/S0001434614050046.
13. *Nikol'skij, S. M. Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teorii vlozhenija* [Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems], Moskow, Nauka, 1977 (in Russian).
14. *Suetin, P. K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classic Orthogonal Polynomials], Moskow, Nauka, 1979 (in Russian).
15. *Vilenkin, N. Ja. Special Functions and the Theory of Group Representations. Translated from the Russian by V. N. Singh. Translations of Mathematical Monographs*, vol. 22, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
16. *Babenko, V. F., Kornejchuk, N. P., Kofanov, S. A. and Pichugov, S. A. Neravenstva dlja proizvodnyh i ih prilozhenija* [Inequalities for Derivatives and Their Applications], Kiev, Naukova dumka, 2003 (in Russian).
17. *Arestov, V. V.* Approximation of Unbounded Operators by Bounded Operators and Related Extremal Problems Russian, *Mathematical Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126.
18. *Vakarchuk, S. B. and Shvachko, A. V.* Kolmogorov-Type Inequalities for Derived Functions of Two Variables with Application for Approximation by an «Angle», *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, pp. 1–18. DOI: 10.3103/S1066369X15110018.
19. *Shabozov, M. Sh. and Sainakov, V. D.* On Kolmogorov Type Inequalities in the Bergman Space for Functions of Two Variables, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 270–282.
20. *Shabozov, M. S. and Akobirshoev, M. O.* About Kolmogorov Type of Inequalities for Periodic Functions of Two Variables in L_2, *Chebyshevskii Sbornik*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 348–365 (in Russian). DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-2-348-365.
21. *Pinkus, A. n-Widths in Approximation Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1985.
22. *Shalaev, V. V.* Widths in L_2 of Classes of Differentiable Functions, Defined by Higher-Order Moduli of Continuity, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1991, vol. 43, pp. 104–107. DOI: 10.1007/BF01066914.

Received June 5, 2019

Olimjon A. Jurakhonov
Tajik National University,
17 Rudaki St., Dushanbe 734063, Tajikistan,
Associate Professor
E-mail: `olim74@tajnet.tj`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 18–23

УДК 517.983
DOI 10.46698/y3646-7660-8439-j

О НЕОГРАНИЧЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С КВАЗИСИММЕТРИЧНЫМИ ЯДРАМИ

В. Б. Коротков[1]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: vitalborkor@gmail.com

Аннотация. В 1935 г. фон Нейман установил, что предельный спектр самосопряженного карлемановского интегрального оператора в L_2 содержит 0. Этот результат был обобщен автором на несамосопряженные операторы: предельный спектр оператора, сопряженного к карлемановскому интегральному оператору, содержит 0. Будем говорить, что плотно определенный в L_2 линейный оператор A удовлетворяет обобщенному условию фон Неймана, если 0 принадлежит предельному спектру сопряженного оператора A^*. Обозначим через B_0 класс всех линейных операторов в L_2, удовлетворяющих обобщенному условию фон Неймана. Автором было доказано, что каждый определенный на L_2 ограниченный интегральный оператор принадлежит классу B_0. Возникает вопрос: верно ли аналогичное утверждение для любого неограниченного плотно определенного в L_2 интегрального оператора? В статье дается отрицательный ответ на этот вопрос и устанавливается достаточное условие принадлежности плотно определенного в L_2 интегрального оператора с квазисимметричным ядром классу B_0.

Ключевые слова: замыкаемый оператор, интегральный оператор, ядро интегрального оператора, предельный спектр, линейное интегральное уравнение 1-го или 2-го рода.

Mathematical Subject Classification (2010): 45P05, 47B34.

Образец цитирования: *Коротков В. Б.* О неограниченных интегральных операторах с квазисимметричными ядрами // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 18–23. DOI: 10.46698/y3646-7660-8439-j.

Пусть (X, μ) — пространство с положительной мерой μ, $L_0 := L_0(X, \mu)$ — совокупность всех μ-измеримых μ-почти всюду конечных функций на X с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множествах μ-меры нуль, $L_2 := L_2(X, \mu)$ — пространство всех функций из L_0 с суммируемым квадратом. Через $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ обозначим норму и скалярное произведение в L_2.

Мера μ называется *σ-конечной*, если существуют множества $X_n \subset X$, $\mu X_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. *Атомом меры* μ называется множество положительной меры, непредставимое в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что мера μ не является чисто атомической, если в X имеется множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ. Всюду далее предполагается, что мера μ не является чисто атомической и σ-конечна. Этим условиям удовлетворяет мера Лебега измеримых по Лебегу множеств евклидова пространства или вещественной числовой прямой.

Линейный оператор $T : D_T \subset L_2 \to L_0$ называется *интегральным*, если найдется определенная на $X \times X$ $(\mu\times\mu)$-измеримая $(\mu\times\mu)$-почти всюду конечная функция $K(x,y)$ такая, что для любого $f \in D_T$

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)\,d\mu(y) \tag{1}$$

для μ-почти всех $x \in X$. Интеграл в (1) понимается в лебеговом смысле. Функция $K(x,y)$ называется *ядром* интегрального оператора T. Будем говорить, что ядро порождает интегральный оператор по формуле (1).

Определение. Нуль принадлежит предельному спектру $\sigma_C(H)$ оператора $H : D_H \subset L_2 \to L_2$, если существует ортонормированная последовательность $\{f_n\} \subset D_H$ такая, что $\|Hf_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Если $T : L_2 \to L_2$ — ограниченный интегральный оператор, то $0 \in \sigma_C(T^*)$, где T^* — сопряженный к T оператор [1, с. 754; 2, теорема III. 2.6]. Другое доказательство этого результата дано в книге Халмоша и Сандера [3, теорема 15.1].

Возникает вопрос: будет ли иметь место включение $0 \in \sigma_C(T^*)$, если T — произвольный неограниченный интегральный плотно определенный замыкаемый оператор в L_2? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий

Пример. Пусть $T_0 : L_\infty(0,1) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ — линейный оператор, определяемый равенством

$$T_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} n w_n \int\limits_0^1 f\,\frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{mE_n}}\,dy, \quad f \in L_\infty(0,1),$$

где $\{w_n\}$ — ортонормированный базис Уолша, χ_{E_n} — характеристическая функция множества $E_n \subset (0,1)$, $\{E_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{mE_n} < \infty$, здесь m — мера Лебега. Тогда T_0 — замыкаемый интегральный оператор с ядром

$$K_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n w_n(x)\frac{\chi_{E_n}(y)}{\sqrt{mE_n}},$$

но $0 \notin \sigma_C(T^*)$.

Действительно, для любой функции f из $L_\infty(0,1)$

$$\int\limits_0^1 T_0 f w_j\,dx = \int\limits_0^1 f j\,\frac{\chi_{E_j}}{\sqrt{mE_j}}\,dy, \quad j = 1,2,\ldots$$

Следовательно, T_0^* определен на $\{w_n\}$, поэтому T_0^* плотно определен и T_0 имеет замыкание — оператор T_0^{**}. Далее, для любой функции f из $L_\infty(0,1)$ и всех $x \in (0,1)$

$$\int\limits_0^1 |K_0(x,y)||f(y)|\,dy \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n\|f\|_\infty\sqrt{mE_n} < \infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — норма в $L_\infty(0,1)$, так что T_0 — замыкаемый интегральный оператор. При этом для любой функции $g \in D_{T_0^*}$

$$\|T_0^* g\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\chi_{E_n}(y)}{\sqrt{mE_n}}\int\limits_0^1 g w_n\,dx\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left|\int\limits_0^1 g w_n\,dx\right|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 g w_n\,dx\right|^2 = \|g\|^2.$$

Следовательно, $0 \notin \sigma_C(T^*)$.

Обозначим через B_0 класс всех линейных операторов H в L_2, для которых $0 \in \sigma_C(H^*)$. Различные условия принадлежности операторов классу B_0 даны в [4]. Ниже устанавливается еще одно такое условие.

Назовем ядро $K(x,y)$ квазисимметричным, если

$$|K(x,y)| = |K(y,x)| \quad \text{для} \quad (\mu \times \mu)\text{-почти всех } (x,y) \in X \times X. \tag{2}$$

Условию (2) удовлетворяют все эрмитовы, косоэрмитовы, симметричные и кососимметричные ядра.

Теорема 1. *Пусть $T : D_T \subset L_2 \to L_2$ — неограниченный плотно определенный замыкаемый интегральный оператор с квазисимметричным ядром $K(x,y)$. Если существует вещественная неотрицательная функция $a \in L_0$, положительная на множестве положительной меры, не содержащем атомов меры μ, и удовлетворяющая условию*

$$\int |K(u,v)| a(v)\, d\mu(v) \in L_2,$$

то $0 \in \sigma_C(T^*)$.

$\lhd$ Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы множество $E = \{x \in X : a(x) \geqslant \alpha\}$ содержало подмножество e, $0 < \mu e < \infty$, без атомов меры μ. Пусть $\varphi \in L_0$ и $\operatorname{supp} \varphi := \{x \in X : |\varphi(x)| \neq 0\}$. Обозначим через χ_e характеристическую функцию множества e. Для любого $f \in L_2$ и любого $h \in L_\infty$ с $\operatorname{supp} h \subseteq e$ имеем, обозначив через $\|\cdot\|_\infty$ норму в L_∞:

$$\begin{aligned}
&\left| \int \int K(x,y) f(y)\, d\mu(y) \overline{h(x)}\, d\mu(x) \right| = \left| \int \int K(x,y) f(y)\, d\mu(y) \chi_e(x) \overline{h(x)}\, d\mu(x) \right| \\
&\leqslant \int \left| \int \chi_e(x) K(x,y) f(y) d\mu(y) \right| |h(x)|\, d\mu(x) \leqslant \iint \chi_e(x) |K(x,y)| |f(y)|\, d\mu(y) |h(x)|\, d\mu(x) \\
&\leqslant \|h\|_\infty \int \int\limits_e |K(x,y)|\, d\mu(x) |f(y)|\, d\mu(y) = \|h\|_\infty \int \int\limits_e |K(y,x)|\, d\mu(x) |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha} \|h\|_\infty \int \int\limits_e |K(y,x)| a(x)\, d\mu(x) |f(y)|\, d\mu(y) \leqslant \frac{1}{\alpha} \|h\|_\infty \|\lambda_e\| \|f\|,
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\lambda_e(y) := \int\limits_e |K(y,x)| a(x)\, d\mu(x).$$

Из (3) вытекает, что для любого $f \in D_T$

$$|(Tf, h)| \leqslant \frac{1}{\alpha} \|h\|_\infty \|\lambda_e\| \|f\|,$$

поэтому $h \in D_{T^*}$.

Положим в (3) $h = \chi_e$. Тогда из (3) следует для любого $f \in L_2$

$$\int \left| \int \chi_e(x) K(x,y) f(y)\, d\mu(y) \right| d\mu(x) \leqslant \frac{1}{\alpha} \|\lambda_e\| \|f\|.$$

Таким образом, ядро $\chi_e(x) K(x,y)$ порождает действующий из L_2 в $L_1(e,\mu)$ ограниченный интегральный оператор τ с нормой, не превосходящей $\frac{1}{\alpha}\|\lambda_e\|$.

Пусть $\{e_m\}$ — последовательность множеств из e, удовлетворяющих условию $0 < \mu e_m \to 0$ при $m \to \infty$. Положим в (3) $h = \chi_{e_m}$ и обозначим через P_F оператор умножения на $\chi_F : P_F f = \chi_F f$, $f \in L_2$. Из (3) подобно предыдущему следует, что интегральный оператор $P_{e_m}\tau$ с ядром $\chi_{e_m}(x)K(x,y)$ действует из L_2 в $L_1(e,\mu)$, ограничен и его норма не превосходит $\frac{1}{\alpha}\|\lambda_{e_m}\|$, где

$$\lambda_{e_m}(y) := \int\limits_{e_m} |K(y,x)|a(x)\,d\mu(x).$$

Пусть $X_0 = \{y \in X : \lambda_e(y) < \infty)\}$. Тогда для любого $y \in X_0$ и любого m $\lambda^2_{e_m}(y) \leqslant \lambda^2_e(y)$ и для любого $y \in X_0$ $\lambda^2_{e_m}(y) \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, $\|\lambda_{e_m}\|^2 = \int \lambda^2_{e_m} d\mu \to 0$ при $m \to \infty$ и $\|P_{e_m}\tau\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|\lambda_{e_m}\| \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда из [5, теорема I.2.9] оператор $\tau : L_2 \to L_1(e,\mu)$ вполне непрерывен.

Пусть $D = \{f \in L_2 : f \in D_T,\ \|f\| \leqslant 1\}$. Множество $P_eTD = \tau D$ относительно компактно в $L_1(e,\mu)$. Возьмем равномерно ограниченную ортонормированную систему функций h_n с $\operatorname{supp} h_n \subseteq e$, $n = 1, 2, \ldots$ В качестве $\{h_n\}$ можно выбрать ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $r_{n,e}$ (их определение см., например, в [5, гл. I, § 1]). Имеем $\{h_n\} \subset D_{T^*}$ и в силу относительной компактности множества P_eTD в $L_1(e,\mu)$

$$\|T^*h_n\| = \sup_{\varphi\in D}|(T^*h_n,\varphi)| = \sup_{\varphi\in D}|(h_n,T\varphi)| = \sup_{\varphi\in D}|(\chi_e h_n,T\varphi)| = \sup_{\varphi\in D}|(h_n,\chi_e T\varphi)| \to 0$$

при $n \to \infty$, так как по лемме Римана — Лебега [3, с. 125] $|\int h_n\overline{f}\,d\mu| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $f \in L_1$, откуда

$$\sup_{f\in F}\left|\int h_n\overline{f}\,d\mu\right| \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty$$

для любого относительно компактного множества F в L_1 (и, в частности, для $F = P_eTD$) вследствие равномерной ограниченности $\{h_n\}$ и существования конечной ε-сети для F для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $0 \in \sigma_C(T^*)$. $\triangleright$

Следствие. *Пусть $T : D_T \subset L_2 \to L_2$ — неограниченный плотно определенный замыкаемый интегральный оператор с вещественным неотрицательным симметричным ядром. Если в D_T существует вещественная неотрицательная функция, положительная на множестве положительной меры, не содержащем атомов меры μ, то $0 \in \sigma_C(T^*)$.*

Замечание 1. Включение $0 \in \sigma_C(T^*)$ позволяет существенно улучшить свойства ядра интегрального оператора T с помощью перехода к унитарно эквивалентному интегральному оператору: в [5, теорема IV. 3.7] доказано, что если L_2 — сепарабельное пространство, то из $0 \in \sigma_C(T^*)$ следует, что можно построить унитарный оператор $U : L_2 \to L_2$ такой, что UTU^{-1} — интегральный оператор с ядром $M(x,y)$, удовлетворяющим условию Карлемана

$$\int |M(x,y)|^2 d\mu(y) < \infty$$

для μ-почти всех $x \in X$ и условию Ахиезера: существует положительная функция $b \in L_0$ такая, что $|M(x,y)| \leqslant b(x)b(y)$ для $(\mu\times\mu)$-почти всех $(x,y) \in X \times X$.

Замечание 2. Пусть L_2 — сепарабельное пространство. Тогда интегральное уравнение

$$\alpha z(x) - \lambda Tz(x) = f(x), \quad f(x) \in L_2,$$

где T — интегральный оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 1, может быть сведено явным линейным непрерывным обратимым преобразованием при $\alpha = 0$ к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода в L_2 с ядерным оператором, а при $\alpha \neq 0$ к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода в L_2 с квазивырожденным карлемановским ядром

$$N(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{g_n}(x)}{\sqrt{\mu g_n}} f_{n,\lambda}(y), \tag{4}$$

где $\{g_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{f_{n,\lambda}\} \subset L_2$.

Это утверждение непосредственно следует из построений статьи [6], так как в них использовалось лишь включение $0 \in \sigma_C(T^*)$. Заметим еще, что в [7] предложены два приближённых метода решения интегральных уравнений 2-го рода в L_2 с ядрами (4).

Литература

1. *Коротков В. Б.* О некоторых свойствах частично интегральных операторов // Докл. АН СССР.—1974.—Т. 217, № 4.—С. 752–754.
2. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы.—Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1977.—68 с.
3. *Halmos P. R., Sunder V. S.* Bounded Integral Operators on L^2 Spaces.—Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag, 1978.—134 p.
4. *Коротков В. Б.* Об одном классе линейных операторов в L_2 // Сиб. мат. журн.—2019.—Т. 60, № 1.—С. 118–122. DOI: 10.33048/smzh.2019.60.110.
5. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1983.—224 с.
6. *Коротков В. Б.* О частично компактных по мере неограниченных линейных операторах в L_2 // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, вып. 1.—С. 36–41. DOI: 10.23671/VNC.2016.1.5945.
7. *Коротков В. Б.* Интегральные уравнения третьего рода с неограниченными операторами // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 2.—С. 333–343. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.207.

Статья поступила 22 октября 2019 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
ведущий научный сотрудник лаборатории функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: vitalborkor@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 18–23

ON UNBOUNDED INTEGRAL OPERATORS WITH QUASISYMMETRIC KERNELS

Korotkov, V. B.[1]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: vitalborkor@gmail.com

Abstract. In 1935 von Neumann established that a limit spectrum of self-adjoint Carleman integral operator in L_2 contains 0. This result was generalized by the author on nonself-adjoint operators: the limit spectrum of the adjoint of Carleman integral operator contains 0. Say that a densely defined in L_2 linear operator A satisfies the generalized von Neumann condition if 0 belongs to the limit spectrum of adjoint operator A^*. Denote by B_0 the class of all linear operators in L_2 satisfying a generalized von Neumann condition. The author proved that each bounded integral operator, defined on L_2, belongs to B_0. Thus, the question arises: is an analogous assertion true for all unbounded densely defined in L_2 integral operators? In this note, we give a negative answer on this question and we establish a sufficient condition guaranteeing that a densely defined in L_2 unbounded integral operator with quasisymmetric lie in B_0.

Key words: closable operator, integral operator, kerner of integral operator, limit spectrum, linear integral equation of the first or second kind.

Mathematical Subject Classification (2010): 45P05, 47B34.

For citation: *Korotkov, V. B.* On Unbounded Integral Operators with Quasisymmetric Kernels, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 18–23 (in Russian). DOI: 10.46698/y3646-7660-8439-j.

References

1. *Korotkov, V. B.* On Some Properties of Partially Integral Operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1974, vol. 217, no. 4, pp. 752–754 (in Russian).
2. *Korotkov, V. B. Integral'nye operatory* [Integral Operators], Novosibirsk, Izd-vo Novosib. Gos. Un-ta, 1977, 68 p. (in Russian).
3. *Halmos, P. R. and Sunder, V. S. Bounded Integral Operators on L^2 Spaces*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1978, 134 p.
4. *Korotkov, V. B.* On One Class of Linear Operators in L_2, *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 1, pp. 89–92. DOI: 10.1134/S0037446619010105.
5. *Korotkov, V. B. Integral'nye operatory* [Integral Operators], Novosibirsk, Nauka, 1983, 224 p. (in Russian).
6. *Korotkov, V. B.* On Partially Measure Compact Unbounded Linear Operators in L_2, *Vladikavkaz. Math. J.*, 2016, vol. 18, no. 1, pp. 36–41 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2016.1.5945.
7. *Korotkov, V. B.* Integral Equations of the Third Kind with Unbounded Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 2, pp. 255–263. DOI: 10.1134/S0037446617020070.

Received October 22, 2019

Vitaly B. Korotkov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Leading Researcher of Laboratory
of Functional Analysis
E-mail: `vitalborkor@gmail.com`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 24–33

УДК 519.17
DOI 10.46698/n0833-6942-7469-t

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}^{\#}$

А. А. Махнев[1], **В. В. Биткина**[2], **А. К. Гутнова**[2]

[1] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
[2] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46

E-mail: makhnev@imm.uran.ru, bviktoriyav@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com

Аннотация. Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный локально регулярный 1-код, совершенный относительно последней окрестности, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3$, $c = c_2$, $p = p^3_{33}$ (Юришич и Видали). В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1, a)$. Если $c = a - 1 = q$, $p = q - 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{q^2 - 1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, $q > 6$. В работе изучены порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ $(q = 7)$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ — неразрешимая группа, действующая транзитивно на множестве вершин графа Γ, $K = O_7(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/K$. Тогда $\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K, $\bar{L} \cong L_2(7)$, A_5, A_6, $PSp_4(3)$ и для полного прообраза L группы $\bar{L}$ имеем $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$ и $|K| = 7^3$ в случае $\bar{L} \cong L_2(7)$, $|K| = 7^4$ в противном случае.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

Mathematical Subject Classification (2010): 05C25.

Образец цитирования: *Махнев А. А., Биткина В. В., Гутнова А. К.* Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 24–33. DOI: 10.46698/n0833-6942-7469-t.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathscr{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку,

#Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований и ГФЕН Китая, проект № 20-51-53013.

каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a, l) \in (P, \mathscr{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекаюших l (обозначение: $pG_\alpha(s, t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечений графа* Γ [1].

Граф называется *вершинно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется *e-кодом*, если минимальное расстояние между двумя вершинами из C не меньше $2e + 1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $|C| \leqslant p^d_{dd} + 2$. В случае равенства код называется *максимальным*. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $c_d \geqslant a_d p^d_{dd}$. В случае равенства код называется *локально регулярным*. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $|C| \leqslant k_d / \sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется *совершенным относительно последней окрестности* [2].

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по предложению 5 из [2] Γ имеет массив пересечений $\{a(p + 1), cp, a + 1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p + 1), (a + 1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3$, $c = c_2$, $p = p^3_{33}$. В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$.

В случае $c = a - 1 = q$, $p = q - 2$ по [2] граф Γ имеет массив пересечений $\{q^2 - 1, q^2 - 2q, q + 2; 1, q, (q + 1)(q - 2)\}$, $q > 6$, спектр $(q^2 - 1)^1$, $(2q - 1)^{q(q^2-1)/6}$, $-1^{(q+1)(q^2+q-2)/2}$, $-(q + 1)^{q(q-1)(q-2)/3}$ и $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(q - 1, 2q + 2)$. При $q = 7$ получим массив пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$. Этот граф имеет $v = 1 + 48 + 240 + 54 = 343 = 7^3$ вершин и спектр 48^1, 13^{56}, -1^{216}, -8^{70}. Ввиду границы Дельсарта максимальный порядок клики в Γ не больше 7, а максимальный порядок коклики в Γ не больше 49. Далее, граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(6, 8)$.

Теорема 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда*

$\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $p=7$, $\alpha_1(g)=49(l+1+3s)$, $\alpha_3(g)=49(2l+1)$, и $3l+2+3s\leqslant 7$;

(2) Ω является 1-кликой, $p=3$, $\alpha_1(g)=3(7l+16+21s)$, $\alpha_3(g)=42l+54$ и $9l+9s+15\leqslant 49$;

(3) Ω является 7-кокликой, любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3, $p=2$, $\alpha_1(g)=14l-18+42s$ и $\alpha_3(g)=28l-36$;

(4) Ω содержит ребро и либо Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ и $p\leqslant 11$, либо Ω — объединение двух изолированных 4-клик, $p=5$, $\alpha_1(g)=35s+20+105t$ и $\alpha_3(g)=5+70s$.

Следствие 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{48,35,9;1,7,40\}$, и неразрешимая группа $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Если $K=O_7(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G}=G/K$, то $\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K, $\bar{L}\cong L_2(7)$, A_5, A_6, $PSp_4(3)$ и для полного прообраза L группы $\bar{L}$ имеем $L_a=K_a\times O_{7'}(L_a)$ и $|K|=7^3$ в случае $\bar{L}\cong L_2(7)$, $|K|=7^4$ в противном случае.*

Для доказательства следствия полезна

Теорема 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(343,54,5,9)$ и спектром $54^1, 5^{216}, -9^{126}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\alpha_i(g)=pw_i$ для $i>0$ и $\Delta=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Δ — пустой граф, $p=7$ и $\alpha_1(g)=49(2s+1)$;

(2) Δ является n-кликой, либо $p=2$, $n=7$ и $\alpha_1(g)=28l$, либо $p=3$, $n=1,4,7$ и $\alpha_1(g)=5n+7+42l$;

(3) Δ является m-кокликой, $m>1$, $p=3$, $m\in\{4,7,\ldots,49\}$ и $\alpha_1(g)=5m+7+42l$;

(4) Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик, $p=3$ и порядок максимальной клики из Δ равен 1 или 4;

(5) $p\leqslant 7$.

2. Предварительные результаты

Сначала приведем один вспомогательный результат [3, теорема 2.3].

Лемма 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ) и вторым собственным значением r. Если g — автоморфизм Γ и $\Delta=\mathrm{Fix}(g)$, то $|\Delta|\leqslant v\cdot\max\{\lambda,\mu\}/(k-r)$.*

По лемме 1 для графа с параметрами $(343,54,7,9)$ получим $|\Delta|\leqslant 343\cdot 9/49=63$.

Лемма 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{48,35,9;1,7,40\}$. Тогда для чисел пересечений графа Γ верны равенства*

(1) $p^1_{11}=12$, $p^1_{12}=35$, $p^1_{22}=160$, $p^1_{23}=45$, $p^1_{33}=9$;

(2) $p^2_{11}=7$, $p^2_{12}=32$, $p^2_{13}=9$, $p^2_{22}=171$, $p^2_{23}=36$, $p^2_{33}=9$;

(3) $p^3_{12}=40$, $p^3_{13}=8$, $p^3_{22}=160$, $p^3_{23}=40$, $p^3_{33}=5$.

$\lhd$ Доказательство следует из [1, лемма 4.1.7]. $\rhd$

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\mathscr{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i\leqslant 1$

класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой* и *второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [4, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Лемма 3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 56, χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 216, *то* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/42 - 7/6$ *и* $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 9/2$. *Если* $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_1(g) - 56$ *и* $\chi_2(g) - 216$ *делятся на* p.

$\triangleleft$ Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 56 & 91/6 & -7/6 & -28/3 \\ 216 & -9/2 & -9/2 & 20 \\ 70 & -35/3 & 14/3 & -35/3 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + 13\alpha_1(g)/6 - \alpha_2(g)/6 - 4\alpha_3(g)/3)/49$. Подставляя $\alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/42 - 7/6$.

Аналогично $\chi_2(g) = (432\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g) - 9\alpha_2(g) + 40\alpha_3(g))/686$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 9/2$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 2]. $\triangleright$

3. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(343, 54, 5, 9)$

В леммах 4–6 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(343, 54, 5, 9)$ и спектром 54^1, 5^{216}, -9^{126}, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$ и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Ввиду границы Хофмана максимальный порядок клики K из Γ не больше $1 - k/\theta_d = 7$, максимальный порядок коклики C из Γ не больше $-v\theta_d/(k - \theta_d) = 49$. В случае $|K| = 7$ любая вершина из $\Gamma - K$ смежна с единственной вершиной из K, а в случае $|C| = 49$ любая вершина из $\Gamma - C$ смежна точно с девятью вершинами из C.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Δ — *пустой граф, то* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 49(2s+1)$;

(2) *если* Δ *является* n-*кликой, то* $p = 2$, $n = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 28l$;

(3) *если* Δ *является* m-*кокликой,* $m > 1$, *то* $p = 3$, $m \in \{4, 7, \dots, 49\}$ *и* $\alpha_1(g) = 5m + 7 + 42l$;

(4) *если* Δ *содержит ребро и является объединением изолированных клик, то* $p = 3$ *и порядок максимальной клики из* Δ *равен* 1 *или* 4.

$\lhd$ Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 216 & 20 & -9/2 \\ 126 & -21 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Пусть φ_2 — проекция мономиального представления G на подпространство размерности 126. Тогда $\varphi_2(g) = (36\alpha_0(g) - 6\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/98$. Подставляя $\alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\varphi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 49)/14$.

Пусть Δ — пустой граф. Так как $v = 7^3$, то $p = 7$. Далее, число $\varphi_2(g) = (-\alpha_1(g) + 49)/14$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 49(2s+1)$.

Пусть Δ является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 54 и 288, поэтому $p = 2$. В этом случае число $\varphi_2(g) = (54 - \alpha_1(g))/14$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 28l$. Далее, числа λ и μ нечетны, поэтому любая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна с вершиной из Δ, противоречие.

Если $n > 1$, то для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Delta$, $[a] - b^\perp$ и на $\Gamma - a^\perp$. Отсюда p делит $7 - n$, 48 и 288, поэтому $p = 2$. Далее, числа λ и μ нечетны, поэтому любая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна с вершиной из Δ и $n = 7$. Далее, число $\varphi_2(g) = 6 - \alpha_1(g)/14$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 28l$.

Пусть Δ является m-кокликой, $m > 1$. Для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b]$ и на $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp \cup \Delta)$. Отсюда p делит 9 и $244 - m$, поэтому $p = 3$, $m \in \{4, 7, \dots, 49\}$, $\varphi_2(g) = (5m - \alpha_1(g) + 49)/14$ и $\alpha_1(g) = 5m + 49 + 42l$. Если $m = 49$, то каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна с 9 вершинами из Δ и $\alpha_1(g) = 0$.

Пусть Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 9 и $7 - t$, где t — порядок максимальной клики из Δ, поэтому $t \in \{1, 4\}$. $\rhd$

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $[a]$ *не содержится в* Δ *для любой вершины* $a \in \Gamma$;

(2) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v', k', 5, 9)$;

(3) $p \leqslant 7$.

$\lhd$ Пусть $[a] \subset \Delta$ для некоторой вершины a. Тогда для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Delta$ орбита $u^{\langle g \rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кокликой.

Если $|\Delta| = 55$, то p делит 288, $\varphi_2(g) = (324 - \alpha_1(g))/14 = 324/14$, противоречие. Если же $b \in \Delta - a^\perp$, то $[b] \subset \Delta$, противоречие.

Допустим, что Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Σ с параметрами $(v', k', 5, 9)$. Тогда $4(k' - 9) + 16 = n^2$, поэтому $n = 2l$, $k' = l^2 + 5$, $l \leqslant 6$, Σ имеет неглавные собственные значения $l - 2$, $-2 - l$ и кратность $l - 2$ равна $(l+1)(l^2+5)(l^2+l+7)/18l$. Отсюда $l = 5$, $v' - k' - 1 = 80$ и Σ имеет параметры $(111, 30, 5, 9)$. Теперь число ребер между Σ и $\Gamma - \Sigma$ равно $111 \cdot 24$, противоречие с тем, что некоторая вершина из $\Gamma - \Sigma$ смежна по крайней мере с двумя вершинами из Σ.

Если $p \geqslant 11$, то Δ — сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 5, 9)$, противоречие. Значит, $p \leqslant 7$. $\rhd$

Из лемм 4–5 следует теорема 2.

4. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$

В леммах 6–7 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то $p = 7$, $\alpha_1(g) = 49(l + 1 + 3s)$ и $\alpha_3(g) = 49(2l + 1)$, $3l + 2 + 3s \leqslant 7$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то $n = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 3(7l+16+21s)$, $\alpha_3(g) = 42l+54$ и $9l + 9s + 15 \leqslant 49$;*

(3) *если Ω является m-кокликой, $m > 1$, то любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3 в Γ, $p = 2$, $m = 7$, $\alpha_1(g) = 14l - 18 + 42s$ и $\alpha_3(g) = 28l - 36$;*

(4) *если Ω содержит ребро, то либо Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, либо Ω — объединение двух изолированных 4-клик, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 35s + 20 + 105t$ и $\alpha_3(g) = 5 + 70s$.*

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф. Так как $v = 343$, то $p = 7$, число $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 63)/14$ сравнимо с 6 по модулю 7, поэтому $\alpha_3(g) = 63 + 14(7l + 6) = 49 + 98l$.

Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 49(l + 1))/21$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 49(l + 1) + 147s = 49(l + 1 + 3s)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 48 и 54, поэтому $p = 2, 3$. Имеем $p^1_{33} = 9$, $p^2_{33} = 9$ и $p^3_{33} = 5$, поэтому $p \neq 2$. Если $p = 3$, то число $\chi_2(g) = (9 + \alpha_3(g) - 63)/14$ делится на 3, $\alpha_3(g) = 42l + 54$.

Далее, число $\chi_1(g) = (7 + 2\alpha_1(g) - 6(7l + 9) - 49)/42 = (\alpha_1(g) - 21l - 48)/21$ сравнимо с 2 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 21l + 48 + 63s$.

Если $n > 1$, то p делит $14 - n$, 54 и 35, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является m-кокликой, $m > 1$. Если любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3, то из равенств $p^3_{13} = 8$, $p^3_{33} = 5$ следует, что $p = 2$ и $m \in \{3, 5, 7\}$. Так как любая вершина из $\Gamma - \Omega$ находится на расстоянии 3 от вершины из Ω, то $m = 7$. Далее, число $\chi_2(g) = (63 + \alpha_3(g) - 27)/14$ четно, поэтому $\alpha_3(g) = 28l - 36$. Аналогично число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 14l + 18)/21$ четно и $\alpha_1(g) = 14l - 18 + 42s$.

Если Ω содержит две вершины на расстоянии 2, то p делит 48 и 7, противоречие. Утверждение (3) доказано.

Пусть Ω содержит ребро и не содержит вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Тогда Ω является объединением l изолированных клик, и любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ. Так как $p^1_{12} = 35$ и $p^3_{12} = 40$, то $p = 5$ и порядки максимальных клик из Ω равны 4. Далее, $p^3_{33} = 5$, поэтому $l = 2$, число $\chi_2(g) = (72 + \alpha_3(g) - 63)/14$ сравнимо с 1 по модулю 5, поэтому $\alpha_3(g) = 5 + 70s$. Число $\chi_1(g) = (1 + \alpha_1(g) - 35s)/21$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 35s + 20 + 105t$. $\rhd$

Лемма 7. *Если Ω содержит вершины a, b на расстоянии 2 в Γ, то $p \leqslant 11$.*

$\lhd$ Пусть Ω содержит вершины a, b на расстоянии 2 в Γ и Ω_0 — содержащая a, b связная компонента графа Ω.

Если $p \geqslant 13$, то Ω_0 — вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 12, 7)$. Если Ω_0 — сильно регулярный граф, то $4(k' - 7) + 25 = n^2$. В этом случае $n = 2w + 1$ и $k' = w^2 + w + 1$. Неглавные собственные значения Ω_0 равны $w + 3$ и $2 - w$, причем кратность $w+3$ равна $(w-3)(w^2+w+1)(w^2+2w-1)/(7(2w+1))$. Далее, $(w-3, 2w+1)$ делит 7, $(w^2 + w + 1, 2w + 1) = (2w^2 + 2w + 2, 2w^2 + w) = (w + 2, 2w + 1)$ делит 3 и $(w^2 + 2w - 1, 2w + 1) = (2w^2 + 4w - 2, 2w^2 + w) = (3w - 2, 2w + 1)$ делит 7. Отсюда $2w + 1$ делит $49 \cdot 3$ и $2w + 1 = 7$, противоречие.

Если Ω — несвязный граф, то $k' \leqslant 8$, противоречие. Итак, Ω — связный граф диаметра, большего 2. В случае $k' \geqslant 25$ получим $|\Omega| \geqslant 1 + 25 + 25 \cdot 12/7 + 1$. Противоречие с тем, что по лемме 1 имеем $|\Omega| \leqslant 63$. В случае $k' \leqslant 17$ получим $b_1(\Omega) \leqslant 4$, $k' \geqslant 3b_1(\Omega)$ и диаметр Ω не больше 2, противоречие.

Если $k' = 18$, то p делит 30. Если $k' = 19$, то $p = 29$, $b_1(\Omega) = 6$, $k' \geqslant 3b_1(\Omega)$ и диаметр Ω не больше 2, противоречие.

Если $k' = 20$, то p делит 28. Если $k' = 21$, то p делит 27. Если $k' = 22$, то $p = 13$, $|\Omega_3(a)| \geqslant 15$ и $|\Omega| \geqslant 1 + 22 + 22 \cdot 9/7 + 15$, противоречие.

Если $k' = 23$, то p делит 25. Если $k' = 24$, то p делит 24. В любом случае имеем противоречие. $\rhd$

Из лемм 6–7 следует теорема 1.

5. Вершинно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$

До конца работы будем предполагать, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Для вершины $a \in \Gamma$ получим $|G : G_a| = 343$. Ввиду теорем 1–2 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$. Пусть $K = O_7(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/K$.

Лемма 8. *Пусть U — элементарная абелева подгруппа из G порядка 49, g_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ порождают различные подгруппы порядка 7 из U, $\Omega^i = \mathrm{Fix}(g_i)$ и $\Omega^0 = \mathrm{Fix}(U)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $a \in \Omega^0$, то $[a]$ и $\Gamma_3(a)$ содержатся в $\cup_i \Omega^i$, и на Γ нет U-орбит длины 49;*

(2) *Ω^0 — пустой граф.*

$\lhd$ Число $\chi_2(g_i) = (9|\Omega^i| + \alpha_3(g_i) - 63)/14$ сравнимо с 6 по модулю 7, поэтому $\alpha_3(g_i) = 98l_i + 49 - 9|\Omega^i|$. Далее, число $\chi_1(g_i) = (8|\Omega^i| + \alpha_1(g_i) - 49l_i - 49)/21$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g_i) = 49l_i + 49 - 8|\Omega^i| + 147s_i$. Если $\alpha_0(g_i) = 35$, то $\alpha_3(g_i) = 98l_i - 294$ и $\alpha_1(g_i) = 49l_i - 280 + 147s_i$.

Пусть $a \in \Omega^0$. Из действия U на $[a]$, на $\Gamma_2(a)$ и на $\Gamma_3(a)$ следует, что Ω^0 содержит не менее 6 вершин из $[a]$, не менее 2 вершин из $\Gamma_2(a)$ и не менее 5 вершин из $\Gamma_3(a)$.

Для $b \in [a] \cap \Omega^0$ следует, что $[a] \cap [b]$ содержи 5 или 12 вершин из Ω^0. Заметим, что $[a]$ и $\Gamma_3(a)$ содержатся в $\cup_i \Omega^i$. В противном случае $\Gamma_3(a)$ содержит U-орбиту длины 49. Противоречие с действием U на $[d] \cap \Gamma_3(a)$ для $d \in \Gamma_3(a) \cap \Omega^0$. Если $\Gamma_2(a)$ содержит U-орбиту Δ длины 49, $u \in \Delta$, то u смежна с 9 вершинами из $\Gamma_3(a)$. Вершина $d \in \Gamma_3(a) \cap [u]$ попадает в Ω^i для некоторого i и d смежна с 7 вершинами из Δ. Противоречие с тем, что число ребер между Δ и $\Gamma_3(a)$ равно $9 \cdot 49$, но не больше $54 \cdot 7$. Утверждение (1) доказано.

Если $|\Omega^0| \geqslant 28$, то ввиду леммы 1 имеем $|\Gamma - \Omega^0| \leqslant 8 \cdot 35 = 280$, противоречие. Значит, $|\Omega^0| \leqslant 21$. Далее, $_3 = 40$, поэтому вершина из $\Gamma_3(a) \cap \Omega^0$ смежна с 5 вершинами из $\Gamma_2(a) \cap \Omega^0$. Поэтому Ω^0 содержит точно 6 вершин из $[a]$, 9 вершин из $\Gamma_2(a)$ и 5 вершин из $\Gamma_3(a)$ для любой вершины $a \in \Omega^0$. Теперь число ребер между $\Gamma_3(a) \cap \Omega^0$ и $\Gamma_2(a) \cap \Omega^0$ равно 25, а число ребер между $\Gamma_2(a) \cap \Omega^0$ и $\Gamma_3(a) \cap \Omega^0$ равно 18, противоречие. Утверждение (2) доказано. $\rhd$

Ввиду леммы 8 группа G_a имеет циклическую силовскую 7-подгруппу.

Лемма 9. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если 7 делит порядок компоненты L группы $\bar{T}$, то L фиксирует вершину из Γ, $|K : K_a| = 7^3$, группа L изоморфна $L_2(7)$ и точно действует на K;*

(2) *если 7 не делит порядок компоненты M группы $\bar{T}$, то группа $M = M_a$ изоморфна A_5, A_6 или $PSp_4(3)$, M не централизует K и $|K : K_a|$ делит 7^3.*

$\lhd$ По таблице 1 из [6] группа L изоморфна $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, A_7, $L_2(49)$, $U_3(5)$, $L_3(4)$, A_8, A_9, A_{10}, J_2, $U_4(3)$,$PSp_5(7)$, $Sp_6(2)$ или $\Omega_8^+(2)$.

Так как $|L : L_a|$ делит 7^3, то группа L изоморфна $L_2(7)$ или A_7. Если $|L : L_a| = 7$, то $|K : K_a| = 7^2$, L_a централизует K и поточечно фиксирует a^K. Если K — неабелева группа, то коммутант K' содежится в K_a, противоречие. Теперь для подгруппы $U = [K, L_a]$ порядка 9 орбита a^U содержит 49 вершин, противоречие с леммой 8. Итак, $L = L_a$, $|K : K_a| = 7^3$ и L точно действует на K. Отсюда группа L изоморфна $L_2(7)$. Утверждение (1) доказано.

Если 7 не делит порядок компоненты M группы $\bar{T}$, то группа $M = M_a$ является $\{2, 3, 5\}$-группой. Поэтому M изоморфна A_5, A_6 или $PSp_4(3)$. Далее $|K : K_a|$ делит 7^3. Если M централизует K, то получим противоречие с тем, что M поточечно фиксирует a^K. $\rhd$

Лемма 10. *$\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K, $\bar{L} \cong L_2(7)$, A_5, A_6, $PSp_4(3)$ и для полного прообраза L группы $\bar{L}$ имеем $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$ и $|K| = 7^3$ в случае $\bar{L} \cong L_2(7)$, $|K| = 7^4$ в противном случае.*

$\lhd$ По лемме 9 любая компонента $\bar{L}$ группы $\bar{T}$ фиксирует вершину a. Если $|\bar{L}|$ не делится на 7, то по лемме 9 $\bar{L} \cong L_2(7)$, A_5, A_6, $PSp_4(3)$ и $\bar{L}$ не централизует K. Пусть L — полный прообраз компоненты $\bar{L}$. Тогда $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$.

Если $|\bar{L}|$ делится на 7, то по лемме 9 имеем $|K : K_a| = 7^3$, поэтому K — элементарная абелева подгруппа порядка 7^3, $\bar{L}$ изоморфна $L_2(7)$ и $|\bar{G} : \bar{L}|$ делит 2.

Допустим, что $|L_a|$ не делится на 7. Так как $GL_3(7)$ не имеет секций, изоморфных A_5, A_6 или $PSp_4(3)$, то $|K : (K)|$ делится на 7^4. Далее, группа G_a имеет циклическую силовскую 7-подгруппу, поэтому (K) фиксирует a, $(K) = 1$ и $|K| = 7^4$. $\rhd$

Следствие 1 доказано.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag.—1989. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. *Jurisic A., Vidali J.* Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr.—2012.—Vol. 65.—P. 29–47.
3. *Behbahani M., Lam C.* Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math.—2011.—Vol. 311.—P. 132–144. DOI: 10.1016/j.disc.2010.10.005.
4. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts, № 45). DOI: 10.1017/CBO9780511623677.
5. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.— 2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
6. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 30 марта 2020 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Биткина Виктория Васильевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: bviktoriyav@mail.ru

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: gutnovaalina@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7467-724X

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 24–33

AUTOMORPHISMS OF A DISTANCE REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$

Makhnev, A. A.[1], Bitkina, V. V.[2] and Gutnova, A. K.[2]

[1] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia
[2] North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, bviktoriyav@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com

Abstract. If a distance-regular graph Γ of diameter 3 contains a maximal locally regular 1-code perfect with respect to the last neighborhood, then Γ has an intersection array $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ or $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, where $a = a_3$, $c = c_2$, $p = p^3_{33}$ (Jurisic and Vidali). In the first case, Γ has an eigenvalue $\theta_2 = -1$ and Γ_3 is a pseudo-geometric graph for $GQ(p+1, a)$. If $c = a-1 = q$, $p = q-2$, then Γ has an intersection array $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, $q > 6$. The orders and subgraphs of fixed points of automorphisms of a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ ($q = 7$) are studied in the paper. Let $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ be an insoluble group acting transitively on the set of vertices of the graph Γ, $K = O_7(G)$, $\bar{T}$ be the socle of the group $\bar{G} = G/K$. Then $\bar{T}$ contains the only component $\bar{L}$, $\bar{L}$ that acts exactly on K, $\bar{L} \cong L_2(7), A_5, A_6, PSp_4(3)$ and for the full the inverse image of L of the group $\bar{L}$ we have $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$ and $|K| = 7^3$ in the case of $\bar{L} \cong L_2(7)$, $|K| = 7^4$ otherwise.

Keywords: strongly regular graph, distance-regular graph, automorphism of graph.

Mathematical Subject Classification (2000): 05C25.

For citation: *Makhnev, A. A., Bitkina, V. V. and Gutnova, A. K.* Automorphisms of a Distance Regular Graph with Intersection Array $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 24–33 (in Russian). DOI: 10.46698/n0833-6942-7469-t.

References

1. *Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1989. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. *Jurisic, A. and Vidali, J.* Extremal 1-Codes in Distance-Regular Graphs of Diameter 3, *Designs Codes and Cryptography*, 2012, vol. 65, pp. 29–47.
3. *Behbahani, M. and Lam, C.* Strongly Regular Graphs with Nontrivial Automorphisms, *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, pp. 132–144. DOI: 10.1016/j.disc.2010.10.005.
4. *Cameron, P. J. Permutation Groups, London Math. Soc. Student Texts, no.* 45, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999. DOI: 10.1017/CBO9780511623677.

5. *Gavrilyuk, A. L. and Makhnev, A. A.* On Automorphisms of Distance-Regular Graphs with Intersection Array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. DOI: 10.1134/S1064562410030282.
6. *Zavarnitsine, A. V.* Finite Simple Groups with Narrow Prime Spectrum, *Siberian Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

Received March 30, 2020

Alexander A. Makhnev
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,
Head of Departament of Algebra and Topology
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Viktoriya V. Bitkina
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics
E-mail: `bviktoriyav@mail.ru`

Alina K. Gutnova
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry
E-mail: `gutnovaalina@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-7467-724X

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 34–47

УДК 517.98
DOI 10.46698/k4355-6603-4655-y

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. А. Нурмагомедов[1]

[1] Дагестанский государственный аграрный университет,
Россия, 367032, Махачкала, пр. М. Гаджиева, 180
E-mail: `alimn@mail.ru`

Аннотация. В данной работе для произвольной непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции $f(x)$ в случае целых положительных α и β построены дискретные суммы Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ по системе многочленов $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, образующих ортонормированную систему на неравномерных сетках $\Omega_N=\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$, состоящих из конечного числа N точек отрезка $[-1,1]$ с весом типа Якоби. Исследуются аппроксимативные свойства построенных частных сумм $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ порядка $n\leqslant N-1$ в пространстве непрерывных функций $C[-1,1]$. А именно, получена двусторонняя поточечная оценка для функции Лебега $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ рассматриваемых дискретных сумм Фурье при $n=O\big(\delta_N^{-1/(\lambda+3)}\big)$, $\lambda=\max\{\alpha,\beta\}$, $\delta_N=\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta t_j$. Соответственно, исследован также вопрос сходимости $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ к $f(x)$. В частности, получена оценка отклонения частичной суммы $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ от $f(x)$ при $n=O\big(\delta_N^{-1/(\lambda+3)}\big)$, которая также зависит от n и положения точки $x\in[-1,1]$.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, вес, асимптотическая формула, суммы Фурье, функция Лебега.

Mathematical Subject Classification (2010): 42C10.

Образец цитирования: *Нурмагомедов А. А.* Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 34–47. DOI: 10.46698/k4355-6603-4655-y.

1. Введение

В различных прикладных и теоретических задачах, связанных с обработкой, сжатием и передачей дискретной информации, вопросы приближения функций, заданных на дискретных системах точек (сетках), часто решаются с помощью рядов Фурье по соответствующей системе ортонормированных на этих сетках многочленов. Как известно, решение этой же задачи сводится к оценке функции Лебега рассматриваемых сумм Фурье. И здесь следует отметить, что эти задачи были предметом исследования в работах многих авторов, среди которых мы укажем лишь те работы, которые посвящены изучению функции Лебега сумм Фурье — Якоби, сходимости рядов Фурье Якоби и их дискретных аналогов [1–16].

В первую очередь отметим, из рассуждений, содержащихся в [1, 9.3], легко следует, что на отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$, функция Лебега сумм Фурье — Якоби есть $O(\ln n)$.

Далее, Г. Рау установил [2], что в точках $x=-1$ и $x=1$ функция Лебега сумм Фурье — Якоби имеет порядок $n^{\beta+\frac{1}{2}}$ и $n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ соответственно. Для многочленов Лежандра Т. Гронуоллом было показано [3], что функция Лебега принимает наибольшее значение на концах отрезка ортогональности. Такое же утверждение справедливо и при целых, полуцелых и равных друг другу α и β. Далее, в работе [5] при $\alpha,\beta>-\frac{1}{2}$ получен точный порядок роста функции Лебега сумм Фурье — Якоби, что уточняет более раннюю оценку тех же авторов [4]:

$$L_n^{\alpha,\beta}(x)\leqslant c(\alpha,\beta)\left\{\ln(n+1)+\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1}+\frac{n^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right\},$$

$x\in[-1,1]$, $n=1,2,\ldots$

В работе [6] И. И. Шарапудиновым исследован вопрос о сходимости частных сумм Фурье — Чебышева $S_{n,N}(f)=S_{n,N}(f,x)$ порядка $n\leqslant N-1$ по многочленам Чебышева $\{\tau_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$, образующим ортонормированную систему с весом $\mu_N(x)=2/N$ на множестве $\Omega=\{-1+2j/(N-1)\}_{j=0}^{N-1}$ к функции $f\in C[-1,1]$. А именно, доказано, что при $n=O(N^{\frac{1}{2}})$ норма оператора $S_{n,N}=S_{n,N}(f)$ в $C[-1,1]$ имеет порядок $\| S_{n,N}\|=O(n^{\frac{1}{2}})$.

И по аналогии с этими работами мы также исследовали аппроксимативные свойства частных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках отрезка $[-1,1]$ (см. [7–10]).

Пусть α, β — целые неотрицательные числа, $\Omega=\{t_j\}_{j=0}^{N}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1]$, $-1=t_0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N=1$. Рассмотрим также еще одну сетку $\Omega_N=\{x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}\}$, состоящую из N точек x_j, где

$$x_j=\frac{t_j+t_{j+1}}{2},\quad j=0,1,\ldots,N-1.$$

Через

$$\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)=\hat{p}_k^{\alpha,\beta}(x;\Omega_N)\quad(k=0,1,\ldots,N-1)\tag{1.1}$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке Ω_N в следующем смысле $(0\leqslant n,m\leqslant N-1)$:

$$\left(\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta},\hat{p}_{m,N}^{\alpha,\beta}\right)=\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_{m,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j=\delta_{nm},\tag{1.2}$$

где $\Delta t_j=t_{j+1}-t_j, j=0,1,\ldots,N-1$.

Далее, пусть

$$\delta_N=\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta t_j,\tag{1.3}$$

$æ_2$ — наименьшая константа в неравенстве типа В. А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1,1]$ (см. [17, 18]):

$$\int_{-1}^{1}|q_n''(x)|\,dx\leqslant æ_2n^4\int_{-1}^{1}|q_n(x)|\,dx,$$

$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ — ортонормированный многочлен Якоби, $C[-1,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\|=\|f\|_{C[-1,1]}=\max_{-1\leqslant x\leqslant1}|f(x)|$,

$\mathscr{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени не выше n, $E_n(f) = \min_{l_n\in\mathscr{P}_n}\|f-l_n\|_{C[-1,1]}$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n.

Здесь и далее через c, $c(a,b)$, $c(\alpha,\beta,a,b)$ обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров и, вообще говоря, разные в разных местах.

Через $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ обозначим частную сумму n-го порядка ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, т. е.

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = \sum_{k=0}^{n}\hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta}\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x),$$

где $\hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta f(x_j)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j$.

Как известно, задача об оценке отклонения частной суммы $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ ряда Фурье функции $f\in C[-1,1]$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции f при $x\in[-1,\,1]$ посредством неравенства Лебега

$$\left|f(x)-S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)\right| \leqslant (1+L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x))E_n(f) \tag{1.4}$$

сводится к оценке функции Лебега

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j, \tag{1.5}$$

где

$$K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j) = \sum_{k=0}^{n}\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j). \tag{1.6}$$

Отметим, что полученные нами в данной работе оценки функции (1.5) и разности $|f(x)-S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)|$ также учитывают величину номера n и положение точки $x\in[-1,1]$.

2. Вспомогательные утверждения

Здесь мы, в первую очередь, приведем ранее полученные нами результаты [11], которые необходимы для дальнейшего исследования.

Теорема 2.1. *Пусть α, β — целые неотрицательные числа, $0<b<1$, $0<a\leqslant\left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac14}$ и $1\leqslant n\leqslant a\delta_N^{-\frac12}$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x), \tag{2.1}$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ которой справедлива оценка

$$\left|v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac52}\left[\sqrt{1-x}+\frac1n\right]^{-\alpha-\frac12}\left[\sqrt{1+x}+\frac1n\right]^{-\beta-\frac12}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. *Пусть α, β — целые неотрицательные числа, $0<b<1$, $0<a\leqslant\left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac14}$, $1\leqslant n\leqslant a\delta_N^{-\frac12}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. Тогда существует постоянная $c(\alpha,\beta,a,b)>0$ такая, что*

$$\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left(\delta_N n^{\frac52}+1\right)\left[\sqrt{1-x}+\frac1n\right]^{-\alpha-\frac12}\left[\sqrt{1+x}+\frac1n\right]^{-\beta-\frac12}. \tag{2.3}$$

Далее, в качестве следствий выше приведенных теорем отметим следующие утверждения.

Следствие 2.1. *Пусть* α, β — *целые неотрицательные числа,* $0 < b < 1$, $0 < a \leqslant \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac{1}{4}}$ *и* $n = O\left(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\right)$, $\lambda = \max\{\alpha, \beta\}$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x), \tag{2.4}$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ *которой справедлива оценка*

$$\left|v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| = O(1). \tag{2.5}$$

Следствие 2.2. *Пусть* α, β — *целые неотрицательные числа,* $0 < b < 1$, $0 < a \leqslant \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac{1}{4}}$ *и* $n = O\left(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\right)$, $\lambda = \max\{\alpha, \beta\}$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{\beta+\frac{1}{2}}, \quad -1 \leqslant x \leqslant -1 + cn^{-2}, \tag{2.6}$$

$$\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{\alpha+\frac{1}{2}}, \quad 1 - cn^{-2} \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.7}$$

$$\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 - cn^{-2}, \tag{2.8}$$

$$\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}, \quad -1 + cn^{-2} \leqslant x \leqslant 0. \tag{2.9}$$

Пользуясь аналогичными рассуждениями [11, п. 2, лемма 2.2], нетрудно показать, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть* $\alpha, \beta > -1$, $\delta_N \leqslant cn^{-2}$, $t_p = \min\{-1 + cn^{-2} \leqslant t_j \leqslant 1 - cn^{-2}\}$, $t_{q+1} = \max\{-1 + cn^{-2} \leqslant t_j \leqslant 1 - cn^{-2}\}$, $x_1^* = (t_p + t_{p+1})/2$, $x_2^* = (t_q + t_{q+1})/2$. *Тогда для ортонормированного многочлена Якоби* $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ *имеет место формула*

$$\sum_{x_1^* \leqslant x_j \leqslant x_2^*} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left(\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j)\right)^2 \Delta t_j = 1 - r_{n,N},$$

в которой

$$|r_{n,N}| \leqslant c(\alpha,\beta)\left[\delta_N^2 n^3 + n^{-1} + \left(\delta_N + n^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Далее, приведем без доказательства следующее утверждение [12, § 2, лемма 1].

Лемма 2.2. *Пусть функция* $f(t)$ *непрерывна и неотрицательна на промежутке* $[a_1, b_1]$ *и* $\{t_j\}_{j=0}^m$ — *сетка такая, что* $a_1 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m < b_1$. *Пусть* $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ *и* $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. *Тогда, если*

1) $f(t)$ *монотонно возрастает на* $[a_2, b_2]$, *то*

$$\sum_{a_2 \leqslant t_j \leqslant b_2} f(t_j)\Delta t_j \leqslant \int_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx + f(b_2)\Delta^*, \tag{2.10}$$

2) $f(t)$ *монотонно убывает на* $[a_2, b_2]$, *то*

$$\sum_{a_2 \leqslant t_j \leqslant b_2} f(t_j)\Delta t_j \leqslant \int_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx + f(a_2)\Delta^*, \tag{2.11}$$

где $\Delta^* = \max_j \Delta t_j$.

3. Некоторые свойства многочленов Якоби

Мы здесь приведем некоторые сведения о многочленах Якоби [1, 13]. Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ с помощью формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{k(x)}\frac{d^n}{dx^n}\bigl\{k(x)\sigma^n(x)\bigr\},$$

где α, β — произвольные действительные числа, $\sigma(x) = 1 - x^2$, $k(x) = k(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Если $\alpha, \beta > -1$, то многочлены Якоби образуют ортогональную систему с весом $k(x)$, т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1} k(x)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\,dx = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где $h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$, и, следовательно, $h_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$

Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Якоби:

1) весовая оценка $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

$$\sqrt{n}\bigl|P_n^{\alpha,\beta}(x)\bigr| \leqslant c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}; \tag{3.1}$$

в частности,

$$\sqrt{n}\bigl|P_n^{\alpha,\beta}(x)\bigr| \leqslant c(\alpha,\beta)\,(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \quad \bigl(0 \leqslant x \leqslant 1-n^{-2}\bigr); \tag{3.2}$$

$$\sqrt{n}\bigl|P_n^{\alpha,\beta}(x)\bigr| \leqslant c(\alpha,\beta)n^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad \bigl(1-n^{-2} \leqslant x \leqslant 1\bigr); \tag{3.3}$$

$$\sqrt{n}\bigl|P_n^{\alpha,\beta}(x)\bigr| \leqslant c(\alpha,\beta)\,(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \quad \bigl(-1+n^{-2} \leqslant x \leqslant 0\bigr); \tag{3.4}$$

$$\sqrt{n}\bigl|P_n^{\alpha,\beta}(x)\bigr| \leqslant c(\alpha,\beta)n^{\beta+\frac{1}{2}} \quad \bigl(-1 \leqslant x \leqslant -1+n^{-2}\bigr); \tag{3.5}$$

2) равенство

$$P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{n+\alpha+1}{n+1}P_n^{\alpha,\beta}(x) - \frac{2n+\alpha+\beta+2}{2(n+1)}(1-x)P_n^{\alpha+1,\beta}(x). \tag{3.6}$$

4. Сходимость сумм Фурье по многочленам $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in C[-1,1]$, α, β — целые положительные числа, $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}$, $n = O\bigl(\delta_N^{-1/(\lambda+3)}\bigr)$, $0 < b < 1$, $0 < a \leqslant \bigl\{\frac{1-b}{2æ_2}\bigr\}^{\frac{1}{4}}$. Тогда справедливо неравенство $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$*

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1) + \left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| + \left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right].$$

$\lhd$ Чтобы оценить функцию $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, мы рассмотрим два случая [13, 14]:

1) $0 \leqslant x \leqslant 1 - 4n^{-2}$;

2) $1 - 4n^{-2} \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1 - 4n^{-2}$. Сумму в правой части равенства (1.5) представим по следующей схеме:

$$
\begin{aligned}
L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant \sum_{-1<x_j\leqslant -\frac{1}{2}} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j \\
+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j \\
+ \sum_{\tau_1\leqslant x_j\leqslant \tau_2} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j \\
+ \sum_{\tau_2\leqslant x_j< 1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4, \quad (4.1)
\end{aligned}
$$

где $\tau_1 = x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$, $\tau_2 = x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$.

В первую очередь покажем, если $k_{n,N}^{\alpha,\beta}$ — старший коэффициент многочлена $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, то множитель $\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}}$ в формуле Кристоффеля — Дарбу ($n \leqslant N-2$)

$$
\sum_{k=0}^{n} \hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j) = \frac{k_{n,N}}{k_{n+1,N}} \frac{\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j) - \hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j} \quad (4.2)
$$

есть величина ограниченная.

В действительности, с одной стороны, в силу [11, лемма 3.4] мы находим

$$
\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}} \geqslant \frac{1}{4(1+c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^3)}.
$$

А с другой стороны, посредством аналогичных рассуждений, содержащихся в [15, § 3, 1.3.6], имеем

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\, x_j \hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j \\
= \frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}} \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left(\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right)^2\Delta t_j \\
+ \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{q}_{n,N}(x_j)\Delta t_j,
\end{aligned}
$$

где $\hat{q}_{n,N}(x_j)$ — многочлен степени не выше n. В силу (1.2) вторая сумма в последнем равенстве равна нулю. После, применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}} \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|\hat{p}_{n+1,N}(x_j)\right|\left|x_j\hat{p}_{n,N}(x_j)\right|\Delta t_j \\
\leqslant \max\{|x_0|,|x_{N-1}|\}\left(\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left(\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right)^2\Delta t_j\right)^{\frac{1}{2}} \\
\times\left(\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left(\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right)^2\Delta t_j\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы показали, что

$$\frac{1}{4(1+c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^3)} \leqslant \frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}} \leqslant 1. \tag{4.3}$$

Оценим σ_1. В силу (4.2), (4.3), (2.6), (2.9) и (2.10) находим

$$\begin{gathered}
\sigma_1 = \sum_{-1<x_j\leqslant -1+4n^{-2}} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right| \Delta t_j \\
+ \sum_{-1+4n^{-2}<x_j\leqslant -\frac{1}{2}} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right| \Delta t_j \\
\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left(\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| + \left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right) \\
\times\left[n^{-\beta+\frac{1}{2}} \sum_{-1<x_j\leqslant -1+4n^{-2}} \Delta t_j + \sum_{-1+4n^{-2}<x_j\leqslant -\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}\Delta t_j\right] \\
\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left(\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| + \left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right)\left[n^{-\beta-\frac{3}{2}} + \int\limits_{-1+4n^{-2}}^{-\frac{1}{2}} (1+\xi)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} d\xi + 2^{-\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\delta_N\right] \\
\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left(\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| + \left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right).
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Теперь оценим σ_2. В силу (2.1), (4.2) и (4.3) получаем

$$\begin{gathered}
\sigma_2 \leqslant \Bigg\{ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| \frac{\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j) - \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right| \Delta t_j \\
+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| \frac{\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right| \Delta t_j \\
+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| \frac{\widehat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(x_j)\upsilon_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)}{x-x_j}\right| \Delta t_j \\
+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| \frac{\upsilon_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right| \Delta t_j \\
+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| \frac{\widehat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(x)\upsilon_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right| \Delta t_j \\
+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| \frac{\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x_j)\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)}{x-x_j}\right| \Delta t_j \\
+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| \frac{\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\upsilon_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right| \Delta t_j \Bigg\} \\
= \sigma_{21}+\sigma_{22}+\sigma_{23}+\sigma_{24}+\sigma_{25}+\sigma_{26}+\sigma_{27}.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Займемся σ_{21}. Пользуясь тождеством (3.6)

$$\begin{aligned}&P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(x_j)-P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x_j)\\&=\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2n+2}\right)\left[(1-x_j)P_n^{\alpha+1,\beta}(x_j)P_n^{\alpha,\beta}(x)-(1-x)P_n^{\alpha+1,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(x_j)\right],\end{aligned}$$

имея в виду, что

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)=\{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-\frac12}P_n^{\alpha,\beta}(x),$$

и в силу (2.8), (2.9) находим

$$\begin{aligned}\sigma_{21}&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2n+2}\right)\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\\&\times\left|\frac{(1-x_j)\widehat{P}_n^{\alpha+1,\beta}(x_j)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)-(1-x)\widehat{P}_n^{\alpha+1,\beta}(x)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right|\Delta t_j\\&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left|\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}}{x-x_j}\Delta t_j\\&+c(\alpha,\beta,a,b)\left|(1-x)\widehat{P}_n^{\alpha+1,\beta}(x)\right|\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}}{x-x_j}\Delta t_j=\sigma_{21}^{(1)}+\sigma_{21}^{(2)}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Далее, учитывая известное неравенство

$$|\mu+\nu|^\gamma\leqslant c(\gamma)\left[|\mu|^\gamma+|\nu|^\gamma\right],\quad \gamma>0,\tag{4.7}$$

и (2.10), (2.11), получаем $\left(n=O\left(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\right)\right)$:

$$(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}\leqslant c(\alpha)\left[(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}+(x-x_j)^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}\right],$$

$$\begin{aligned}\sigma_{21}^{(1)}&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{\Delta t_j}{x-x_j}+\left|\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}(x-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac34}\Delta t_j\right]\\&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\int_{-\frac12}^{\tau_1}\frac{d\zeta}{x-\zeta}+\delta_Nn^2+\left|\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\left(\int_{-\frac12}^{\tau_1}(x-\xi)^{\frac{\alpha}{2}-\frac34}d\xi+\delta_Nn^{\alpha+\frac52}\right)\right]\\&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\right].\end{aligned}$$

Отсюда, в силу следствия 2.1, имеем

$$\sigma_{21}^{(1)}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right].\tag{4.8}$$

Далее, находим

$$\sigma_{21}^{(2)}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_Nn^2(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_Nn^{\alpha+\frac52}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{-\frac12}.$$

Отсюда и из (4.6), (4.8) находим

$$\sigma_{21} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right]. \tag{4.9}$$

В силу (2.2), (2.10), (2.11), (3.2) и (4.7) при $n=O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\Big)$ получаем

$$\begin{gathered}\sigma_{22} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac{5}{2}}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{x-x_j}\Delta t_j \\ \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac{5}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{\Delta t_j}{x-x_j}+(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\tau_1}(x-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}\Delta t_j\right] \\ \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac{5}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\tau_1}\frac{d\zeta}{x-\zeta}+\delta_N n^2\right)\right. \\ \left.+(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\tau_1}(x-\xi)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}d\xi+\delta_N n^{\alpha+\frac{5}{2}}\right)\right] \\ \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac{5}{2}}\left[n\ln(n+1)+n^{\alpha+\frac{1}{2}}\right]\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\alpha+3}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b),\end{gathered} \tag{4.10}$$

$$\sigma_{2i} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b) \quad (i=3,5,6). \tag{4.11}$$

Кроме того, посредством аналогичных рассуждений также устанавливаем, что

$$\begin{gathered}\sigma_{24} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^5(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{x-x_j}\Delta t_j\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^5 \\ \times\left[n\ln(n+1)+n^{\alpha+\frac{1}{2}}\right]\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^{\alpha+\frac{11}{2}}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{-\alpha-\frac{1}{2}}.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Такую же оценку допускает и σ_{27}. Отсюда и из (4.5), (4.9)–(4.12) получаем

$$\sigma_2 \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right]. \tag{4.13}$$

Точно также получим и оценку

$$\sigma_4 \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right]. \tag{4.14}$$

Перейдем к оценке σ_3. В силу (1.6), (2.8) мы имеем

$$\begin{gathered}\sigma_3=\sum_{\tau_1\leqslant x_j\leqslant\tau_2}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j \\ \leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\sum_{\tau_1\leqslant x_j\leqslant\tau_2}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right|\Delta t_j \\ \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\sum_{k=0}^{n}\left|\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\sum_{\tau_1\leqslant x_j\leqslant\tau_2}(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\Delta t_j \\ \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\sum_{k=0}^{n}\left|\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|(1-\tau_1)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(\tau_2-\tau_1)<c(\alpha,\beta,a,b).\end{gathered} \tag{4.15}$$

Собираем оценки (4.4), (4.13), (4.14), (4.15) и, сопоставляя их с (4.1), находим

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|+\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right], \tag{4.16}$$

где $0 \leqslant x \leqslant 1-4n^{-2}$, $n = O\left(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\right)$.

Перейдем к случаю, когда $1-4n^{-2} \leqslant x \leqslant 1$. Чтобы оценить $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ при $1-4n^{-2} \leqslant x \leqslant 1$, разобьем сумму в правой части равенства (1.5) по следующей схеме:

$$\begin{aligned} L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = & \sum_{-1<x_j\leqslant -\frac{1}{2}} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j \\ & + \sum_{-\frac{1}{2}<x_j\leqslant 1-n^{-2}} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j \\ & + \sum_{1-n^{-2}<x_j<1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j = \omega_1+\omega_2+\omega_3. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения для оценки сумм σ_1, σ_2 и σ_3, можно показать, что при $n = O\left(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\right)$

$$\omega_1 \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|+\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right], \tag{4.18}$$

$$\omega_2 \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right]. \tag{4.19}$$

Что касается ω_3, то воспользовавшись оценкой (2.7), имеем

$$\begin{aligned} \omega_3 = & \sum_{1-n^{-2}<x_j<1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|\sum_{k=0}^{n}\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right|\Delta t_j \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{-2\alpha} \\ & \times \sum_{1-n^{-2}<x_j<1}\left|\sum_{k=0}^{n}k^{2\alpha+1}\right|\Delta t_j \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^2\sum_{1-n^{-2}<x_j<1}\Delta t_j \leqslant c(\alpha,\beta,a,b). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Из (4.17)–(4.20) получаем

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|+\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right], \quad 1-4n^{-2} \leqslant x \leqslant 1.$$

Отсюда и из (4.16) находим

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|+\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4.21}$$

Далее, посредством аналогичных рассуждений, эту же оценку можно получить и для случая, когда $-1 \leqslant x \leqslant 0$. После, обозначив через $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}$, убеждаемся в справедливости теоремы 4.1. $\rhd$

Теперь остается рассмотреть вопрос о точности полученной оценки для $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$. Для этого воспользуемся аналогичными рассуждениями [16].

Очевидно, что

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \geqslant S_{n,N}^{\alpha,\beta}(1;x) = 1. \tag{4.22}$$

Далее, положив $n+2 \leqslant N-1$, рассмотрим частную сумму $(n+2)$-го порядка ортонормированного многочлена Якоби $\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2}(x)$ по системе (1.1). При этом

$$\begin{aligned}
S^{\alpha,\beta}_{n-1,N}(\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2};x) &= S^{\alpha,\beta}_{n+2,N}(\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2};x)\\
&\quad - \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2}(x_j)\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n+2,N}(x_j)\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n+2,N}(x)\Delta t_j\\
&\quad - \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2}(x_j)\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n+1,N}(x_j)\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n+1,N}(x)\Delta t_j\\
&\quad - \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2}(x_j)\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n,N}(x_j)\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n,N}(x)\Delta t_j.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Затем, в силу неравенства Коши — Буняковского и леммы 2.1 ($i=n,n+1,n+2$) получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2}(x_j)\hat{p}^{\alpha,\beta}_{i,N}(x_j)\Delta t_j\\
&\qquad \leqslant \left(\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left(\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2}(x_j)\right)^2\Delta t_j\right)^{\frac12}\\
&\qquad\qquad \times\left(\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \hat{p}^{2}_{i,N}(x_j)\Delta t_j\right)^{\frac12} \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Далее, поскольку $S^{\alpha,\beta}_{n+2,N}(\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2};x) = \widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2}(x)$, то из (4.23) получаем

$$L^{\alpha,\beta}_{n,N}(x) \geqslant \left|S^{\alpha,\beta}_{n-1,N}(\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2};x)\right| \geqslant \left|\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+2}(x)\right| - \left|\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n+2,N}(x)\right| - \left|\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n+1,N}(x)\right| - \left|\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n,N}(x)\right|. \tag{4.24}$$

Кроме того, в частности, можно показать, что

$$\begin{aligned}
\sigma_{21} &= c(\alpha,\beta)\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2n+2}\right)\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant \tau_1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\\
&\quad\times\left|\frac{(1-x_j)\widehat{P}^{\alpha+1,\beta}_n(x_j)\widehat{P}^{\alpha,\beta}_n(x) - (1-x)\widehat{P}^{\alpha+1,\beta}_n(x)\widehat{P}^{\alpha,\beta}_n(x_j)}{x-x_j}\right|\Delta t_j\\
&\geqslant c(\alpha,\beta)\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant \tau_1}\frac{\Delta t_j}{x-x_j} = c(\alpha,\beta)\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant y_1}\frac{\Delta t_j}{x-x_{j+1}}\,\frac{x-x_{j+1}}{x-x_j}\\
&\geqslant c(\alpha,\beta)\left(1-\frac{\delta_N}{2}\right)\left[\,\ln(n+1)-\ln 2\right].
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Сопоставляя (4.22)–(4.25) и воспользовавшись следствием 2.1, подберем такую константу $c>0$, что при всех $x\in[-1,1]$

$$L^{\alpha,\beta}_{n,N}(x) \geqslant c\left[\ln(n+1) + \left|\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n,N}(x)\right| + \left|\hat{p}^{\alpha,\beta}_{n+1,N}(x)\right|\right],$$

из которого и следует неулучшаемость по порядку полученной оценки сверху для константы Лебега. $\rhd$

Кроме того отметим, что при условии $n = O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\Big)$ для $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, допустима оценка

$$|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1}.$$

Очевидно, что такая оценка справедлива и для $\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)$. Следовательно, для $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеет место оценка

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1}\right]$$
$$\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1}+\frac{n^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right].$$

Проводя аналогичные рассуждения и для $-1 \leqslant x \leqslant 0$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2. *Пусть $f \in C[-1,1]$, α, β — целые положительные числа, $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}$, $n = O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\Big)$, $0<b<1$, $0<a\leqslant\left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac{1}{4}}$. Тогда справедливо неравенство $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$*

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1}+\frac{n^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right].$$

Далее, из (1.4) и теоремы 4.2 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть $f \in C[-1,1]$, α, β — целые положительные числа, $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}$, $n = O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\Big)$, $0<b<1$, $0<a\leqslant\{(1-b)/(2æ_2)\}^{\frac{1}{4}}$. Тогда равномерно относительно $-1 \leqslant x \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\big|f(x)-S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)\big| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)E_n(f)$$
$$\times\left[\ln(n+1)+\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1}+\frac{n^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right].$$

Литература

1. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.
2. *Rau H.* Uber die Lebesgueschen Konstanten der Reihentwicklungen nach Jacobischen Polynomen // Journ. fur Math.—1929.—№ 161.—С. 237–254.
3. *Gronwall T.* Uber die Laplacische Reihe // Math. Ann.—1913.—№ 74.—С. 213–270.
4. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Приближение функций суммами Фурье — Якоби // Докл. АН СССР.—1966.—Т. 166, № 1.—С. 9–10.
5. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функция Лебега сумм Фурье — Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та.—1968.—Т. 1.—С. 11–23.
6. *Шарапудинов И. И.* О сходимости метода наименьших квадратов // Мат. заметки.—1993.—Т. 53, № 3.—С. 131–143.
7. *Нурмагомедов А. А.* Многочлены, ортогональные на неравномерных сетках // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2011.—Т. 11, вып. 3, ч. 2.—С. 29–42. DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-3-2-29-42.
8. *Нурмагомедов А. А.* Сходимость сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках // Изв. вузов. Математика.—2012.—№ 7.—С. 60–62.

9. *Нурмагомедов А. А., Расулов Н. К.* Двусторонняя оценка функции Лебега сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.—2018.—Т. 5, № 63, вып. 3.—С. 417–431. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2018.306.
10. *Нурмагомедов А. А., Нурмагомедов И. А.* О сходимости дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы.—Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва.—2019.—Т. 57.—С. 254–257.
11. *Нурмагомедов А. А.* Асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных на произвольных сетках в случае целых α и β // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2010.—Т. 10, № 2.—С. 10–19. DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-2-10-19.
12. *Коркмасов Ф. М.* Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье — Якоби // Сиб. мат. журн.—2004.—Т. 45, № 2.—С. 334–355.
13. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.—Махачкала: ДНЦ РАН, 2004.—276 с.
14. *Шарапудинов И. И.* Об ограниченности в $C[-1,1]$ средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье — Чебышева // Мат. сб.—1996.—Т. 187, № 1.—С. 143–160. DOI: 10.4213/sm105.
15. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов.—М.: Изд. иностр. лит., 1963.—369 с.
16. *Бадков В. М.* Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах.—Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987.—С. 31–45.
17. *Даугавет И. К., Рафальсон С. З.* О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестн. Ленингр. ун-та.—1974.—№ 19.—С. 18–24.
18. *Симонов И. Е.* Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах L_p, L_1 на отрезке // Тр. ин-та. матем. и механ. УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 3.—С. 282–290.

Статья поступила 23 декабря 2019 г.

Нурмагомедов Алим Алаутдинович
Дагестанский государственный аграрный университет,
доцент кафедры информатики и цифровых технологий
РОССИЯ, 367032, Махачкала, пр. М. Гаджиева, 180
E-mail: alimn@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 34–47

APPROXIMATION PROPERTIES OF DISCRETE FOURIER SUMS IN POLYNOMIALS ORTHOGONAL ON NON-UNIFORM GRIDS

Nurmagomedov, A. A.[1]

[1] Dagestan State Agrarian University,
180 M. Gadzhiev St., Makhachkala 367032, Russian,
E-mail: alimn@mail.ru

Abstract. Given two positive integers α and β, for arbitrary continuous function $f(x)$ on the segment $[-1,1]$ we construct disrete Fourier sums $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ on system polynomials $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ forming an orthonormals system on any finite non-uniform set $\Omega_N=\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ of N points from segment $[-1,1]$ with Jacobi type weight. The approximation properties of the corresponding partial sums $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ of order $n\leqslant N-1$ in the space of continuous functions $C[-1,1]$ are investigated. Namely, for a Lebesgue function in $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, a two-sided pointwise estimate of discrete Fourier sums with $n=O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\Big)$, $\lambda=\max\{\alpha,\beta\}$, $\delta_N=\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta t_j$ is obtained. The problem of convergence of $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ to $f(x)$ is also investigated. In particular, an estimate is obtained of the deviation of the partial sum $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ from $f(x)$ for $n=O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\Big)$, depending on n and the position of a point x in $[-1,1]$.

Key words: polynomial, orthogonal system, net, weight, asymptotic formula, Fourier sum, Lebesgue function.

Mathematical Subject Classification (2010): 42C10.

For citation: *Nurmagomedov, A. A.* Approximation Properties of Discrete Fourier Sums in Polynomials Orthogonal on Non-Uniform Grids, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 34–47 (in Russian). DOI: 10.46698/k4355-6603-4655-y.

References

1. *Szego, G. Orthogonal Polynomials*, New York, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1939, 440 p.
2. *Rau, H.* Uber die Lebesgueschen Konstanten der Reihentwicklungen Nach Jacobischen Polynomen, *Journ. fur Math.*, 1929, no. 161, pp. 237–254.
3. *Gronwall, T.* Uber die Laplacische Reihe, *Mathematische Annalen*, 1913, vol. 74, no. 2, pp. 213–270. DOI: 10.1007/BF01456041.
4. *Agakhanov, S. A. and Natanson, G. I.* Approximation of Functions by Fourier–Jacobi Sums, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1966, no. 166, pp. 9–10 (in Russian).
5. *Agakhanov, S. A. and Natanson, G. I.* The Lebesgue Function for Fourier–Jacobi Sums, *Vestn. Leningr. Univ.*, 1968, no. 1, pp. 11–13 (in Russian).
6. *Sharapudinov, I. I.* Convergence of the Method Of Least Squares, *Math. Notes*, 1993, vol. 53, pp. 335–344. DOI: 10.1007/BF01207722.
7. *Nurmagomedov, A. A.* Polynomials, Orthogonal on Non-Uniform Grids, *Izv. Saratovsk. Univ. Nov. Ser. Matem., Mekhan., Informatika*, 2011, vol. 11, no. 3 (2), pp. 29–42 (in Russian).
8. *Nurmagomedov, A. A.* Convergence of Fourier Sums in Polynomials Orthogonal on Arbitrary Grids, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, pp. 52–54 DOI: 10.3103/S1066369X12070080.
9. *Nurmagomedov, A. A. and Rasulov, N. K.* Two-Sided Estimates of Fourier Sums Lebesgue Functions with Respect to Polynomials Orthogonal on Nonuniform Grids, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2018, vol. 51, no. 3, pp. 249–259. DOI: 10.3103/S1063454118030068.
10. *Nurmagomedov, A. A. and Nurmagomedov, I. A.* Obout Convergence of Fourier Sums on Polynomials Orthogonal on Arbitrary Grids, *Theory of Functions, its Applications and Related Matters*, Kazan, 2019, vol. 57, pp. 254–257 (in Russian).
11. *Nurmagomedov, A. A.* Asymptotic Properties of Polynomials $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, Orthogonal on any Sets in the Case of Integers α and β, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 10–19 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-2-10-19.
12. *Korkmasov, F. M.* Approximate Properties of the de la Vallee Poussin Means for the Discrete Fourier–Jacobi Sums, *Siberian Mathematical Journal*, 2004, vol. 45, pp. 273–293. DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000021284.60159.bd.
13. *Sharapudinov, I. I. Smeshannye ryady po ortogonal'nym polinomam. Teoriya i prilozheniya* [Mixed Series of Orthogonal Polynomials. Theory and Applications], Makhachkala, Daghestan Scientific Centre of RAS, 2004, 276 p. (in Russian).
14. *Sharapudinov, I. I.* Boundednes in $C[-1,1]$ of the de la Vallee-Poussin Means for the Discrete Fourier–Jacobi Sums, *Sbornik: Mathematics*, 1996, vol. 187, no. 1, pp. 141–160. DOI: 10.1070/SM1996v187n01ABEH000105.
15. *Alexits, G. Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen*, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960.
16. *Badkov, V. M.* Two-Sided Estimations for the Lebesgue Function and the Remainder of the Fourier Series with Respect to Orthogonal Polynomials, *Approximation in Concrete and Abstract Banach Spaces*, Sverdlovsk, Akad. Nauk SSSR. Ural'sk. Nauchn. Tsentr, 1987, pp. 31–45 (in Russian).
17. *Daugavet, I. K. and Rafalson, S. Z.* About of Some Inequalities for Algebraic Polynomial, *Vestn. Leningr. Gos. Univ.*, 1974, no. 19, pp. 18–24 (in Russian).
18. *Simonov, I. E.* Sharp Markov Brothers Type Inequality in the Spaces L_p, L_1 on the a Closed Interval, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 282–290 (in Russian).

Received December 23, 2019

Alim A. Nurmagomedov
Dagestan State Agrarian University,
180 M. Gadzhiev St., Makhachkala 367032, Russian,
Associate Professor
E-mail: alimn@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 48–52

УДК 519.17
DOI 10.46698/m4113-7350-5686-a

TOSHA-DEGREE EQUIVALENCE SIGNED GRAPHS

R. Rajendra[1] and P. Siva Kota Reddy[2]

[1] Mangalore University,
Mangalagangothri 574199, Karnataka, India;
[2] Sri Jayachamarajendra College of Engineering,
JSS Science and Technology University,
Mysuru 570 006, Karnataka, India

E-mail: `rrajendrar@gmail.com`; `pskreddy@jssstuniv.in`

Abstract. The Tosha-degree of an edge α in a graph Γ without multiple edges, denoted by $T(\alpha)$, is the number of edges adjacent to α in Γ, with self-loops counted twice. A signed graph (marked graph) is an ordered pair $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$ ($\Sigma = (\Gamma, \mu)$), where $\Gamma = (V, E)$ is a graph called the underlying graph of Σ and $\sigma : E \to \{+, -\}$ ($\mu : V \to \{+, -\}$) is a function. In this paper, we define the Tosha-degree equivalence signed graph of a given signed graph and offer a switching equivalence characterization of signed graphs that are switching equivalent to Tosha-degree equivalence signed graphs and k^{th} iterated Tosha-degree equivalence signed graphs. It is shown that for any signed graph Σ, its Tosha-degree equivalence signed graph $T(\Sigma)$ is balanced and we offer a structural characterization of Tosha-degree equivalence signed graphs.

Key words: signed graphs, balance, switching, Tosha-degree of an edge, Tosha-degree equivalence signed graph, negation.

Mathematical Subject Classification (2010): 05C22.

For citation: *Rajendra, R. and Reddy, P. S. K.* Tosha-Degree Equivalence Signed Graphs, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 48–52. DOI: 10.46698/m4113-7350-5686-a.

1. Introduction

A graph is an ordered pair $\Gamma = (V, E)$, where V is a set of vertices of Γ and E is a collection of pairs of vertices of Γ, called edges of Γ. For standard terminology and notion in graph theory, we refer the reader to the text-book of Harary [1]. All graphs considered in the paper are finite, simple and connected. The non-standard will be given in this paper as and when required.

In [2], we defined the Tosha-degree of an edge in a graph and Tosha-degree equivalence graph of a graph as follows:

Let α be an edge in a graph Γ. The Tosha-degree of α, denoted by $T(\alpha)$, is the number of edges adjacent to α in Γ, with self-loops counted twice. For any edge α in a graph Γ, $T(\alpha) \geqslant 0$.

Let $\Gamma = (V, E)$ be a graph and $|E| = m$. We define a relation $\approx$ on E as follows: for $\alpha, \beta \in E$,

$$\alpha \approx \beta \Leftrightarrow T(\alpha) = T(\beta).$$

It is easy to see that $\approx$ is an equivalence relation on E. Let $E_1, E_2, \ldots, E_k$ be the partition of E in to disjoint classes by the relation $\approx$. Let $|E_i| = m_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$ so that $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$.

The equivalence class graph on E defined by $\approx$ is called *Tosha-degree equivalence graph* of Γ and is denoted by $T(\Gamma)$.

A *signed graph* is an ordered pair $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$, where $\Gamma = (V, E)$ is a graph called the *underlying graph* of Σ and $\sigma : E \to \{+, -\}$ is a function. A *marking* of Σ is a function $\mu : V(\Gamma) \to \{+, -\}$.

A signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$ is *balanced* if every cycle in Σ has an even number of negative edges (see [3]). Equivalently, a signed graph is balanced if product of signs of the edges on every cycle of Σ is positive.

The following are the fundamental results about balance, the second being a more advanced form of the first. Note that in a bipartition of a set, $V = V_1 \cup V_2$, the disjoint subsets may be empty.

Theorem 1.1. *A signed graph Σ is balanced if and only if either of the following equivalent conditions is satisfied:*

(i) *Its vertex set has a bipartition $V = V_1 \cup V_2$ such that every positive edge joins vertices in V_1 or in V_2, and every negative edge joins a vertex in V_1 and a vertex in V_2 (Harary* [3]).

(ii) *There exists a marking μ of its vertices such that each edge uv in Γ satisfies $\sigma(uv) = \mu(u)\mu(v)$. (Sampathkumar* [4]).

Two signed graphs Σ_1 and Σ_2 are signed isomorphic (written $\Sigma_1 \cong \Sigma_2$) if there is a one-to-one correspondence between their vertex sets which preserve adjacency as well as sign.

Given a marking μ of a signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$, *switching* Σ with respect to μ is the operation of changing the sign of every edge uv of Σ by $\mu(u)\sigma(uv)\mu(v)$. The signed graph obtained in this way is denoted by $\Sigma_\mu(\Sigma)$ and is called the *μ-switched signed graph* or just *switched signed graph*.

A signed graph $\Sigma_1 = (\Gamma, \sigma)$ *switches* to a signed graph $\Sigma_2 = (\Gamma', \sigma')$ (or that Σ_1 and Σ_2 are *switching equivalent*) written $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$, whenever there exists a marking μ of Σ_1 such that $\Sigma_\mu(\Sigma_1) \cong \Sigma_2$. Note that $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ implies that $\Gamma \cong \Gamma'$, since the definition of switching does not involve change of adjacencies in the underlying graphs of the respective signed graphs. Infact, the idea of switching a signed graph was introduced by Abelson and Rosenberg [5] in connection with structural analysis of marking μ of a signed graph Σ.

Two signed graphs $\Sigma_1 = (\Gamma, \sigma)$ and $\Sigma_2 = (\Gamma', \sigma')$ are said to be *cycle isomorphic* (see [6]) if there exists an isomorphism $\phi : \Gamma \to \Gamma'$ such that the sign of every cycle Z in Σ_1 equals to the sign of $\phi(Z)$ in Σ_2. The following result is known [6]:

Theorem 1.2 (T. Zaslavsky [6]). *Two signed graphs Σ_1 and Σ_2 with the same underlying graph are switching equivalent if, and only if, they are cycle isomorphic.*

One of the important operations on signed graphs involves changing signs of their edges. The negation of a signed graph Σ, denoted $\eta(\Sigma)$, is obtained by negating the sign of every edge of Σ, i. e., by changing the sign of every edge to its opposite [7].

2. Tosha-Degree Equivalence Signed Graph of a Graph

In [2], we have defined the Tosha-degree equivalence graph of a graph which is motivated to extend this notion to signed graphs as follows: The *Tosha-degree equivalence signed graph* of a signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$ as a signed graph $T(\Sigma) = (T(\Gamma), \sigma')$, where $T(\Gamma)$ is the underlying graph of $T(\Sigma)$ is the Tosha-degree equivalence graph of Γ, where for any edge e_1e_2 in $T(\Sigma)$, $\sigma'(e_1e_2) = \sigma(e_1)\sigma(e_2)$. Hence, we shall call a given signed graph Σ as *Tosha-degree equivalence signed graph* if it is isomorphic to the Tosha-degree equivalence signed graph $T(\Sigma')$ of some sigraph Σ'.

The following result indicates the limitations of the notion of Tosha-degree equivalence signed graphs as introduced above, since the entire class of unbalanced signed graphs is forbidden to be Tosha-degree equivalence signed graphs.

Theorem 2.1. *For any signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$, its Tosha-degree equivalence signed graph $T(\Sigma) = (T(\Gamma), \sigma')$ is balanced.*

◁ Let E_j^+ be the set of vertices of Tosha-degree equivalence signed graph $T(\Sigma)$ each of which corresponds to a positive edge in Σ and E_j^- be the set of vertices of Tosha-degree equivalence signed graph $T(\Sigma)$ each of which corresponds to a negative edge in Σ. Let e_ie_j be any negative edge in $T(\Sigma)$. By the definition of $T(\Sigma)$, the edges e_i and e_j ofΣ are not of the same sign and hence as vertices of $T(\Sigma)$ they cannot lie in the same part of the partition $\{E_j^+, E_j^-\}$. On the other hand, if the edge e_ie_j is any positive edge of $T(\Sigma)$ then, by the definition of $T(\Sigma)$ the edges e_i and e_j of Σ are of the same sign and hence as vertices of $T(\Sigma)$ they must both lie in exactly one of the parts of the partition $\{E_j^+, E_j^-\}$ of the vertex set of $T(\Sigma)$. Thus, every negative edge of $T(\Sigma)$ has its ends in different parts of this partition whereas no positive edge of $T(\Sigma)$ has this property. Therefore, by the well known Partition Criterion for Balance of by Theorem 1.1, it follows that $T(\Sigma)$ must be balanced. ▷

For any positive integer k, the k^{th} iterated Tosha-degree equivalence signed graph, $T^k(\Sigma)$ of Σ is defined as follows:

$$T^0(\Sigma) = \Sigma, \quad T^k(\Sigma) = T(T^{k-1}(\Sigma)).$$

Corollary 2.2. *For any signed graph $S = (G, \sigma)$ and for any positive integer k, $T^k(\Sigma)$ is balanced.*

Theorem 2.3. *For any two signed graphs Σ_1 and Σ_2 with the same underlying graph, their Tosha-degree equivalence signed graphs are switching equivalent.*

◁ Suppose $\Sigma_1 = (\Gamma, \sigma)$ and $\Sigma_2 = (\Gamma', \sigma')$ be two signed graphs with $\Gamma \cong \Gamma'$. By Theorem 2.1, $T(\Sigma_1)$ and $T(\Sigma_2)$ are balanced and hence, the result follows from Theorem 1.2. ▷

In [2], we have characterize the graphs such that $\Gamma \cong T(\Gamma)$.

Theorem 2.4. *Let Γ be a connected graph with m edges. Then $\Gamma \cong T(\Gamma)$ if and only if $\Gamma \cong K_3$.*

In view of the above result, we now characterize those signed graphs that are switching equivalent to their Tosha-degree equivalence signed graphs.

Theorem 2.5. *For any connceted signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$ with m edges. Then $\Sigma \sim T(\Sigma)$ if and only if Σ is balanced signed graph and $\Gamma \cong K_3$.*

◁ Suppose $\Sigma \sim T(\Sigma)$. This implies, $T(\Gamma) \cong \Gamma$ and hence by Theorem 2.4 we see that Γ is isomorphic to complete graph K_3. Now, if Σ is signed graph in which underlying graph Γ is isomorphic to K_3, Theorem 2.1 implies that $T(\Sigma)$ is balanced and hence if Σ is unbalanced its Tosha-degree equivalence signed graph $T(\Sigma)$ being balanced cannot be switching equivalent to S in accordance with Theorem 1.2. Therefore, Σ must be balanced.

Conversely, suppose that Σ is balanced and Γ is isomorphic to K_3. Then, by Theorem 2.1, $T(\Sigma)$ is balanced, the result follows from Theorem 1.2. ▷

By the definition of Tosha-degree of an edge in a graph, Tosha-degree equivalence graph of a graph and Theorem 2.4, we have the following result:

Theorem 2.6. *Let Γ be a connected graph with m edges. Then $\Gamma \cong T^k(\Gamma)$ if and only if $\Gamma \cong K_3$.*

In view of the above result, we now characterize those signed graphs that are switching equivalent to their k^{th} iterated Tosha-degree equivalence signed graphs.

Theorem 2.7. *For any connceted signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$ with m edges. Then $\Sigma \sim T^k(\Sigma)$ if and only if Σ is balanced signed graph and $\Gamma \cong K_3$.*

For a signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$, the $T(\Sigma)$ is balanced (Theorem 2.1). We now examine, the conditions under which negation η of $T(\Sigma)$ is balanced.

Theorem 2.8. *Let $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$ be a signed graph. If $T(\Gamma)$ is bipartite then $\eta(T(\Sigma))$ is balanced.*

◁ Since, by Theorem 2.1, $T(\Sigma)$ is balanced, if each cycle C in $T(\Sigma)$ contains even number of negative edges. Also, since $T(\Gamma)$ is bipartite, all cycles have even length; thus, the number of positive edges on any cycle C in $T(\Sigma)$ is also even. Hence $\eta(T(\Sigma))$ is balanced. ▷

Theorem 2.5 and 2.7 provides easy solutions to two other signed graph switching equivalence relations, which are given in the following results:

Corollary 2.9. *For any signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$, $\eta(\Sigma) \sim T(\Sigma)$ if and only if Σ is an unbalanced signed graph and $\Gamma = K_3$.*

Corollary 2.10. *For any signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$, $\eta(\Sigma) \sim T(\eta(\Sigma))$ if and only if Σ is an unbalanced signed graph and $\Gamma = K_3$.*

Corollary 2.11. *For any signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$, $\eta(\Sigma) \sim T^k(\Sigma)$ if and only if Σ is an unbalanced signed graph and $\Gamma = K_3$.*

Corollary 2.12. *For any signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$, $\eta(\Sigma) \sim T^k(\eta(\Sigma))$ if and only if Σ is an unbalanced signed graph and $\Gamma = K_3$.*

2.1. Characterization of Tosha-Degree Equivalence Signed Graphs. The following result characterize signed graphs which are Tosha-degree equivalence signed graphs.

Theorem 2.13. *A signed graph $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$ is a Tosha-degree equivalence signed graph if and only if Σ is balanced signed graph and its underlying graph Γ is a Tosha-degree equivalence graph.*

◁ Suppose that Σ is balanced and Γ is a Tosha-degree equivalence graph. Then there exists a graph Γ' such that $T(\Gamma') \cong \Gamma$. Since Σ is balanced, by Theorem 1.1, there exists a marking μ of Γ such that each edge uv in Σ satisfies $\sigma(uv) = \mu(u)\mu(v)$. Now consider the signed graph $\Sigma' = (\Gamma', \sigma')$, where for any edge e in Γ', $\sigma'(e)$ is the marking of the corresponding vertex in Γ. Then clearly, $T(\Sigma') \cong \Sigma$. Hence Σ is a Tosha-degree equivalence signed graph.

Conversely, suppose that $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$ is a Tosha-degree equivalence signed graph. Then there exists a signed graph $\Sigma' = (\Gamma', \sigma')$ such that $T(\Sigma') \cong \Sigma$. Hence Γ is the Tosha-degree equivalence graph and by Theorem 2.1, Σ is balanced. ▷

Acknowledgment: The authors would like to extend their gratitude to the referee for the valuable suggestions.

References

1. *Harary F. Graph Theory*, Addison Wesley, Reading, Mass, 1972.
2. *Rajendra R. and Siva Kota Reddy P.* Tosha-Degree of an Edge in a Graph, *Southeast Asian Bull. Math.*, 2021, vol. 45, to appear.
3. *Harary F.* On the Notion of Balance of a Sigraph, *Michigan Mathematical Journal*, 1953, vol. 2, pp. 143–146.
4. *Sampathkumar E.* Point Signed and Line Signed Graphs, *National Academy Science Letters*, 1984, vol. 7 (3), pp. 91–93.

5. *Abelson R. P. and Rosenberg M. J.* Symoblic Psychologic : A Model of Attitudinal Cognition, *Behavioral Sciences*, 1958, vol. 3, pp. 1–13.
6. *Zaslavsky T.* Signed Graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 1982, vol. 4, no. 1, pp. 47–74. DOI: 10.1016/0166-218X(82)90033-6.
7. *Harary F.* Structural Duality, *Behavioral Sciences*, 1957, vol. 2 (4), pp. 255–265.

Received June 24, 2019

Rangaswamy Rajendra
Mangalore University,
Mangalagangothri 574 199, Karnataka, India,
Assistant Professor
E-mail: rrajendrar@gmail.com

Polaepalli Siva Kota Reddy
Sri Jayachamarajendra College of Engineering,
JSS Science and Technology University,
Mysuru 570 006, Karnataka, India,
Professor
E-mail: pskreddy@jssstuniv.in

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 48–52

ЗНАКОВЫЕ ГРАФЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СТЕПЕНИ ТОША

Раджендра Р.[1], Редди П. С. К.[2]

[1] Мангалорский университет,
Мангалаганготри 574199, Карнатака, Индия;
[2] Научно-технический университет Джагадгуру
Шри Шивaратрешвара,
Майсур 570 006, Карнатака, Индия
E-mail: rrajendrar@gmail.com; pskreddy@jssstuniv.in

Аннотация. Степень Тоша ребра α в графе Γ без кратных ребер, обозначаемая $T(\alpha)$, — это число ребер, смежных с α в Γ, причем петли считаются дважды. Знаковый граф (помеченный граф) — это упорядоченная пара $\Sigma = (\Gamma, \sigma)$ ($\Sigma = (\Gamma, \mu)$), где $\Gamma = (V, E)$ — граф, называемый базовым графом Σ и $\sigma : E \to \{+, -\}$ ($\mu : V \to \{+, -\}$), является функцией. В данной статье определяется знаковый граф эквивалентности степени Тоша заданного знакового графа и предлагается характеристика эквивалентности по переключению знаковых графов, которые переключаются эквивалентно знаковым графам эквивалентности степени Тоша и k-ой итерации знаковых графов эквивалентности степени Тоша. Также была изучена структурная характеристика знаковых графов эквивалентности степени Тоша.

Ключевые слова: знаковый граф, баланс, ребро степени Тоша, знаковый граф эквивалентности степени Тоша, отрицание.

Mathematical Subject Classification (2010): 05C22.

Образец цитирования: *Rajendra, R. and Reddy, P. S. K.* Tosha-Degree Equivalence Signed Graphs // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 2.—С. 48–52 (in English). DOI: 10.46698/m4113-7350-5686-a.

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 53–69

УДК 517.952
DOI 10.46698/g9113-3086-1480-k

О МНОГОМЕРНЫХ ДЕТЕРМИНАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ

И. В. Рахмелевич[1]

[1] Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен класс многомерных детерминантных дифференциально-операторных уравнений, левая часть которых представляет собой определитель с элементами, содержащими произведение линейных одномерных дифференциальных операторов произвольного порядка, а правая часть зависит от искомой функции и ее первых производных. Отдельно исследованы однородные и неоднородные детерминантные дифференциально-операторные уравнения. Доказаны теоремы о понижении размерности уравнения. Получены решения в виде суммы и произведения функций от подмножеств независимых переменных, и в том числе, функций одной переменной. В частности, доказано, что решением рассматриваемого однородного уравнения является произведение собственных функций линейных операторов, входящих в состав уравнения. Для однородного уравнения доказана теорема о взаимосвязи решений исходного уравнения и некоторого вспомогательного линейного уравнения, а также получено решение уравнения для случая, когда линейные дифференциальные операторы, входящие в его состав, имеют пропорциональные собственные значения. Получены решения типа бегущей волны, в том числе решения степенного и экспоненциального вида, а также в виде произвольной функции от линейной комбинации независимых переменных. В случае, когда линейные операторы, входящие в состав уравнения, являются однородными, найдены решения в виде обобщенных мономов. Для неоднородного уравнения получены частные решения в случаях, когда правая часть содержит только независимые переменные, и когда правая часть содержит степенную или экспоненциальную нелинейность от искомой функции, и степени первых производных от этой функции.

Ключевые слова: детерминантное дифференциально-операторное уравнение, определитель, линейный дифференциальный оператор, собственная функция, ядро оператора, решение типа бегущей волны.

Mathematical Subject Classification (2010): 35G20.

Образец цитирования: *Рахмелевич И. В.* О многомерных детерминантных дифференциально-операторных уравнениях // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 53–69. DOI: 10.46698/g9113-3086-1480-k.

Введение

Важнейшим направлением современной математической физики является исследование многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и нахождение их точных решений [1–7]. Одним из наиболее известных нелинейных уравнений является уравнение Монжа — Ампера (МА), которому уделяется большое внимание как в известных справочниках, так и в оригинальных работах [1, 8–10]. Уравнение

МА принадлежит к весьма широкому классу детерминантных уравнений. Исследование двумерного детерминантного дифференциально-операторного уравнения проведено в работе [11]. Общие свойства этого класса уравнений и его решений в случае произвольной размерности в настоящее время практически не исследованы. Целью данной работы является исследование многомерных детерминантных дифференциально-операторных уравнений, левая часть которых представляет собой определитель с элементами, содержащими произведение линейных одномерных дифференциальных операторов произвольного порядка. При этом изучаются как однородные уравнения, так и неоднородные, правая часть которых содержит независимые переменные, искомую функцию и ее первые производные.

1. Постановка задачи. Анализ однородных уравнений

Рассмотрим класс многомерных детерминантных дифференциально-операторных уравнений в частных производных относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$:

$$\det|\hat{R}u| = F\left(u, x_1, x_2, \ldots, x_N, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right). \tag{1.1}$$

Здесь F — заданная функция, а $\hat{R}$ — операторная матрица, элементы которой определяются выражениями

$$\hat{R}_{ij} = \hat{L}_i \hat{L}_j, \tag{1.2}$$

$\hat{L}_i$ — линейный дифференциальный оператор, действующий по переменной x_i и определяемый выражением

$$\hat{L}_i = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi}(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m, \tag{1.3}$$

a_{mi} — некоторые заданные функции. Наиболее известным и хорошо исследованным уравнением, относящимся к классу уравнений (1.1), является уравнение Монжа — Ампера, для которого $\hat{L}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, N$.

Представим множество значений $I = \{1, \ldots, N\}$ индекса, нумерующего независимые переменные, в виде объединения K непересекающихся подмножеств I_k ($k \in \Xi$, $\Xi = \{1, \ldots, K\}$). Тогда множество переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ может быть разбито на K непересекающихся подмножеств $X_k = \{x_n\}_{n \in I_k}$. Далее для сокращения записи будем использовать обозначения вида $u(X)$ вместо $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, и аналогично $u_k(X_k)$; правую часть уравнения (1.1) будем записывать в виде $F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right)$, где введено обозначение

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right\}.$$

Также в дальнейшем используются обозначения $\Lambda_n = \ker \hat{L}_n$, $\tilde{\Lambda}_n = \ker(\hat{L}_n^2)$. В данном параграфе будем предполагать, что правая часть $F \equiv 0$, т. е. уравнение (1.1) является однородным:

$$\det|\hat{R}u| = 0. \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. *Пусть $\hat{R}_k = (\hat{R}_{ij})_{i,j \in I_k}$ для всех $k \in \Xi$. Пусть также при некотором $l \in \Xi$ функция $u_l(X_l)$ удовлетворяет уравнению*

$$\det|\hat{R}_l u_l| = 0. \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.4) *имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{k=1}^{K} u_k(X_k), \tag{1.6}$$

где $u_k(X_k)$ *для всех* $k \in \Xi$, $k \neq l$, *— произвольные функции своих аргументов, дифференцируемые необходимое число раз.*

$\lhd$ Пусть $i \in I_{k_1}$, $j \in I_{k_2}$, причем $k_1, k_2 \in \Xi$, $k_1 \neq k_2$. В этом случае $\hat{L}_i \hat{L}_j u_k(X_k) = 0$ для любого $k \in \Xi$. Тогда, используя выражение (1.6), вычисляем соответствующие матричные элементы в левой части уравнения (1.4):

$$\hat{R}_{ij} u = \hat{L}_i \hat{L}_j \left(\sum_{k=1}^{K} u_k(X_k) \right) = 0. \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что

$$\hat{R} u = \mathrm{blockdiag}(\hat{R}_1 u_1, \ldots, \hat{R}_K u_K). \tag{1.8}$$

Согласно известному свойству определителя блочно-диагональной матрицы

$$\det |\hat{R} u| = \prod_{k=1}^{K} \det |\hat{R}_k u_k|. \tag{1.9}$$

В силу (1.5) сомножитель с номером l в правой части (1.9) равен 0, поэтому при любых $u_k(X_k)$ ($k \in \Xi$, $k \neq l$) функция $u(X)$, определяемая выражением (1.6), удовлетворяет уравнению (1.4). $\rhd$

Теорема 1.2. *Пусть функция* $u(X)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\left(\sum_{i=1}^{N} c_i \hat{L}_i \right) u(X) = 0, \tag{1.10}$$

где c_i *— любые вещественные коэффициенты, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^2 > 0. \tag{1.10 a}$$

Тогда функция $u(X)$ *является решением уравнения* (1.4).

$\lhd$ С учетом (1.10a) без ограничения общности предположим, что $c_N \neq 0$. Тогда из (1.10) следует

$$\hat{L}_N u = - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{c_j}{c_N} \hat{L}_j u. \tag{1.11}$$

Применяя оператор $\hat{L}_i$ к (1.11) и учитывая (1.2), получаем

$$\hat{R}_{iN} u = - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{c_j}{c_N} \hat{R}_{ij} u. \tag{1.12}$$

Соотношение (1.12) означает, что N-й столбец матрицы $\hat{R} u$ представлен в виде линейной комбинации остальных ее столбцов, поэтому определитель этой матрицы тождественно равен 0, т. е. $u(X)$ является решением уравнения (1.4). $\rhd$

Теорема 1.3. *Пусть функция $u_0(X)$ удовлетворяет уравнению (1.4), а при каждом $n \in I$ функции $w_{n,s_n}(x_n) \in \Lambda_n$ для всех $s_n = 1, \ldots, S_n$. Тогда любая функция $u(X)$, определяемая выражением*

$$u(X) = u_0(X) + \sum_{s_1=1}^{S_1} \ldots \sum_{s_N=1}^{S_N} p_\sigma \prod_{n=1}^{N} w_{n,s_n}(x_n), \tag{1.13}$$

также является решением уравнения (1.4). Здесь $\sigma = \{s_1, \ldots, s_N\}$ — мультииндекс, p_σ — произвольные вещественные коэффициенты.

$\lhd$ Пусть $i, j \in I$ — произвольно выбранные значения. Тогда в силу условия теоремы $w_{n,s_n}(x_n) \in \Lambda_n$ получаем:

а) в случае $i = j$

$$\hat{L}_i \hat{L}_j \prod_{n=1}^{N} w_{n,s_n}(x_n) = w_{1,s_1}(x_1) \ldots \hat{L}_i^2 w_{i,s_i}(x_i) \ldots w_{N,s_N}(x_N) = 0, \tag{1.14 а}$$

б) в случае $i \neq j$

$$\hat{L}_i \hat{L}_j \prod_{n=1}^{N} w_{n,s_n}(x_n) = w_{1,s_1}(x_1) \ldots \hat{L}_i w_{i,s_i}(x_i) \ldots \hat{L}_j w_{j,s_j}(x_j) \ldots w_{N,s_N}(x_N) = 0 \tag{1.14 б}$$

при любых $i, j \in I$. Из (1.13), (1.14 а), (1.14 б) следует, что $\hat{R}_{ij} u = \hat{R}_{ij} u_0$ при всех $i, j \in I$. Тогда, если функция $u_0(X)$ удовлетворяет уравнению (1.4), то и функция $u(X)$ является решением этого уравнения. $\rhd$

Теорема 1.4. *Пусть функции $w_n(x_n) \in \Lambda_n$ при всех $n \in I$. Пусть также функция $u_k(X_k)$ удовлетворяет уравнению (1.5), а $u_l(X_l)$ при всех $l \in \Xi$, $l \neq k$, — произвольные функции своих аргументов, дифференцируемые необходимое число раз. Тогда уравнение (1.4) имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{l=1}^{K} u_l(X_l) \prod_{n \in \bar{I}_l} w_n(x_n), \tag{1.15}$$

где $\bar{I}_l = I \setminus I_l$.

$\lhd$ Используя (1.15), вычисляем матричные элементы в левой части уравнения (1.4).

1. Если $i, j \in I_l$, то

$$\big(\hat{R}_{ij} u\big)_{i,j \in I_l} = \prod_{n \in \bar{I}_l} w_n(x_n) \big(\hat{R}_l u_l\big)_{ij}. \tag{1.16 а}$$

2. Если $i \in I_{l_1}$, $j \in I_{l_2}$, причем $l_1 \neq l_2$, то с учетом условия $w_n(x_n) \in \Lambda_n$ получаем

$$\begin{aligned} \big(\hat{R}_{ij} u\big)_{i \in I_{l_1}, j \in I_{l_2}} = \hat{L}_i u_i(X_i) \hat{L}_j w_j(x_j) \prod_{\substack{n \in \bar{I}_{l_1}, \\ n \neq j}} w_n(x_n) \\ + \hat{L}_j u_j(X_j) \hat{L}_i w_i(x_i) \prod_{\substack{n \in \bar{I}_{l_2}, \\ n \neq i}} w_n(x_n) = 0. \end{aligned} \tag{1.16 б}$$

Из (1.16 а), (1.16 б) следует, что $\hat{R}u$ — блочно-диагональная матрица, поэтому аналогично (1.9) находим

$$\det|\hat{R}u| = \prod_{l=1}^{K}\left\{\left(\prod_{n\in\bar{I}_l} w_n(x_n)\right)^{N_l}\det|\hat{R}_l u_l|\right\}, \tag{1.17}$$

где N_l — число элементов в множестве I_l. Так как по условию теоремы $u_k(X_k)$ удовлетворяет уравнению (1.5), то соответствующий сомножитель в правой части (1.17) тождественно равен 0. Поэтому из (1.17) следует, что $u(X)$ является решением уравнения (1.4). ▷

Теорема 1.5. *Пусть функции $u_n(x_n)$ при всех $n\in I$ удовлетворяют уравнениям*

$$u_n(x_n)\,\hat{L}_n^2 u_n(x_n) = p_n(\hat{L}_n u_n(x_n))^2, \tag{1.18}$$

где p_n — вещественные постоянные. Пусть также выполнено одно из следующих условий:

1) *$p_n = 1$ не менее чем при двух значениях $n\in I$;*

2) *постоянные p_n таковы, что*

$$1+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_n-1} = 0. \tag{1.19}$$

Тогда функция, определяемая выражением

$$u(X) = \prod_{n=1}^{N} u_n(x_n), \tag{1.20}$$

является решением уравнения (1.4).

◁ Подставляя (1.20) в левую часть уравнения (1.4), представим ее в виде

$$\det|\hat{R}u| = [u(X)]^N \det h, \tag{1.21}$$

где элементы матрицы h определяются выражениями

$$h_{ij} = \begin{cases} s_i, & i=j;\\ t_i t_j, & i\neq j.\end{cases} \tag{1.22}$$

Здесь введены обозначения

$$s_i = \frac{\hat{L}_i^2 u_i(x_i)}{u_i(x_i)},\quad t_i = \frac{\hat{L}_i u_i(x_i)}{u_i(x_i)}. \tag{1.22 а}$$

Для дальнейшего преобразования (1.21) используем известный результат [12, с. 43, 197] для определителя матрицы вида (1.22):

$$\det h = \prod_{i=1}^{N}(s_i - t_i^2)\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{t_i^2}{s_i-t_i^2}\right). \tag{1.23}$$

Учитывая (1.22 а) и предполагая выполненным условие (1.18), соотношение (1.23) перепишем в виде

$$\det h = \prod_{i=1}^{N}\left\{(p_i-1)\left(\frac{\hat{L}_i u_i(x_i)}{u_i(x_i)}\right)^2\right\}\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i-1}\right). \tag{1.24}$$

Из (1.21) и (1.24) получаем, что левая часть (1.4) тождественно равна 0 при выполнении любого из условий 1), 2), перечисленных в формулировке теоремы, откуда и следует доказываемое утверждение. $\triangleright$

Следствие 1.1. *Пусть $u_i(x_i)$ при всех $i \in I$ являются собственными функциями соответствующих операторов $\hat{L}_i$. Тогда функция* (1.20) *является решением уравнения* (1.4).

$\triangleleft$ Если $u_i(x_i)$ является собственной функцией оператора $\hat{L}_i$, соответствующей собственному значению λ_i, то легко видеть, что она удовлетворяет уравнению (1.18), при этом $p_i = 1$ для любого $\lambda_i \neq 0$, откуда и следует данное утверждение. $\triangleright$

Определение 1.1. Пусть $\lambda_{is} \neq 0$ — собственные значения операторов $\hat{L}_i$ ($i = 1, \ldots, N$; $s = 1, \ldots, S$). Будем говорить, что λ_{is} обладают свойством пропорциональности, если при всех $i = 1, \ldots, N$, $s = 2, \ldots, S$ выполняются следующие условия:

$$\lambda_{is} = \mu_s \lambda_{i1}, \tag{1.25}$$

где μ_s — некоторые постоянные, не зависящие от i.

Теорема 1.6. *Пусть λ_{is} — простые (некратные) собственные значения операторов $\hat{L}_i$, обладающие свойством пропорциональности, $u_{is}(x_i)$ — собственные функции, соответствующие этим собственным значениям. Тогда функция, определяемая выражением*

$$u(X) = \sum_{s=1}^{S} \prod_{n=1}^{N} u_{ns}(x_n), \tag{1.26}$$

является решением уравнения (1.4).

$\triangleleft$ Используя (1.26) и учитывая, что λ_{is} являются собственными значениями операторов $\hat{L}_i$, запишем выражение для матричных элементов в левой части уравнения (1.4):

$$\hat{L}_i \hat{L}_j u(X) = \sum_{s=1}^{S} \lambda_{is} \lambda_{js} \prod_{n=1}^{N} u_{ns}(x_n), \tag{1.27}$$

причем это выражение справедливо для всех $i, j \in I$. Учитывая свойство пропорциональности (1.25), перепишем (1.27) в виде

$$\hat{L}_i \hat{L}_j u(X) = \lambda_{i1} \lambda_{j1} \sum_{s=1}^{S} \mu_s^2 \prod_{n=1}^{N} u_{ns}(x_n). \tag{1.28}$$

Тогда на основании (1.28) левую часть уравнения (1.4) можно представить так:

$$\det |\hat{R}u| = [v(X)]^N \det \eta, \quad v(X) = \sum_{s=1}^{S} \mu_s^2 \prod_{n=1}^{N} u_{ns}(x_n). \tag{1.29}$$

Элементы матрицы η определяются выражением

$$\eta_{ij} = \lambda_{i1} \lambda_{j1}. \tag{1.29 a}$$

Из (1.29 a) следует, что $\det \eta = 0$, поэтому $\det |\hat{R}u| \equiv 0$. $\triangleright$

Теорема 1.7. *Пусть $\hat{L}_i$ при всех $i \in I$ определяются выражением*

$$\hat{L}_i = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi,0}\, x_i^{m+r_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m, \tag{1.30}$$

где r_i — вещественные параметры. Тогда уравнение (1.4) *имеет множество решений в виде обобщенных мономов*

$$u(X) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\sigma_i}, \tag{1.31}$$

причем для показателей σ_i справедливы следующие утверждения:

1. *Если $r_i = 0$ не менее чем при двух значениях $i \in I$, то функция* (1.31) *удовлетворяет уравнению* (1.4) *при произвольных σ_i.*

2. *Если $r_i = 0$ не более чем при одном значении $i \in I$, то функция* (1.31) *удовлетворяет уравнению* (1.4) *при выполнении одного из условий:*

$$A_i(\sigma_i) = 0 \tag{1.32 а}$$

хотя бы при одном значении i;

$$A_i(\sigma_i + r_i) - A_i(\sigma_i) = 0 \tag{1.32 б}$$

не менее чем при двух значениях i;

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{A_i(\sigma_i)}{A_i(\sigma_i + r_i) - A_i(\sigma_i)} = -1. \tag{1.32 в}$$

Здесь $A_i(\sigma_i)$ определяется выражением

$$A_i(\sigma_i) = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi,0} \prod_{j=0}^{m-1} (\sigma_i - j). \tag{1.33}$$

$\lhd$ Используя функцию (1.31), в результате дифференцирования и элементарных преобразований находим выражения для матричных элементов в левой части уравнения (1.4):

$$\hat{L}_i \hat{L}_j u(X) = \begin{cases} A_i(\sigma_i) A_i(\sigma_i + r_i) u(X) x_i^{2r_i}, & i = j; \\ A_i(\sigma_i) A_j(\sigma_j) u(X) x_i^{r_i} x_j^{r_j}, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.34}$$

где $A_i(\sigma_i)$ имеют вид (1.33). На основании (1.34) можно представить левую часть уравнения (1.4) в виде (1.21), где элементы матрицы h определяются выражением

$$h_{ij} = \begin{cases} A_i(\sigma_i) A_i(\sigma_i + r_i) x_i^{2r_i}, & i = j; \\ A_i(\sigma_i) A_j(\sigma_j) x_i^{r_i} x_j^{r_j}, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.35}$$

Из (1.35) получаем выражение для определителя матрицы h:

$$\det h = \prod_{i=1}^{N} \Big\{ A_i(\sigma_i) \big[A_i(\sigma_i + r_i) - A_i(\sigma_i) \big] x_i^{2r_i} \Big\} \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i(\sigma_i)}{A_i(\sigma_i + r_i) - A_i(\sigma_i)} \right). \tag{1.36}$$

Из выражения (1.36) следует:

1) Если $r_i = 0$ не менее чем при двух значениях i, то $\det h \equiv 0$, а значит уравнение (1.4) удовлетворяется при произвольных значениях всех показателей σ_i.

2) Если при некотором значении $i = i_0$ выполнено условие (1.32 а), то уравнение (1.4) удовлетворяется при произвольных значениях остальных показателей σ_i $(i \neq i_0)$.

3) Если условие (1.32 б) выполнено не менее чем при двух значениях i, то уравнение (1.4) удовлетворяется при произвольных значениях остальных показателей σ_i.

4) Если выполнено условие (1.32 в), то уравнение (1.4) также удовлетворяется. $\triangleright$

Теорема 1.8. *Пусть при всех $i \in I$ функции $v_i(x_i) \in \tilde{\Lambda}_i$. Тогда функция, определяемая выражением*

$$u(X) = \sum_{i=1}^{N} w_i(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} v_i(x_i) v_j(x_j)(1 - \delta_{ij}), \tag{1.37}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера) является решением уравнения (1.4), если выполнено одно из следующих условий:

1) *при всех $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению*

$$\hat{L}_i^2 w_i(x_i) = p_i(\hat{L}_i v_i(x_i))^2, \tag{1.38}$$

причем постоянные p_i удовлетворяют условию (1.19);

2) *при двух значениях $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению (1.38), причем $p_i = 1$ для этих значений i, а при остальных значениях $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ могут быть произвольными.*

$\triangleleft$ Используя выражение (1.37), находим элементы матрицы в левой части уравнения (1.4):

$$\hat{R}_{ij} u = \begin{cases} \psi_i(x_i), & i = j; \\ \varphi_i(x_i)\varphi_j(x_j), & i \neq j, \end{cases} \tag{1.39}$$

где

$$\varphi_i(x_i) = \hat{L}_i v_i(x_i), \quad \psi_i(x_i) = \hat{L}_i^2 w_i(x_i). \tag{1.39 а}$$

На основании (1.39) и (1.39 а), левую часть уравнения (1.4) представим в виде:

$$\det|\hat{R}u| = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{[\varphi_i(x_i)]^2}{T_i(x_i)}\right) \prod_{i=1}^{N} T_i(x_i), \tag{1.40}$$

где

$$T_i(x_i) = \psi_i(x_i) - [\varphi_i(x_i)]^2. \tag{1.40 а}$$

1. Если при всех $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению (1.38), то выражение (1.40) можно представить в виде

$$\det|\hat{R}u| = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i - 1}\right) \prod_{i=1}^{N} (p_i - 1)[\varphi_i(x_i)]^2. \tag{1.41}$$

Из (1.41) следует, что если постоянные p_i удовлетворяют условию (1.19), то $\det|\hat{R}u| \equiv 0$, т. е. уравнение (1.4) удовлетворяется.

2. Пусть $i_1, i_2 \in I$ — произвольно выбранные значения, $\tilde{I}(i_1, i_2) = I \setminus \{i_1, i_2\}$. Тогда выражение (1.40) можно записать так:

$$\det|\hat{R}u| = \left\{ T_{i_1}(x_{i_1}) T_{i_2}(x_{i_2}) \left(1 + \sum_{i \in \tilde{I}(i_1,i_2)} \frac{[\varphi_i(x_i)]^2}{T_i(x_i)}\right) + T_{i_1}(x_{i_1}) + T_{i_2}(x_{i_2}) \right\} \prod_{i \in \tilde{I}(i_1,i_2)} T_i(x_i). \tag{1.42}$$

Далее, если при $i = i_1$, $i = i_2$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению (1.38) и при этом $p_i = 1$, то из (1.39 а) и (1.40 а) получаем

$$T_{i_1}(x_{i_1}) \equiv 0, \quad T_{i_2}(x_{i_2}) \equiv 0. \tag{1.43}$$

Тогда из (1.42) и (1.43) следует $\det|\hat{R}u| \equiv 0$, так что и в этом случае функция (1.37) удовлетворяет уравнению (1.4). $\triangleright$

Теорема 1.9. *Пусть при некотором $i \in I_k \subset I$ функция $v_i(x_i) \in \Lambda_i$, а при всех $n \neq i$ $u_n(x_n)$ — произвольные функции. Тогда уравнение* (1.4) *имеет множество решений, определяемое выражением*

$$u(X) = \left(v_i(x_i) + \sum_{n \in \tilde{I}_k(i)} u_n(x_n)\right) \prod_{\substack{l=1,\\ l \neq k}}^{K} \sum_{n \in I_l} u_n(x_n), \tag{1.44}$$

где $\tilde{I}_k(i) = I_k \setminus \{i\}$.

$\triangleleft$ Используя выражение (1.44), найдем матричные элементы в левой части уравнения (1.4).

1. Если $i \in I_k$, $j \in I_k$, то при любых $j \neq i$ можно записать

$$\hat{L}_i \hat{L}_j \left(v_i(x_i) + \sum_{n \in \tilde{I}_k(i)} u_n(x_n)\right) = 0. \tag{1.45}$$

При $j = i$ (1.45) также выполняется, так как по условию теоремы $v_i(x_i) \in \Lambda_i$.

2. Если $i \in I_k$, $j \in I_{k_1}$, $k \neq k_1$, то

$$\hat{L}_i \hat{L}_j u(X) = \hat{L}_i v_i(x_i) \hat{L}_j u_j(x_j) \prod_{\substack{l=1,\\ l \neq k, k_1}}^{K} \sum_{n \in I_l} u_n(x_n) = 0 \tag{1.46}$$

в силу условия теоремы $v_i(x_i) \in \Lambda_i$. Из (1.45) и (1.46) следует, что при данном i и при любых $j \in I$ $\hat{R}_{ij}u \equiv 0$. Это означает, что i-я строка определителя в левой части (1.4) состоит только из нулевых элементов. Тогда, в силу известного свойства определителей [13], $\det|\hat{R}u| \equiv 0$. $\triangleright$

Теорема 1.10. *Пусть все операторы $\hat{L}_i$ имеют постоянные коэффициенты, т. е. $a_{mi}(x_i) = \mathrm{const}$ при всех $i \in I$, $1 \leqslant m \leqslant M_i$. Тогда уравнение* (1.4) *имеет решение типа бегущей волны*

$$u(X) = U(z), \quad z = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n, \tag{1.47}$$

где c_n — постоянные коэффициенты, причем функция $U(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\det\left|\sum_{m_i=1}^{M_i} \sum_{m_j=1}^{M_j} a_{m_i i} a_{m_j j} c_i^{m_i} c_j^{m_j} U^{(m_i+m_j)}(z)\right| = 0. \tag{1.48}$$

$\triangleleft$ Так как по условию теоремы $a_{mi}(x_i) = \mathrm{const}$ при всех $i \in I$, $1 \leqslant m \leqslant M_i$, то уравнение (1.4) инвариантно относительно преобразования сдвига, и поэтому имеет решение типа бегущей волны (1.47). Подставляя это решение в (1.4), получаем ОДУ (1.48) для функции $U(z)$. $\triangleright$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения типа бегущей волны.

Пусть при всех $i \in I$

$$\hat{L}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{M_i}. \tag{1.49}$$

Тогда уравнение (1.48) принимает вид

$$\det\left|c_i^{M_i} c_j^{M_j} U^{(M_i+M_j)}(z)\right| = 0. \tag{1.50}$$

Вынося общие множители в левой части (1.50) за знак определителя и учитывая, что $c_i \neq 0$ при всех $i \in I$, так как решение предполагается существенно зависящим от всех переменных, приводим уравнение к виду

$$\det\left|U^{(M_i+M_j)}(z)\right| = 0. \tag{1.51}$$

а) Если одновременно с (1.49) также выполнено условие $M_i = M$ при всех $i \in I$, то (1.51) преобразуется к виду

$$[U^{(2M)}(z)]^N \det|d_{ij}| = 0, \tag{1.51 a}$$

где $d_{ij} = 1$ при всех $i, j \in I$. Так как $\det|d_{ij}| = 0$, то из (1.51 а) следует, что в данном случае уравнению (1.4) удовлетворяет решение вида (1.47) с произвольными коэффициентами c_i и произвольной функцией $U(z)$, дифференцируемой $2M$ раз.

б) Пусть теперь M_i, вообще говоря, различны. Рассмотрим возможные решения уравнения (1.51). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что экспоненциальное решение $U(z) = U_0 \exp(z)$ удовлетворяет этому уравнению.

Покажем, что для данного случая имеется также степенное решение

$$U(z) = U_0 z^{\alpha}, \tag{1.52}$$

где α — неизвестный параметр, подлежащий определению. Подставляя функцию (1.52) в уравнение (1.51), получаем

$$U_0^N z^{N\alpha} \prod_{i=0}^{N} \left(\frac{c_i}{z}\right)^{2M_i} \det|Q(\alpha, M_i + M_j)| = 0 \tag{1.53}$$

или

$$\det|Q(\alpha, M_i + M_j)| = 0. \tag{1.54}$$

Здесь используется обозначение

$$Q(\alpha, m) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - m + 1).$$

Таким образом, в случае б) уравнение (1.51) имеет степенное решение (1.52), а возможные значения показателя α являются корнями уравнения (1.54).

2. Анализ неоднородного уравнения

Данный параграф посвящен исследовавнию решений уравнения (1.1) при ненулевой правой части. Простейшие решения неоднородного уравнения при определенных условиях имеют вид суммы функций от различных подмножеств переменных, что определяется следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *определяется выражением*

$$F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right) = \exp(\gamma u)\prod_{k=1}^{K} f_k(X_k)\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\beta_i}. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{k=1}^{K} u_k(X_k), \tag{2.2}$$

где функции $u_k(X_k)$ удовлетворяют уравнениям

$$\det|\hat{R}_k u_k| = b_k f_k(X_k)\exp(\gamma u_k)\prod_{i\in I_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\beta_i}, \tag{2.3}$$

причем постоянные b_k должны удовлетворять условию

$$\prod_{k=1}^{K} b_k = 1. \tag{2.3 a}$$

$\lhd$ Подставляя (2.2) в уравнение (1.1) и учитывая (2.1), нетрудно представить (1.1) в виде

$$\prod_{k=1}^{K}\left\{\det|\hat{R}_k u_k|\left(f_k(X_k)\exp(\gamma u_k)\prod_{i\in I_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\beta_i}\right)^{-1}\right\} = 1. \tag{2.4}$$

Левая часть уравнения (2.4) представлена в виде произведения K сомножителей, зависящих от разных подмножеств независимых переменных X_k. Поэтому, в соответствии с известной схемой разделения переменных [1, 2], из (2.4) следует, что функции $u_k(X_k)$ удовлетворяют уравнениям (2.3), а постоянные разделения b_k — условию (2.3 a). $\rhd$

Теорема 2.2. *Пусть $w_k(x_k) \in \tilde{\Lambda}_k$ при некотором $k \in I$, а $v_n(x_n) \in \Lambda_n$ при всех $n \neq k$, $n \in I$. Также пусть функция $u_0(X)$ удовлетворяет уравнению* (1.1), *причем предполагается, что правая часть этого уравнения зависит только от X, т. е. $F = f(X)$. Тогда любая функция, определяемая выражением*

$$u(X) = u_0(X) + w_k(x_k)\sum_{s=1}^{S}\prod_{n\in\Omega_s} v_n(x_n), \tag{2.5}$$

также является решением уравнения (1.1).

$\lhd$ Для функции $u(X)$, определяемой выражением (2.5), справедливы следующие соотношения:

$$\hat{L}_k^2 u(X) = \hat{L}_k^2 u_0(X) + \hat{L}_k^2 w_k(x_k)\sum_{s=1}^{S}\prod_{n\in\Omega_s} v_n(x_n) = \hat{L}_k^2 u_0(X), \tag{2.6 a}$$

$$\hat{L}_i\hat{L}_k u(X) = \hat{L}_i\hat{L}_k u_0(X) + \hat{L}_k w_k(x_k)\hat{L}_i v_i(x_i) \prod_{\substack{n\in\Omega_s,\\ n\neq i}} v_n(x_n) = \hat{L}_i\hat{L}_k u_0(X), \tag{2.6 б}$$

$$\hat{L}_i\hat{L}_j u(X) = \hat{L}_i\hat{L}_j u_0(X) + w_k(x_k)\hat{L}_i v_i(x_i)\hat{L}_j v_j(x_j) \prod_{\substack{n\in\Omega_s,\\ n\neq i,j}} v_n(x_n) = \hat{L}_i\hat{L}_j u_0(X), \tag{2.6 в}$$

причем в (2.6 б, в) $i \neq k$, $j \neq k$. Из (2.6 а), (2.6 б) и (2.6 в) следует, что

$$\det|\hat{R}u(X)| = \det|\hat{R}u_0(X)|. \tag{2.7}$$

Так как по условию теоремы правая часть (1.1) зависит только от X, то из (2.7) следует, что функция $u(X)$ также удовлетворяет уравнению (1.1). $\rhd$

Теорема 2.3. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *имеет вид*

$$F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i). \tag{2.8}$$

Пусть также при всех $i \in I$ функции $v_i(x_i) \in \tilde{\Lambda}_i$. Тогда функция, определяемая выражением (1.37), *является решением уравнения* (1.1), *если выполняется одно из следующих условий:*

1) *при всех $i \in I$ функции $w_i(x_i), v_i(x_i)$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\hat{L}_i^2 w_i(x_i) = p_i(\hat{L}_i v_i(x_i))^2, \quad \hat{L}_i^2 w_i(x_i) = \lambda_i f_i(x_i), \tag{2.9}$$

причем постоянные p_i, λ_i удовлетворяют условию

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i - 1}\right) \prod_{i=1}^{N} \left\{\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\lambda_i\right\} = 1; \tag{2.10}$$

2) *при всех $i \in I$, $i \neq j$, функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют системе уравнений* (2.9), *а функции $w_j(x_j)$, $v_j(x_j)$ удовлетворяют уравнению*

$$D_j\hat{L}_j^2 w_j(x_j) - B_j(\hat{L}_j v_j(x_j))^2 = \lambda_j f_j(x_j), \tag{2.11}$$

где коэффициенты D_j, B_j определяются выражениями

$$B_j = \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \frac{1}{p_i - 1} \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right), \quad D_j = B_j + \prod_{i=1, i\neq j}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right), \tag{2.11 а}$$

а постоянные λ_i удовлетворяют условию

$$\prod_{i=1}^{N} \lambda_i = 1. \tag{2.12}$$

$\lhd$ Подставив (1.37) в (1.1) и используя соотношения (1.40) и (2.8), уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{[\varphi_i(x_i)]^2}{T_i(x_i)}\right) \prod_{i=1}^{N} T_i(x_i) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i), \tag{2.13}$$

где $T_i(x_i)$ определяется выражением (1.40 а).

1. Пусть при всех $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют первому уравнению системы (2.9). Тогда уравнение (2.13) можно переписать так:

$$P \prod_{i=1}^{N} \frac{\psi_i(x_i)}{f_i(x_i)} = 1, \tag{2.14}$$

где

$$P = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i - 1}\right) \prod_{i=1}^{N} \left\{ \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \right\}. \tag{2.14 а}$$

Разделяя переменные в (2.14) и учитывая (1.39 а), получаем второе уравнение системы (2.9) и условие (2.10) для постоянных p_i, λ_i.

2. Пусть теперь выбрано некоторое значение $j \in I$, и при всех $i \in I$, $i \neq j$, функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют первому уравнению системы (2.9). В этом случае уравнение (2.13) принимает вид

$$\left(1 + \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \frac{1}{p_i - 1} + \frac{[\varphi_j(x_j)]^2}{T_j(x_j)}\right) T_j(x_j) \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \left\{ \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \psi_i(x_i) \right\} = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i) \tag{2.15}$$

или

$$\frac{D_j \psi_j(x_j) - B_j [\varphi_j(x_j)]^2}{f_j(x_j)} \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \frac{\psi_i(x_i)}{f_i(x_i)} = 1, \tag{2.16}$$

где коэффициенты D_j, B_j определяются выражениями (2.11 а). Разделяя переменные в (2.16) и учитывая (1.39 а), получаем второе уравнение системы (2.9) для функций $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ при всех $i \neq j$, уравнение (2.11) для функций $w_j(x_j)$, $v_j(x_j)$ и условие (2.12) для постоянных λ_i. $\triangleright$

Теорема 2.4. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *имеет вид*

$$F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right) = [u(X)]^{\gamma} \prod_{i=1}^{N} \left\{ f_i(x_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\beta_i} \right\}, \tag{2.17}$$

где γ, β_i — вещественные параметры. Пусть также выполнено одно из следующих условий:

1) *при всех $i \in I$ функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют переопределенным системам уравнений*

$$u_i(x_i) \hat{L}_i^2 u_i(x_i) = p_i (\hat{L}_i u_i(x_i))^2, \tag{2.18 а}$$

$$\hat{L}_i^2 u_i(x_i) = \lambda_i f_i(x_i) [u_i'(x_i)]^{\beta_i} [u_i(x_i)]^{\theta_i}. \tag{2.18 б}$$

Здесь постоянные p_i, λ_i удовлетворяют условию (2.10), *а θ_i определяется выражением*

$$\theta_i = \beta_\Sigma + \gamma + 1 - N - \beta_i, \quad \beta_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} \beta_n. \tag{2.19}$$

2) *при всех $i \in I$, $i \neq j$, функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют системам уравнений* (2.18 а), (2.18 б), *а функция $u_j(x_j)$ удовлетворяет уравнению*

$$D_j \hat{L}_j^2 u_j(x_j) - B_j \frac{(L_j u_j(x_j))^2}{u_j(x_j)} = \lambda_j f_j(x_j) [u_j'(x_j)]^{\beta_j} [u_j(x_j)]^{\theta_j}. \tag{2.20}$$

Здесь D_j, B_j определяются выражениями (2.11 а), *а постоянные λ_i удовлетворяют условию* (2.12). *Тогда функция $u(X)$, определяемая выражением* (1.20), *является решением уравнения* (1.1).

◁ Подставив выражение (1.20) в правую часть уравнения (1.1), нетрудно привести ее к виду

$$F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right) = \prod_{i=1}^{N} \left\{ f_i(x_i)[u_i'(x_i)]^{\beta_i}[u_i(x_i)]^{\beta_\Sigma+\gamma-\beta_i} \right\}, \tag{2.21}$$

где β_Σ определяется выражением (2.19). Используя рассуждения из доказательства теоремы 1.5, получаем, что левая часть уравнения (1.1) определяется выражением (1.21), причем выражение для $\det h$ запишется так:

$$\det h = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{[\varphi_i(x_i)]^2}{T_i(x_i)}\right) \prod_{i=1}^{N} T_i(x_i), \tag{2.22}$$

где $T_i(x_i)$ определяется выражением (1.40 а),

$$\psi_i(x_i) = \frac{\hat{L}_i^2 u_i(x_i)}{u_i(x_i)}, \quad \varphi_i(x_i) = \frac{\hat{L}_i u_i(x_i)}{u_i(x_i)}. \tag{2.22 а}$$

1. Пусть при всех $i \in I$ функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению (2.18 а). Тогда, учитывая (1.21), (2.22), (2.22 а), левую часть уравнения (1.1) можно представить так:

$$\det|\hat{R}u| = P \prod_{i=1}^{N} \left\{ [u_i(x_i)]^{N-1} \hat{L}_i^2 u_i(x_i) \right\}, \tag{2.23}$$

где P определяется выражением (2.14 а). На основании (2.21) и (2.22) уравнение (1.1) приводим к виду

$$P \prod_{i=1}^{N} \frac{\hat{L}_i^2 u_i(x_i)}{f_i(x_i)[u_i'(x_i)]^{\beta_i}[u_i(x_i)]^{\beta_\Sigma+\gamma-\beta_i-N+1}} = 1. \tag{2.23 а}$$

Разделяя переменные в (2.23) и учитывая (2.19), получаем уравнение системы (2.18 б) и условие (2.10) для постоянных p_i, λ_i.

2. Пусть теперь выбрано некоторое значение $j \in I$, и при всех $i \in I$, $i \neq j$, функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению (2.18 а). В этом случае левую часть уравнения (1.1) можно представить в виде (1.21), а выражение (2.22) для $\det h$ преобразовать так:

$$\det h = \left\{ D_j \psi_j(x_j) - B_j \big[\varphi_j(x_j)\big]^2 \right\} \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \psi_i(x_i), \tag{2.24}$$

где коэффициенты D_j, B_j определяются выражениями (2.11 а). Подставляя в уравнение (1.1) выражения (1.21), (2.21), (2.24) и разделяя переменные в полученном уравнении, получаем уравнение (2.18 б) для функций $u_i(x_i)$, и уравнение (2.20) для функции $u_j(x_j)$. ▷

Заключение

Таким образом, в данной работе исследован новый класс уравнений — многомерные детерминантные дифференциально-операторные уравнения вида (1.1). Левая часть этих уравнений представляет собой определитель с элементами, содержащими произведения линейных одномерных дифференциальных операторов произвольного порядка, а правая часть зависит от искомой функции и ее первых производных. Доказаны теоремы о решениях однородных и неоднородных детерминантных дифференциально-операторных уравнений. Доказаны теоремы о понижении размерности уравнения. Для однородного уравнения доказана теорема о взаимосвязи решений исходного уравнения и некоторого вспомогательного линейного уравнения, а также получено решение уравнения для случая, когда линейные операторы, входящие в его состав, имеют пропорциональные собственные значения. Получены решения типа бегущей волны, решения в виде обобщенных мономов, а также решения, выражающиеся через собственные функции линейных операторов, входящих в состав уравнения, и решения, выражающиеся через функции, принадлежащие ядрам этих операторов.

Литература

1. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения.—М.: Физматлит, 2002.—432 с.
2. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.—М.: Физматлит, 2005.—256 с.
3. *Zhdanov R. Z.* Separation of variables in the nonlinear wave equation // J. of Physics A: Mathematical and General.—1994.—Vol. 27, № 9.—P. L291–L297. DOI: 10.1088/0305-4470/27/9/009.
4. *Рахмелевич И. В.* О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика.—2015.—№ 1 (33).—С. 12–19. DOI: 10.17223/19988621/33/2.
5. *Рахмелевич И. В.* О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиоднородной функцией от производных // Изв. вузов. Математика.—2016.—№ 4.—С. 57–67.
6. *Рахмелевич И. В.* О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным // Уфимск. мат. журн.—2017.—Т. 9, № 1.—С. 98–109.
7. *Рахмелевич И. В.* Многомерное неавтономное уравнение, содержащее произведение степеней частных производных // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.—2018.— Т. 5 (63), вып. 1.—С. 119–130. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2018.113.
8. *Хабиров С. В.* Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа — Ампера // Мат. сб.—1990.—Т. 181, № 12.—С. 1607–1622.
9. *Кушнер А. Г.* Контактная линеаризация уравнений Монжа — Ампера и инварианты Лапласа // Докл. АН.—2008.—Т. 422, № 5.—С. 597–600.
10. *Рахмелевич И. В.* О решениях двумерного уравнения Монжа — Ампера со степенной нелинейностью по первым производным // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика.—2016.— № 4 (42).—С. 33–43. DOI: 10.17223/19988621/42/4.
11. *Рахмелевич И. В.* Двумерное детерминантное дифференциально-операторное уравнение // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика.—2019.—Т. 51, № 2.—С. 163–173. DOI: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-163-173.
12. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре.—М.: Наука, 1977.—288 с.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.—М.: Физматлит, 2004.—560 с.

Статья поступила 6 февраля 2020 г.

Рахмелевич Игорь Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 53–69

ON MULTIDIMENSIONAL DETERMINANT DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS

Rakhmelevich, I. V.[1]
[1] Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Abstract. We consider a class of multi-dimensional determinant differential-operator equations, the left side of which represents a determinant with the elements containing a product of linear one-dimensional differential operators of arbitrary order, while the right side of the equation depends on the unknown function and its first derivatives. The homogeneous and inhomogeneous determinant differential-operator equations are investigated separately. Some theorems on decreasing of dimension of equation are proved. The solutions obtained in the form of sum and product of functions in subsets of independent variables, in particular, of functions in one variable. In particular, it is proved that the solution of the equation under considering is the product of eigenfunctions of linear operators contained in the equation. A theorem on interconnection between the solutions of the initial equation and the solutions of some auxiliary linear equation is proved for the homogeneous equation. Also a solution of the homogeneous equation is obtained under the hypotheses that the linear differential operators contained in the equation have proportional eigenvalues. Traveling wave type solution is obtained, in particular, the solutions of exponential form and also in the form of arbitrary function in linear combination of independent variables. If the linear operators in the equation are homogeneous then the solutions in the form of generalized monomials are also found. Some partial solutions to inhomogeneous equation are obtained provided that the right-hand side contains only either independent variables or power or exponential nonlinearity in unknown function and the powers of its first derivatives.

Key words: determinant differential-operator equation, determinant, linear differential operator, eigenfunction, kernel of an operator, traveling wave type solution.

Mathematical Subject Classification (2010): 35G20.

For citation: *Rakhmelevich, I. V.* On Multidimensional Determinant Differential-Operator Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 53–69 (in Russian). DOI: 10.46698/g9113-3086-1480-k.

References

1. *Polyanin, A. D.* and *Zaytsev, V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Ed.*, Boca Raton–London, Chapman and Hall-CRC Press, 2012.
2. *Polyanin, A. D., Zaytsev, V. F.* and *Zhurov, A. I. Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods of Solving of Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics], Moscow, Fizmatlit, 2005, 256 p. (in Russian).
3. *Zhdanov, R. Z.* Separation of Variables in the Nonlinear Wave Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994, vol. 27, no. 9, pp. L291–L297. DOI: 10.1088/0305-4470/27/9/009.
4. *Rakhmelevich, I. V.* On Two-Dimensional Hyperbolic Equation with Power Non-linearity on the Derivatives, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2015, no. 1 (33), pp. 12–19 (in Russian).
5. *Rakhmelevich, I. V.* Reduction of Multi-Dimensional First Order Equations with Multi-Homogeneous Function of Derivatives, *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, no. 4, pp. 47–55. DOI: 10.3103/S1066369X16040071.
6. *Rakhmelevich, I. V.* On Multi-Dimensional Partial Differential Equations with Power Nonlinearities in First Derivatives, *Ufa Mathematical Journal,* 2017, vol. 9, no. 1, pp. 98–108. DOI: 10.13108/2017-9-1-98.
7. *Rakhmelevich, I. V.* A Multidimensional Nonautonomous Equation Containing a Product of Powers of Partial Derivatives, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics,* 2018, vol. 51, pp. 87–94. DOI: 10.3103/S1063454118010090.

8. *Khabirov, S. V.* Nonisentropic One-Dimensional Gas Motions Constructed with by Means of Contact Group of the Nonhomogeneous Monge–Ampere Equation, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 71, no. 2, pp. 447–462. DOI: 10.1070/SM1992v071n02ABEH001405.
9. *Kushner, A. G.* Contact Linearization of the Monge–Ampere Equations and Laplace Invariants, *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2008, vol. 78, no. 2, pp. 751–754 (in Russian).
10. *Rakhmelevich, I. V.* On the Solutions of Two-dimensional Monge–Ampere Equation with Power-Law Non-Linearity on the First Derivatives, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2016, no. 4 (42), pp. 33–43 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/42/4.
11. *Rakhmelevich, I. V.* Two-Dimensional Determinant Differential-Operator Equation, *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo universiteta. Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics], 2019, vol. 51, no. 2, pp. 163–173 (in Russian). DOI: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-163-173.
12. *Faddeev, D. K. and Sominsky, I. S. Sbornik zadach po vyshey algebre* [Collection of Problems on Highest Algebra], Moscow, 1977, 288 p. (in Russian).
13. *Gantmakher, F. R. Teoriya matritz* [Theory of Matrices], Moscow, Fizmatlit, 2004, 560 p. (in Russian).

Received February 6, 2020

Igor V. Rakhmelevich
Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia,
Assosiate Professor
E-mail: `igor-kitpd@yandex.ru`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 70–82

УДК 517.958+517.968.4
DOI 10.46698/o2774-2458-4152-d

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ[#]

Х. А. Хачатрян[1,2], А. С. Петросян[1,3]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;
[2] Институт математики НАН Республики Армения,
Армения, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/5;
[3] Национальный аграрный университет Армении,
Армения, 0009, Ереван, Теряна, 74

E-mail: `Khach82@rambler.ru`, `Haykuhi25@mail.ru`

Аннотация. Работа посвящена изучению и решению одной граничной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка на положительной полупрямой с некомпактным интегральным оператором Гаммерштейна. Указанная задача возникает в кинетической теории плазмы. В частности, соответствующим нелинейным интегро-дифференциальным уравнением описывается задача стационарного распределения электронов в полубесконечной плазме при наличии внешнего потенциального электрического поля. Данная граничная задача выводится из нелинейного модельного уравнения Больцмана, где роль неизвестной функции играет первая координата электрического поля. В зависимости от значений физического параметра, входящего в уравнение, в работе доказываются конструктивные теоремы существования однопараметрических семейств положительных решений в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$. Исследуется также асимптотическое поведение построенных решений на бесконечности. Доказательства указанных утверждений основаны на построении однопараметрического семейства конусных отрезков, которые соответствующий нелинейный монотонный оператор сверточного типа оставляет инвариантным. Далее, используя некоторые априорные оценки представляющие самостоятельный интерес, а также результаты из теории линейных консервативных однородных интегральных уравнений Винера — Хопфа, осуществляется изучение асимптотических свойств полученных решений. В конце статьи приводятся важные приложения и конкретные примеры.

Ключевые слова: монотонность, граничная задача, ядро, нелинейность, последовательные приближения.

Mathematical Subject Classification (2010): 45J05, 45G10.

Образец цитирования: *Хачатрян Х. А., Петросян А. С.* О положительных решениях граничной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения на полубесконечном интервале // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 70–82. DOI: 10.46698/o2774-2458-4152-d.

[#] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований, проект № 19-11-00223.

1. Введение

Рассмотрим следующую граничную задачу для нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dE}{d\tau} + \mu \int\limits_0^\infty K(\tau - t) h(t, E(t))\, dt = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), & (1) \\ E(+\infty) := \lim\limits_{\tau \to +\infty} E(\tau) = 0 & (2) \end{cases}$$

относительно искомой функции $E(\tau)$. Решение интегро-дифференциального уравнения (1) мы будем искать в следующем пространстве Соболева:

$$W_1^1(\mathbb{R}^+) := \{\varphi : \varphi^{(k)} \in L_1(\mathbb{R}^+),\ k = 0, 1\},$$

где через $\varphi^{(k)}$ обозначена k-ая производная функции φ.

В уравнении (1) μ — положительный числовой параметр, а ядро K и нелинейность h удовлетворяют определенным условиям (см. ниже в формулировках основных теорем). Задача (1)–(2) возникает в кинетической теории плазмы (см. [1–3] и ссылки в них). В частности, задача (1)–(2) выводится из стационарного уравнения Больцмана и описывает стационарное распределение электронов в полубесконечной плазме, ограниченной плоскостью $x = 0$, при наличии чисто потенциального внешнего электрического поля. В уравнении (1) роль неизвестной функции $E(x)$ играет первая координата электрического поля $\vec{E}(x) = (E(x), 0, 0)$. Отметим, что задача (1)–(2) в линейном приближении достаточно подробно была исследована в работе [3]. В случае когда ядро K является вполне монотонной функцией и допускает определенное представление в виде суперпозиции экспонент при различных ограничениях на нелинейность h, задача (1)–(2) изучена в работах [4, 5].

В настоящей работе, при более слабых ограничениях на h и для общих консервативных ядер K, мы займемся построением однопараметрических семейств положительных решений в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$. Будет изучено также асимптотическое поведение построенных решений в бесконечности в зависимости от значения свободного параметра μ.

В конце будут приведены частные примеры ядра K и нелинейности h, удовлетворяющие всем условиям доказанных теорем.

2. Обозначения, вспомогательные факты и формулировка основных результатов

Пусть ядро K в уравнении (1) удовлетворяет следующим условиям:

I) $K(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1$, где $C_M(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}$,

II) существует число $a > 0$ такое, что для всех $\alpha \in (0, a)$

$$e^{\alpha x} \int\limits_x^\infty K(t) dt \in L_1(\mathbb{R}),$$

III) характеристическое уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)(\alpha t - 1) e^{\alpha t} dt = 0 \tag{3}$$

на интервале $(0, a)$ имеет единственное решение, причем считается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{\alpha t} K(t) dt < +\infty.$$

Рассмотрим следующее семейство функций $\{T_\alpha(x)\}_{\alpha \in (0,a)}$:

$$T_\alpha(x) := \mu e^{\alpha x} \int_{x}^{\infty} K(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},\ \alpha \in (0, a).$$

Из условия II) сразу следует, что $T_\alpha \in L_1(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, a)$.

Постараемся число $\alpha \in (0, a)$ выбрать так, чтобы

$$\|T_\alpha\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |T_\alpha(x)|\, dx = 1.$$

В силу условия I) будем иметь

$$\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} \int_{x}^{\infty} K(t)\, dt\, dx = 1. \tag{4}$$

Используя теорему Фубини [6] с учетом I) и II) из (4), получим

$$\frac{\mu}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{\alpha t}\, dt = 1, \quad \alpha \in (0, a). \tag{5}$$

Итак, для каждого параметра $\mu > 0$ мы должны найти число $\alpha \in (0, a)$ такое, что имело бы место соотношение (5).

С этой целью рассмотрим функцию

$$\mu(\alpha) = \frac{\alpha}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{\alpha t} dt}, \quad \alpha \in (0, a). \tag{6}$$

Заметим, что

$$\mu(+0) := \lim_{\alpha \to 0^+} \mu(\alpha) = 0$$

и

$$\mu \uparrow \text{ на } (0, \alpha_0] \text{ и } \mu \downarrow \text{ на } [\alpha_0, a),$$

где α_0 является единственным решением характеристического уравнения (3). Наибольшее значение функции $\mu(\alpha)$ равно $\frac{\alpha_0}{\int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{\alpha_0 t} dt} := \mu_0$. Итак, для $\alpha \in (0, a)$ имеет место

$$0 < \mu(\alpha) \leqslant \mu_0. \tag{7}$$

Обозначим через $\alpha_1 = \alpha_1(\mu)$ обратную функцию к функции $\mu(\alpha)$ на интервале $(0, \alpha_0)$ и через $\alpha_2 = \alpha_2(\mu)$ — обратную функцию к функции $\mu(\alpha)$ на интервале (α_0, a).

Зафиксируем числа $\alpha_1(\mu)$, α_0 и $\alpha_2(\mu)$ и относительно функции h предположим выполнение следующих условий:

1) при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}^+$ функция $h(t,u)$ монотонно возрастает по u на $\mathbb{R}^+$,

2) функция $h(t,u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, т. е. при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $h(t,u)$ измерима по t и почти при всех $t \in \mathbb{R}^+$ данная функция непрерывна по u на $\mathbb{R}^+$,

3) существует измеримая и неотрицательная функция $\beta(t)$, определенная на $\mathbb{R}^+$, такая, что

$$\beta^*(t) := \beta(t)e^{\alpha_0 t} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+), \quad m_1(\beta^*) := \int\limits_0^\infty t\beta^*(t)\,dt < +\infty,$$

и функция h, удовлетворяющая следующему двойному неравенству:

$$u \leqslant h(t,u) \leqslant u + \beta(t), \quad u \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{8}$$

Теперь мы готовы сформулировать основные результаты настоящей работы.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть ядро K и нелинейность h удовлетворяют условиям* I)–III) *и* 1)–3) *соответственно. Тогда, при $\mu \in (0,\mu_0)$ задача* (1)–(2) *в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ обладает однопараметрическим семейством положительных решений $\{E_\gamma(x)\}_{\gamma\in(0,+\infty)}$, причем для любого значения параметра $\gamma \in (0,+\infty)$ имеет место следующее асимптотическое разложение для решения $E_\gamma(x)$:*

$$E_\gamma(x)e^{\alpha_1(\mu)x} = \gamma + o(1), \quad x \to +\infty.$$

Теорема 2. *При условиях* I)–III), 1)–3)*, если $\mu = \mu_0$, задача* (1)–(2) *в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ обладает также однопараметрическим семейством положительных решений $\{\tilde{E}_\gamma(x)\}_{\gamma\in(0,+\infty)}$, причем для любого $\gamma \in (0,+\infty)$*

$$\tilde{E}_\gamma(x)e^{\alpha_0 x} = \gamma x + o(x), \quad x \to +\infty.$$

Замечание 1. Следует отметить, что в случае когда $\mu > \mu_0$, вопрос существования положительных решений в пространстве $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ для граничной задачи (1)–(2) до сих пор остается открытым.

3. Доказательство основных результатов

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующие линейные однородные и неоднородные интегральные уравнения Винера — Хопфа:

$$S(x) = \int\limits_0^\infty T_\alpha(x-t)S(t)\,dt, \quad x \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\varphi(x) = g(x) + \int\limits_0^\infty T_\alpha(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad x \geqslant 0, \tag{10}$$

относительно искомых функций S и φ соответственно, где $g(x)$ — неотрицательная ограниченная и суммируемая функция на $[0,+\infty)$, причем

$$m_1(g) := \int_0^\infty x g(x)\,dx < +\infty. \tag{11}$$

Следуя обозначениям работы [7] через $\nu(T_\alpha)$ обозначим первый момент ядра T_α :

$$\nu(T_\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} x T_\alpha(x)\,dx.$$

Ниже убедимся, что

$$\nu(T_{\alpha_1(\mu)}) < 0, \tag{12}$$

$$\nu(T_{\alpha_0}) = 0, \tag{13}$$

$$\nu(T_{\alpha_2(\mu)}) > 0. \tag{14}$$

Действительно, из представления ядра $T_\alpha(x)$ в силу теоремы Фубини будем иметь

$$\nu(T_\alpha) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} x e^{\alpha x} \int_x^\infty K(t)\,dt\,dx$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \int_{-\infty}^{t} x e^{\alpha x}\,dx\,dt = \frac{\mu}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} K(t)(\alpha t - 1)e^{\alpha t}\,dt. \tag{15}$$

С другой стороны, из (6) следует, что

$$\mu'(\alpha) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)(1-\alpha t)e^{\alpha t}\,dt}{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{\alpha t}\,dt\right)^2}, \qquad \alpha \in (0,a). \tag{16}$$

Так как $\mu'(\alpha_1) > 0$, $\mu'(\alpha_0) = 0$, $\mu'(\alpha_2) < 0$ (см. § 2), то из (15) сразу следует соотношения (12)–(14).

Из результатов работы [7], с учетом соотношений (12)–(13), немедленно следует, что

A) при $\alpha = \alpha_1(\mu)$ уравнение (9) обладает положительным монотонно возрастающим непрерывным и ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $S^*(x)$, а уравнение (10) суммируемым неотрицательным и ограниченным решением $\varphi^*(x)$;

B) при $\alpha = \alpha_0$ уравнение (9) обладает положительным монотонно возрастающим непрерывным и неограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $\tilde{S}(x)$, причем $\tilde{S}(x)$ имеет линейный рост $\tilde{S}(x) = x + o(x)$, при $x \to +\infty$, а уравнение (10) — ограниченным и неотрицательным решением $\tilde{\varphi}(x)$.

Рассмотрим теперь следующее вспомогательное нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна на полуоси:

$$F(x) = \int_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)e^{\alpha_1 t} h(t, e^{-\alpha_1 t}F(t))\,dt, \quad x \geqslant 0, \tag{17}$$

относительно искомой функции $F(x)$, где

$$T_{\alpha_1}(z) = \mu e^{\alpha_1(\mu)z} \int\limits_z^\infty K(t)\,dt, \quad z \in \mathbb{R},\ \alpha_1 = \alpha_1(\mu). \tag{18}$$

Для уравнения (17) введем следующее семейство последовательных приближений:

$$\begin{gathered} F_{n+1}^\gamma(x) = \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\, e^{\alpha_1 t} h(t, e^{-\alpha_1 t} F_n^\gamma(t))\,dt, \quad x \geqslant 0, \\ F_0^\gamma(x) = \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad \gamma > 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Индукцией по n сперва докажем, что при каждом $\gamma > 0$

$$F_n^\gamma(x) \uparrow \text{ по } n. \tag{20}$$

Действительно, учитывая условие 3), положительность ядра K, а также утверждение A), из (19) получим

$$\begin{aligned} F_1^\gamma(x) &= \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) e^{\alpha_1 t} h\left(t, e^{-\alpha_1 t} \frac{\gamma S^*(t)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)}\right) dt \\ &\geqslant \frac{\gamma}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) S^*(t)\,dt = \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} = F_0^\gamma(x). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $F_n^\gamma(x) \geqslant F_{n-1}^\gamma(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда с учетом монотонности функции $h(t,u)$ (по u) и положительности ядра K из (19) будем иметь

$$F_{n+1}^\gamma(x) \geqslant \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\, e^{\alpha_1 t} h\big(t, e^{-\alpha_1 t} F_{n-1}^\gamma(t)\big)\,dt = F_n^\gamma(x), \quad x \geqslant 0,\ \gamma > 0.$$

Теперь рассмотрим линейное неоднородное уравнение (10), в случае когда $\alpha = \alpha_1(\mu)$ и

$$g(x) = \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) e^{\alpha_1 t} \beta(t)\,dt, \quad x \geqslant 0. \tag{21}$$

Очевидно, что $g(x) \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Убедимся теперь, что

$$g \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+), \quad m_1(g) < +\infty. \tag{22}$$

Учитывая условие (4) и 3) из (21) для произвольного $r > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int\limits_0^r g(x)\,dx &= \int\limits_0^r \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\, e^{\alpha_1 t} \beta(t)\,dt\,dx \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) \beta^*(t)\,dt\,dx \\ &= \int\limits_0^\infty \beta^*(t) \int\limits_0^r T_{\alpha_1}(x-t)\,dx\,dt \leqslant \int\limits_0^\infty \beta^*(t)\,dt < +\infty, \end{aligned}$$

$$\int\limits_0^r xg(x)dx \leqslant \int\limits_0^r x\int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\beta^*(t)\,dt\,dx = \int\limits_0^\infty \beta^*(t)\int\limits_0^r T_{\alpha_1}(x-t)x\,dx\,dt$$

$$= \int\limits_0^\infty \beta^*(t)\int\limits_{-t}^{r-t} T_{\alpha_1}(y)(t+y)\,dy\,dt \leqslant \int\limits_0^\infty t\beta^*(t)\,dt + \int\limits_0^\infty \beta^*(t)\,dt\int\limits_{-\infty}^\infty |y|T_{\alpha_1}(y)\,dy < +\infty,$$

ибо

$$\int\limits_{-\infty}^\infty |y|T_{\alpha_1}(y)\,dy = \mu\int\limits_{-\infty}^\infty |y|e^{\alpha_1 y}\int\limits_y^\infty K(t)\,dt\,dy = \mu\int\limits_{-\infty}^\infty K(t)\int\limits_{-\infty}^t |y|e^{\alpha_1 y}\,dy\,dt < +\infty$$

(в силу того, что $\int_{-\infty}^\infty |t|e^{\alpha_1 t}K(t)\,dt < +\infty$). Устремляя $r\to+\infty$, в последнем неравенстве приходим к следующим утверждениям:

$$g\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad m_1(g) < +\infty.$$

Ограниченность функции g на $\mathbb{R}^+$ следует из оценки

$$g(x) \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\beta^*(t)\int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\,dt \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\beta^*(t) < +\infty.$$

Теперь индукцией докажем, что

$$F_n^\gamma(x) \leqslant \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(x),\quad x\geqslant 0,\ \gamma>0,\ n=0,1,2,\ldots, \tag{23}$$

где φ^* является решением уравнения (10), в случае когда $\alpha=\alpha_1(\mu)$, а $g(x)$ допускает представление (21).

При $n=0$ неравенство (23) сразу следует из определения нулевого приближения и из неотрицательности функции $\varphi^*(x)$. Предположим, что (23) имеет место при некотором натуральном n. Тогда, учитывая условие 3), структуру (21) свободного члена g и положительность ядра T_{α_1}, из (19) будем иметь

$$F_{n+1}^\gamma(x) \leqslant \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)e^{\alpha_1 t}h\left(t, e^{-\alpha_1 t}\left(\frac{\gamma S^*(t)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(t)\right)\right)dt$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)e^{\alpha_1 t}\left(e^{-\alpha_1 t}\left(\frac{\gamma S^*(t)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(t)\right) + \beta(t)\right)dt$$

$$= \frac{\gamma}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)}\int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)S^*(t)\,dt + \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\varphi^*(t)\,dt + \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)e^{\alpha_1 t}\beta(t)\,dt$$

$$= \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\varphi^*(t)\,dt + g(x) = \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(x).$$

Индукцией по n легко можно убедиться, что при всяком $\gamma>0$

$$F_n^\gamma \in C(\mathbb{R}^+),\quad n=0,1,2,\ldots \tag{24}$$

Действительно, непрерывность нулевого приближения сразу следует из непрерывности функции $S^*(x)$ (см. утверждение A)). Если предполагать, что $F_n^\gamma(x)$ непрерывна по x при некотором $n \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{R}^+$, то в силу непрерывности ядерной функции $T_{\alpha_1}(x)$ на $\mathbb{R}$, свойств функции $\beta(t)$ (см. условие 3)) и неравенства $h(t,u) \leqslant u + \beta(t)$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, из (19) следует непрерывность функции $F_{n+1}^\gamma(x)$ на $\mathbb{R}^+$.

Таким образом, в силу (20) и (23) заключаем, что последовательность непрерывных функций $\{F_n^\gamma(x)\}_{n=0}^\infty$ при каждом фиксированном $\gamma > 0$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} F_n^\gamma(x) = F^\gamma(x),$$

причем предельная функция удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$\frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} \leqslant F^\gamma(x) \leqslant \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,\ \gamma > 0. \tag{25}$$

Из непрерывности ядра T_{α_1} на $\mathbb{R}$, свойств функции $\beta(t)$ (см. условие 3)), неравенства $h(t,u) \leqslant u + \beta(t)$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, и оценки (25) сразу следует, что $F^\gamma \in C(\mathbb{R}^+)$ при всяком $\gamma > 0$. Из условия 2) в силу теоремы Б. Леви [6] следует, что при каждом $\gamma > 0$ функция $F^\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (17).

Заметим теперь, что тогда функции вида

$$E_\gamma(x) := e^{-\alpha_1(\mu)x} F^\gamma(x), \quad \gamma > 0, \tag{26}$$

являются решениями уравнения

$$E(x) = \mu \int\limits_0^\infty T(x-t) h(t, E(t))\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{27}$$

где

$$T(z) := \int\limits_z^\infty K(t) dt, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Действительно, в силу непрерывности ядра K из (27) и (17) имеем

$$\mu \int\limits_0^\infty T(x-t) h(t, E_\gamma(t))\, dt = \mu \int\limits_0^\infty T(x-t) h(t, e^{-\alpha_1(\mu)t} F^\gamma(t))\, dt$$

$$= e^{-\alpha_1(\mu)x} \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) e^{\alpha_1(\mu)t} h(t, e^{-\alpha_1(\mu)t} F^\gamma(t))\, dt = e^{-\alpha_1(\mu)x} F^\gamma(x) = E_\gamma(x), \quad \gamma > 0.$$

Так как $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R})$, то из (28) следует, что существует

$$T'(x) = -K(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R}).$$

С другой стороны, в силу неравенства $h(t,u) \leqslant u + \beta(t)$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, и условия 1) имеем

$$\mu \int\limits_0^\infty \big|T'(x-t)\big| h(t, E_\gamma(t))\, dt \leqslant \mu \int\limits_0^\infty K(x-t)(E_\gamma(t) + \beta(t))\, dt$$

$$\leqslant \mu \int\limits_0^\infty K(x-t)\, e^{-\alpha_1 t} F^\gamma(t)\, dt + \mu \sup_{t\geqslant 0} \beta(t) \leqslant \mu(\sup_{x\geqslant 0} F^\gamma(x) + \sup_{x\geqslant 0} \beta(x)) < +\infty,$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |T'(x-t)|h(t,E_\gamma(t))dtdx \leqslant \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(x-t)(e^{-\alpha_1 t}F^\gamma(t)+\beta(t))\,dt\,dx$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty e^{-\alpha_1 t}F^\gamma(t)\int\limits_{-\infty}^\infty K(y)dydt + \int\limits_0^\infty \beta(t)\int\limits_0^\infty K(x-t)\,dx\,dt \leqslant \frac{\sup\limits_{x\geqslant 0} F^\gamma(x)}{\alpha_1} + \int\limits_0^\infty \beta(t)\,dt < +\infty.$$

Следовательно, согласно теореме о дифференцировании под знаком интеграла (см. [8]), можем утверждать, что функции $E_\gamma \in W_1^1(\mathbb{R}^+)$, $\gamma > 0$, и удовлетворяют граничной задаче (1)–(2).

Заметим теперь, что задаваемая посредством формулы (21) функция $g(x)$ обладает также следующим свойством:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0. \tag{29}$$

Действительно, так как $\beta^* \in L_1(\mathbb{R}^+)\cap M(\mathbb{R}^+)$, а $T_{\alpha_1} \in L_1(\mathbb{R})\cap C_M(\mathbb{R})$, из [9, лемма 5] следует, что $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Используя [9, лемма 5], соотношение (29) и тот факт, что $\varphi^* \in L_1(\mathbb{R}^+)\cap M(\mathbb{R}^+)$, из (10) (при $\alpha = \alpha_1(\mu)$) получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi^*(x) = 0. \tag{30}$$

Учитывая (29), (30), (25) и тот факт, что $S^*(x) \uparrow \sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)$, когда $x \to +\infty$, можем утверждать, что $E_\gamma(x)e^{\alpha_1 x} = \gamma + o(1)$, когда $x \to +\infty$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся результаты пункта B) для уравнений (9) и (10) при $\alpha = \alpha_0$. Доказательство осуществляется аналогичными рассуждениями с единственным исключением: вместо вспомогательного уравнения (17) рассматривается нелинейное интегральное уравнение вида

$$F(x) = \int\limits_0^\infty T_{\alpha_0}(x-t)e^{\alpha_0 t}h(t, e^{-\alpha_0 t}F(t))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{31}$$

и вместо последовательных приближений (19) здесь берутся следующие итерации:

$$F_{n+1}^\gamma(x) = \int\limits_0^\infty T_{\alpha_0}(x-t)e^{\alpha_0 t}h(t, e^{-\alpha_0 t}F_n^\gamma(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$F_0^\gamma(x) = \gamma\tilde{S}(x), \quad n = 0,1,2,\ldots,\ \gamma > 0,$$

где $\tilde{S}(x)$ является решением однородного линейного интегрального уравнения (9) при $\alpha = \alpha_0$ (см. утверждение B)). $\rhd$

Замечание 2. Рассмотрим следующий частный пример: $K(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда характеристическое уравнение (3) принимает вид:

$$3\alpha^2 - 1 = 0, \quad \alpha \in (0,1)$$

($\alpha \in (0,1)$ для выполнения условии II)).

В данном случае $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1)$, а функция $\mu(\alpha)$ допускает следующее представление

$$\mu(\alpha) = \alpha(1-\alpha^2), \quad \alpha \in (0,1).$$

Заметим, что $\mu\uparrow$ на $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\mu\downarrow$ на $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$, причем $\mu_0=\mu(\alpha_0)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

В этом случае первый момент ядра T_α допускает следующее преставление:

$$\nu(T_\alpha)=\frac{\mu(3\alpha^2-1)}{\alpha^2(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2},$$

где

$$T_\alpha(x)=\begin{cases}\frac{\mu}{2}e^{-(1-\alpha)x}, & x\geqslant 0,\\ \frac{\mu}{2}e^{\alpha x}(1-e^x)+\frac{\mu}{2}e^{\alpha x}, & x<0.\end{cases}$$

Ниже, в частном случае, когда

$$K(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad x\in\mathbb{R},\ h(t,u)\equiv u,$$

приведем явный вид решения граничной задачи (1)–(2).

Громоздкие, но простые вычисления показывают, что при $\mu=\mu_0=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$$E(x)=c_1xe^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x},\quad x\in\mathbb{R}^+,$$

а при $\mu<\mu_0=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ решение задачи (1)–(2) допускает следующее представление

$$E(x)=c_1e^{-\frac{\left(A+\sqrt{A^2-\frac{4\mu}{A}}\right)x}{2}}+c_2e^{\frac{-A+\sqrt{A^2-\frac{4\mu}{A}}}{2}x},$$

где

$$A=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2}\mu\right).$$

Следует отметить, что при $\mu>\mu_0$ мы получаем знакопеременные решения, которые не имеют физического смысла.

Заметим, что в случае $\mu\in\left(0,\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ полученные функции удовлетворяют граничной задаче (1)–(2), если $c_1=-\frac{1-\alpha_2(\mu)}{1-\alpha_1(\mu)}c_2$, где

$$\alpha_1(\mu)=\frac{A-\sqrt{A^2-\frac{4\mu}{A}}}{2},\quad \alpha_2(\mu)=\frac{A+\sqrt{A^2-\frac{4\mu}{A}}}{2}.$$

В том случае, когда $\mu=\mu_0=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, константы c_1 и c_2 должны удовлетворять соотношению $c_2=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}c_1$.

Следовательно, в данном случае однопараметрическим семейством положительных и ограниченных решений служат функции:

a) при $\mu\in\left(0,\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$,

$$E_\gamma(x)=\gamma\left(e^{-\alpha_1(\mu)x}-\frac{1-\alpha_2(\mu)}{1-\alpha_1(\mu)}e^{-\alpha_2(\mu)x}\right),\quad x\in\mathbb{R}^+,\ \gamma>0,$$

b) при $\mu=\frac{2}{3\sqrt{3}}$,

$$E_\gamma(x)=\gamma e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right),\quad \gamma>0,\ x\in\mathbb{R}^+$$

Заметим также, что в этом случае, когда $\mu \to +0$, число $A \to 1$, а решение $E_\mu(x)$, при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$, стремится к γ, ибо $\alpha_1(+0) = 0$, $\alpha_2(+0) = 1$.

4. Примеры ядра K и нелинейности h

В приложениях часто встречаются следующие ядерные функции K [1–3]:

I) $K(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$,

II) $K(x) = \int\limits_1^\infty e^{-|x|s} \frac{1}{s^2}\, ds$, $x \in \mathbb{R}$,

III) $K(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Легко можно убедиться, что для выше приведенных ядерных функций K выполняются все условия доказанных теорем. Подробно остановимся на функции III). В этом случае функция $\mu(\alpha)$ допускает следующее представление:

$$\mu(\alpha) = \alpha e^{-a\alpha^2}, \quad \alpha > 0,$$

и ее точка максимума $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2a}}$. Кроме того, $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2ae}}$ и $\alpha_1 = \alpha_1(\mu)$ является обратной функцией функции $\mu(\alpha)$ на интервале $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$.

Приведем также несколько примеров нелинейности $h(t, u)$ и функции $\beta(t)$:

a) $h(t, u) = \sqrt{u(u + \beta(t))}$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$,

b) $h(t, u) = u + \frac{u\beta(t)}{u+1}$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$,

c) $h(t, u) = u\sqrt{1 + \frac{\beta(t)}{u+c}}$, $c > 0$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$,

ε_1) $\beta(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}^+$,

ε_2) $\beta(t) = e^{-(\alpha_0+æ)t}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $æ > 0$, — параметр,

ε_3) $\beta(t) = te^{-2\alpha_0 t}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Отметим, что для примеров a)–c) выполнение условий 1)–3) можно доказать прямой проверкой.

Литература

1. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. М.* Физическая кинетика. Т. 10.—М.: Наука, 1979.—528 с.
2. *Абрикосов А. А.* Основы теории металла.—М.: Наука, 1987.—520 с.
3. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* О разрешимости одной краевой задачи физической кинетики // Изв. НАН Армении. Математика.—2006.—Т. 41, № 6.—С. 65–74.
4. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости в $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ одного нелинейного интегро-диффренциального уравнения с некомпактным оператором Гаммерштейна — Немыцкого // Алгебра и анализ.—2012.—Т. 24, № 1.—С. 223–247.
5. *Khachatryan Kh. A., Terdjyan T. E. and Petrosyan H. S.* On the solvability of one class of boundary-value problems for non-linear integro-differential equation in kinetic theory of plazma // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.—2013.—Т. 6, № 4.—С. 451–461.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1980.
7. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ.—М.: ВИНИТИ, 1984.—Т. 22.—С. 175–244.
8. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды.—М.: Наука, 1965.
9. *Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // Мат. сб.—2007.—Т. 198, № 7.—С. 45–62. DOI: 10.4213/sm1483.

Статья поступила 31 марта 2020 г.

Хачатрян Хачатур Агавардович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
основной исполнитель научного проекта №19-11-00223
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;
Институт математики НАН Республики Армения,
Армения, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/5
ведущий научный сотрудник отдела методов математической физики
E-mail: Khach82@rambler.ru

Петросян Айкануш Самвеловна
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
исполнитель научного проекта №19-11-00223
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;
Национальный аграрный университет Армении,
доцент кафедры высшей математики и физики
Армения, 0009, Ереван, Теряна, 74
E-mail: Haykuhi25@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 70–82

ON POSITIVE SOLUTIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION ON A SEMI-INFINITE INTERVAL

Khachatryan, Kh. A.[1,2] and Petrosyan, H. S.[1,3]

[1] Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian;
[2] Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia,
24/5 Marshall Baghramian Ave., Yerevan 375019, Armenia;
[3] Armenian National Agrarian University,
74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia
E-mail: Khach82@rambler.ru, Haykuhi25@mail.ru

Abstract. The article is devoted to the study of a boundary value problem for a first order nonlinear integro-differential equation on the positive semi axis with a Hammerstein type noncompact integral operator. Such a problem arises in kinetic theory of plasma. In particular, this nonlinear integro-differential equation describes the problem of stationary distribution of electrons in semi infinite plasma in the presence of an external potential electric field. This boundary value problem can be derived from nonlinear Boltzmann model equation, where the role of unknown function plays the first coordinate of an electric field. Depending on a physical parameter, involved in the equation, some constructive existence theorems of one-parametric family of positive solutions in Sobolev's $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ space are proved. The asymptotic behavior of the constructed solutions at infinity is also investigated. The proofs of the above statements are based on the construction of a one-parametric family of conic segments, which are invariant with respect to a convolution type nonlinear monotone operator. Further, using some a priori estimates, which are of independent interest, as well as some results from linear theory of conservative homogenous Wiener–Hopf integral equations, the asymptotic properties of obtained results are studied. At the end of the article, some important applications and examples are presented.

Key words: monotony, boundary value problem, kernel, nonlinearity, successive approximation.

Mathematical Subject Classification (2010): 45J05, 45G10.

For citation: *Khachatryan, Kh. A. and Petrosyan, H. S.* On Positive Solutions of the Boundary Value Problem for a Nonlinear Integro-Differential Equation on a Semi-Infinite Interval, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 70–82 (in Russian). DOI: 10.46698/o2774-2458-4152-d.

References

1. *Lifshitz, E. M. and Pitaevsky, L. P. Fizicheskaya kinetika* [Statistical Physics], vol. 10, Moscow, Nauka, 1979 (in Russian).
2. *Abrikosov, A. A. Fundamentals of the Theory of Metals*, Elsevier Science Pub., 1988.
3. *Khachatryan, A. Kh. and Khachatryan Kh. A.* On the Solvability of a Boundary Value Problem of Physical Kinetics, *Izvestiya NAN Armenii: Matematika* [Proceedings of the NAS Armenia: Mathematics], 2006, vol. 41, no. 6, pp. 65–74 (in Russian).
4. *Khachatryan, Kh. A.* On Solvability in $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ of a Nonlinear Integro-Differential Equation with a Noncompact Hammerstein-Nemytskii Operator, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2013, vol. 24, pp. 167–183. DOI: 10.1090/S1061-0022-2012-01235-5.
5. *Khachatryan, Kh. A., Terdjyan, T. E. and Petrosyan, H. S.* On the Solvability of One Class of Boundary-Value Problems for Non-Linear Integro-Differential Equation in Kinetic Theory of Plazma, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics. Physics*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 451–461.
6. *Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza* [Elements of Theory of Functions and Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).
7. *Arabadzhyan, L. G. and Engibaryan, N. B.* Convolution Equations and Nonlinear Functional Equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 1987, vol. 36, pp. 745–791. DOI: 10.1007/BF01085507.
8. *Budak, B. M. and Fomin, S. V. Kratnye integraly i ryady* [Multiple Integrals and Series], Moscow, Nauka, 1965 (in Russian).
9. *Arabadzhyan, L. G. and Khachatryan, A. S.* A Class of Integral Equations of Convolution Type, *Sbornik: Mathematics*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 949–966. DOI: 10.1070/SM2007v198n07ABEH003868.

Received March 31, 2020

Khachatur A. Khachatryan
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian,
Main Performer of a Scientific Project №19-11-00223;

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia,
24/5 Marshall Baghramian Ave., Yerevan 375019, Armenia,
Leading Researcher

E-mail: `Khach82@rambler.ru`

Haykanush S. Petrosyan
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian,
Performer of a Scientific Project №19-11-00223;

Armenian National Agrarian University,
74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia,
Assistant Professor
E-mail: `Haykuhi25@mail.ru`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 83–97

УДК 519.644
DOI 10.46698/v5909-5966-1536-u

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЗНАЧЕНИЯМИ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

В. В. Шустов[1]

[1] Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,
Россия, 125319, Москва, ул. Викторенко, 7

E-mail: `vshustov@gosniias.ru`

Аннотация. Рассмотрена задача интегрирования функции на основе ее приближения двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита. Получены квадратурные формулы для общего случая, когда порядки производных, заданных в концевых точках отрезка, могут быть не равны друг другу. Представлена формула для остаточного члена, и на этой основе дана оценка погрешности численного интегрирования. Приведены примеры интегрирования функций с данными о погрешности и ее оценке. Проведено сравнение двухточечного приближения интегралов с методом, основанным на использовании формулы Эйлера — Маклорена. Сравнение метода двухточечного интегрирования с подходом, основанном на использовании формулы Эйлера — Маклорена, показало, что для достаточно гладких функций точность двухточечного интегрирования существенно выше, чем по формуле Эйлера — Маклорена. Приведен пример интеграла, для которого его приближения, полученные с использованием формулы Эйлера — Маклорена, расходятся, а полученные по формуле двухточечного интегрирования сходятся и достаточно быстро. Отметим также, что в отличие от формулы Эйлера — Маклорена, формула двухточечного интегрирования применима и в случае, когда максимальные порядки производных на концах отрезка интегрирования могут быть не равными друг другу, что важно в практических приложениях.

Ключевые слова: квадратура функций, двухточечный интерполяционный многочлен Эрмита, квадратурные формулы с использованием производных, оценка погрешности интегрирования, формула Эйлера — Маклорена, сходимость приближений.

Mathematical Subject Classification (2010): 41A55, 41A10, 65B15, 65D30.

Образец цитирования: *Шустов В. В.* О представлении определенных интегралов значениями функции и ее производных // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 82–97. DOI: 10.46698/v5909-5966-1536-u.

Введение

Теория приближенного вычисления определенных интегралов от заданных функций занимает значительное место в численном анализе и является важной в практическом отношении, в частности, для математического моделирования. Широко известными методами вычисления этих интегралов являются методы трапеций, Симпсона, Гаусса, Чебышева и другие, изложенные в учебниках [1–5], более специализированных изданиях [6, 7] и других работах. В квадратурных формулах этих методов используются только значения функции и не используются значения ее производных. К направлению интегрирования с применением производных относится метод, основанный на использовании формулы Эйлера — Маклорена и соответствующего ей ряда, который, однако, как отмечено в [8, с. 544] «*вообще говоря, расходится*».

Одним из подходов к нахождению определенного интеграла от заданной функции является подход, связанный с заменой данной функции, другой — в известном смысле более простой и к последующему вычислению интеграла от этой упрощенной функции. За приближенное значение интеграла от заданной функции принимается значение интеграла от приближающей ее функции. Здесь возникает много вопросов, связанных с возможностью применения и с оценкой погрешности такого аппроксимационного подхода.

Одним из направлений приближения функций является использования интерполяционных многочленов Эрмита, в котором используется данные о значениях не только функции, но и о ее производных до определенного порядка, заданных в узловых точках. Использование интерполяционных многочленов Эрмита для задач интегрирования предложено в общем виде С. М. Никольским в [6, с. 92].

Приближение функций с использованием частного вида многочленов Эрмита, именно двухточечных многочленов, когда значения функции и ее производных заданы только в двух концевых точках отрезка, рассмотрено в [9]. Там же получены в конечном виде формулы представления аппроксимирующего многочлена, построенного по значениям функции и ее производных, заданных в концевых точках отрезка представления, в том числе и для случая, когда максимальные порядки производных могут быть не равны друг другу.

В работах автора [10, с. 85–87] и [15] представлены некоторые результаты работы по интегрированию функций для симметричного случая, когда максимальные порядки используемых производных на концах отрезка интегрирования одинаковы. В настоящей работе, которая является продолжением [10, 15], рассмотрен общий случай интегрирования функций, когда порядки производных на концах отрезка могут быть различными.

Целью данной работы является построение формул интегрирования, основанных на использовании двухточечных интерполяционных многочленов Эрмита общего вида, оценка приближения ими интегралов от заданных функций и сравнение результатов, полученных по формулам двухточечного интегрирования и по формуле Эйлера — Маклорена.

1. Постановка и решение задачи

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, x_1]$ и имеет достаточный набор производных на этом отрезке. Пусть также в обеих концевых точках отрезка $[x_0, x_1]$ заданы значения функции $f(x)$ и ее производных до порядка m_0 и m_1 включительно:

$$f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, m_i; \;\; i = 0, 1. \tag{1}$$

Из условия существования производных следует, что для функции $f(x)$ существует определенный интеграл

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Необходимо построить формулу для приближающего интеграла I_m, который использует условия (1) и аппроксимирует интеграл I с определенной точностью.

Для построения приближающего интеграла I_m используется аппроксимация подынтегральной функции интерполяционным многочленом Эрмита $H(x)$, учитывающего производные, в варианте его двухточечного представления [9].

Согласно результатам работы [9, с. 1096] приближающий многочлен $H(x)$, удовлетворяющий условиям (1), можно представить, в частности, в виде

$$H(x) = (1-\xi)^{m_1+1} \sum_{j=0}^{m_0} \frac{f_0^{(j)}}{j!}(x-x_0)^j \sum_{k=0}^{m_0-j} a_{m_1}^k \xi^k + \xi^{m_0+1} \sum_{j=0}^{m_1} \frac{f_1^{(j)}}{j!}(x-x_1)^j \sum_{k=0}^{m_1-j} a_{m_0}^k (1-\xi)^k. \qquad (3)$$

В формуле (3) для многочлена $H(x)$ буквой ξ обозначена относительная переменная, связанная с исходной переменной x соотношением

$$\xi = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}. \qquad (4)$$

Коэффициент a_m^k определяется соотношением

$$a_m^k = \frac{(m+k)!}{k!m!} \qquad (5)$$

и выражается через биноминальный коэффициент C_{m+k}^k (например, [11, с. 163]) как

$$a_m^k = C_{m+k}^k. \qquad (6)$$

Обозначим через L длину отрезка $[x_0, x_1]$, определенную соотношением

$$L = x_1 - x_0. \qquad (7)$$

Тогда формулу (3) для двухточечного многочлена можно переписать с использованием только относительной переменной ξ в виде

$$H(\xi) = (1-\xi)^{m_1+1} \sum_{j=0}^{m_0} \frac{f_0^{(j)} L^j}{j!} \xi^j \sum_{k=0}^{m_0-j} a_{m_1}^k \xi^k + \xi^{m_0+1} \sum_{j=0}^{m_1} \frac{f_1^{(j)} L^j}{j!} (\xi-1)^j \sum_{k=0}^{m_1-j} a_{m_0}^k (1-\xi)^k. \qquad (8)$$

Для двухточечного многочлена $H(x)$ можно построить определенный интеграл I_m по отрезку $[x_0, x_1]$, определенный соотношением

$$I_m = \int_{x_0}^{x_1} H(x)\,dx,$$

или, переходя только к относительной переменной ξ, в виде

$$I_m = \int_0^1 H(\xi) L\,d\xi.$$

Используя формулу (8) для $H(x)$, получим соотношение для интеграла I_m:

$$I_m = \sum_{j=0}^{m_0} \left\{ \frac{f_0^{(j)} L^{j+1}}{j!} d^j_{m_0,m_1} \right\} + \sum_{j=0}^{m_1} \left\{ (-1)^j \frac{f_1^{(j)} L^{j+1}}{j!} e^j_{m_0,m_1} \right\}, \tag{9}$$

где коэффициенты $d^j_{m_0,m_1}$ и $e^j_{m_0,m_1}$ определяются формулами

$$d^j_{m_0,m_1} = \int\limits_0^1 \xi^j (1-\xi)^{m_1+1} \sum_{k=0}^{m_0-j} a^k_{m_1} \xi^k, \tag{10}$$

$$e^j_{m_0,m_1} = \int\limits_0^1 (1-\xi)^j \xi^{m_0+1} \sum_{k=0}^{m_1-j} a^k_{m_0} (1-\xi)^k \, d\xi. \tag{11}$$

Путем замены переменной $\xi_1 = 1 - \xi$ в соотношении (11) для $e^j_{m_0,m_1}$ легко показывается, что

$$e^j_{m_0,m_1} = d^j_{m_1,m_0}, \tag{12}$$

поэтому достаточно определить только коэффициент $d^j_{m_0,m_1}$.

Формулу (10) для коэффициента $d^j_{m_0,m_1}$, пользуясь свойством интеграла и степеней, можно записать в виде

$$d^j_{m_0,m_1} = \sum_{k=0}^{m_0-j} a^k_{m_1} \int\limits_0^1 \xi^{j+k} (1-\xi)^{m_1+1} \, d\xi. \tag{13}$$

Интеграл, который находится в правой части формулы (13), относится к типу интегралов, зависящих от параметров, называется бета-функцией Эйлера и представляется в виде функции от своих параметров (см., например, [12, с. 325]) как

$$\int\limits_0^1 \xi^{\alpha_0} (1-\xi)^{\alpha_1} \, d\xi = \frac{\alpha_0! \alpha_1!}{(1+\alpha_0+\alpha_1)!}.$$

Эту формулу можно представить также в виде

$$\int\limits_0^1 \xi^{\alpha_0} (1-\xi)^{\alpha_1} \, d\xi = \frac{1}{(1+\alpha_0+\alpha_1) C^{\alpha_1}_{\alpha_0+\alpha_1}}. \tag{14}$$

Путем несложного преобразования формула (13) для коэффициента $d^j_{m_0,m_1}$ с учетом (14) записывается в виде

$$d^j_{m_0,m_1} = \sum_{k=0}^{m_0-j} \frac{C^k_{m_1+k}}{(2+m_1+j+k) C^{j+k}_{m_1+1+j+k}}. \tag{15}$$

Проведя суммирование в правой части формулы (15), получим компактное выражение для коэффициента $d^j_{m_0,m_1}$:

$$d^j_{m_0,m_1} = \frac{C^{j+1}_{m_0+1}}{(j+1) C^{j+1}_{m_0+m_1+2}}. \tag{16}$$

Введем коэффициент $D^j_{m_0,m_1}$, связанный с коэффициентом $d^j_{m_0,m_1}$ соотношением

$$D^j_{m_0,m_1} = \frac{d^j_{m_0,m_1}}{j!}, \tag{17}$$

и для его значения получим формулу:

$$D^j_{m_0,m_1} = \frac{C^{j+1}_{m_0+1}}{(j+1)!C^{j+1}_{m_0+m_1+2}}. \tag{18}$$

Окончательная формула для представления интеграла I_m в соответствии с (9) и с учетом связи $e^j_{m_0,m_1}$ и $d^j_{m_0,m_1}$ (12) записывается в виде

$$I_m = \sum_{j=0}^{m_0} \left\{ \frac{f_0^{(j)} L^{j+1}}{j!} D^j_{m_0,m_1} \right\} + \sum_{j=0}^{m_1} \left\{ (-1)^j \frac{f_1^{(j)} L^{j+1}}{j!} D^j_{m_1,m_0} \right\}. \tag{19}$$

Остаточный член приближения rI_m интеграла I_m можно записать в виде

$$rI_m = \int\limits_{x_0}^{x_1} r_m(x)\, dx, \tag{20}$$

где остаточный член r_m двухточечного интерполяционного многочлена Эрмита согласно [1, с. 173] записывается как

$$r_m(x) = \frac{f^{(m_0+m_1+2)}(\eta)}{(m_0+m_1+2)!}(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}, \quad \eta \in (x_0, x_1). \tag{21}$$

С учетом этого соотношения остаточный член приближения интеграла rI_m примет форму

$$rI_m = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(m_0+m_1+2)}(\eta)}{(m_0+m_1+2)!}(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\, dx. \tag{22}$$

После перехода к относительной переменной ξ согласно (4) и небольших преобразований остаточный член приближения записывается в следующем виде:

$$rI_m = \frac{(-1)^{m_1+1} L^{m_0+m_1+3}}{(m_0+m_1+2)!} \int\limits_0^1 f^{(m_0+m_1+2)}(\eta) \xi^{m_0+1}(1-\xi)^{m_1+1}\, d\xi. \tag{23}$$

Используя теорему о среднем [13, с. 402] и учитывая, что выражение $\xi^{m_0+1}(1-\xi)^{m_1+1}$ не меняет знак на отрезке $[0,1]$, эту формулу перепишем в виде

$$rI_m = \frac{(-1)^{m_1+1} L^{m_0+m_1+3}}{(m_0+m_1+2)!} f^{(m_0+m_1+2)}(\eta_1) \int\limits_0^1 \xi^{m_0+1}(1-\xi)^{m_1+1}\, d\xi, \quad \eta_1 \in (x_0, x_1).$$

С учетом формулы (14) для интеграла в правой части этого соотношения получим, что

$$rI_m = \frac{(-1)^{m_1+1} L^{m_0+m_1+3}}{(m_0+m_1+2)!} \frac{(m_0+1)!(m_1+1)!}{(m_0+m_1+3)!} f^{(m_0+m_1+2)}(\eta_1). \tag{24}$$

Согласно полученным результатам можно сказать, что имеет место следующая

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (1). Тогда для определенного интеграла этой функции имеет место формула*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{m_0} D^j_{m_0,m_1} L^{j+1} f_0^{(j)} + \sum_{j=0}^{m_1} (-1)^j D^j_{m_1,m_0} L^{j+1} f_1^{(j)} + rI_m, \tag{25}$$

где

$$D^j_{m_0,m_1} = \frac{C^{j+1}_{m_0+1}}{(j+1)!C^{j+1}_{m_0+m_1+2}}, \tag{26}$$

$$rI_m = \frac{(-1)^{m_1+1} b_{m_0,m_1} L^{m_0+m_1+3}}{(m_0+m_1+2)!} f^{(m_0+m_1+2)}(\eta), \tag{27}$$

$$b_{m_0,m_1} = \frac{(m_0+1)!(m_1+1)!}{(m_0+m_1+3)!}, \tag{28}$$

$L = x_1 - x_0$ *и точка* $\eta \in (x_0, x_1)$.

Следствие. *Пусть производная функции порядка m_0+m_1+2 включительно на отрезке $[x_0, x_1]$ ограничена некоторой константой $M_{m_0+m_1+2} > 0$, т. е. считаем, что*

$$|f^{(m_0+m_1+2)}(x)| \leqslant M_{m_0+m_1+2}, \quad x \in (x_0, x_1). \tag{29}$$

Тогда для погрешности приближения интеграла функции $\delta I_m = |rI_m|$ имеет место:

$$\delta I_m \leqslant \Delta I_m,$$

где ΔI_m обозначена оценка погрешности приближения

$$\Delta I_m = \frac{b_{m_0,m_1} M_{m_0+m_1+2} L^{m_0+m_1+3}}{(m_0+m_1+2)!}. \tag{30}$$

Случай симметричного распределения производных на концах отрезка. В случае, когда в крайних точках отрезка интегрирования $[x_0, x_1]$ порядок наивысшей производной один и тот же, т. е. при выполнении условия

$$m_0 = m_1 = m \tag{31}$$

квадратурная формула (25) для представления интеграла I_m записывается в виде

$$I_m = \sum_{j=0}^{m} D^j_m L^{j+1} \Big[f_0^{(j)} + (-1)^j f_1^{(j)} \Big], \tag{32}$$

где коэффициент D^j_m в соответствии с (26) выражается формулой

$$D^j_m = \frac{C^{j+1}_{m+1}}{(j+1)!C^{j+1}_{2m+2}}. \tag{33}$$

В табл. 1 представлены коэффициенты D^j_m для начальных значений m и j.

Из формулы (32) видно, что интеграл I_m, выражается через значения функции и ее производных до m-го порядка включительно, заданных на концах отрезка интегрирования.

Отметим, что численные коэффициенты D^j_m перед производными зависят не только от j, но и от m, т. е. они изменяются при изменении m.

Таблица 1. Коэффициенты D_m^j

j / m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1/2							
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$						
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{120}$					
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{1680}$				
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{1008}$	$\frac{1}{30240}$			
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{792}$	$\frac{1}{15840}$	$\frac{1}{665280}$		
6	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{5}{312}$	$\frac{5}{23432}$	$\frac{1}{11440}$	$\frac{1}{308880}$	$\frac{1}{17297280}$	
7	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{624}$	$\frac{1}{9360}$	$\frac{1}{205920}$	$\frac{1}{7207200}$	$\frac{1}{518918400}$

Остаточный член интегрирования rI_m согласно (27) для симметричного случая принимает вид

$$rI_m = \frac{(-1)^{m+1} b_m L^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\eta), \tag{34}$$

где коэффициенты b_m представляются формулой

$$b_m = \frac{(m+1)!(m+1)!}{(2m+3)!}, \tag{35}$$

которая соответствует формуле, полученной в [15, с. 119].

Оценка погрешности интегрирования ΔI_m для симметричного случая имеет вид

$$\Delta I_m = \frac{M_{2m+2} L^{2m+3}}{(2m+2)!} b_m, \tag{36}$$

где константа $M_{2m+2} > 0$ ограничивает производную функции порядка $2m+2$ включительно на отрезке $[x_0, x_1]$, т. е. выполняется условие

$$|f^{(2m+2)}(x)| \leqslant M_{2m+2}, \quad x \in (x_0, x_1). \tag{37}$$

Формула (36) для оценки погрешности интегрирования ΔI_m в этом случае также соответствует формуле в [15, с. 119].

2. О сопоставлении интегрирования по двухточечной формуле и по формуле Эйлера — Маклорена

Для вычисления определенных интегралов, как отмечено во введении, существуют и другие методы интегрирования, которые используют значения производных подынтегральной функции. Один из таких методов основан на формуле интегрирования Эйлера — Маклорена. Для этого подхода интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \tag{38}$$

от заданной функции $f(x)$ представим в виде

$$I = E_m + rE_m, \tag{39}$$

где приближенное значение интеграла E_m выражается формулой Эйлера — Маклорена [14, с. 136], приведенной для случая задания значений функции только на концах отрезка $[x_0, x_1]$

$$E_m = \frac{L}{2}\big[f_0 + f_1\big] + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j} L^{2j}}{(2j)!}\Big[f_0^{(2j-1)} - f_1^{(2j-1)}\Big], \tag{40}$$

B_{2j} — числа Бернулли, рассмотренные, например, в [1, с. 292], rE_m — остаточный член приближения интеграла, который согласно [1, с. 292] имеет вид

$$rE_m = -\frac{B_{2m+2} L^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\lambda), \quad \lambda \in (x_0, x_1). \tag{41}$$

Запишем формулу Эйлера — Маклорена в развернутом виде

$$E_m = \frac{L}{2}\big[f_0 + f_1\big] + \frac{B_2 L^2}{2!}\big[f_0' - f_1'\big] + \frac{B_4 L^4}{4!}\big[f_0''' - f_1'''\big] + \ldots + \frac{B_{2m} L^{2m}}{(2m)!}\Big[f_0^{(2m-1)} - f_1^{(2m-1)}\Big]. \tag{42}$$

Сравнение формул (32) и (42) показывает, что в отличие от формулы двухточечного интегрирования, в которую входят производные как четного, так и нечетного порядков, формула Эйлера — Маклорена содержит производные только нечетного порядка.

Для оценки погрешности приближения $\delta E_m = |rE_m|$ используем формулы Эйлера — Маклорена при условии, что производная функции порядка $2m+2$ включительно на отрезке $[x_0, x_1]$ ограничена некоторой константой $M_{2m+2} > 0$, т. е. считая, что

$$|f^{(2m+2)}(x)| \leqslant M_{2m+2}, \quad x \in (x_0, x_1),$$

из формулы (41) следует, что имеет место соотношение

$$\delta E_m \leqslant \Delta E_m,$$

где через ΔE_m обозначена оценка погрешности приближения интегрирования

$$\Delta E_m = \frac{|B_{2m+2}| L^{2m+3}}{(2m+2)!} M_{2m+2}. \tag{43}$$

Оценка погрешности двухточечного интегрирования ΔI_m в соответствии с (36) может быть записана в виде

$$\Delta I_m = \frac{b_m L^{2m+3}}{(2m+2)!} M_{2m+2}, \tag{44}$$

где числа b_m согласно (35) представляются формулой

$$b_m = \frac{(m+1)!(m+1)!}{(2m+3)!}. \tag{45}$$

Сравнение формул (44) и (43) показывает, что оценки погрешностей для двухточечного интегрирования и по формуле Эйлера — Маклорена имеют одинаковую структуру и отличаются только числовыми коэффициентами b_m и B_{2m+2}, соответственно. Поэтому отношение остаточных членов и, соответственно, оценок погрешностей интегрирования определяется отношением числовых коэффициентов обоих методов приближения.

Из формулы (45) следует, что числа b_m уменьшаются с возрастанием m и при этом

$$\lim_{m\to\infty} b_m = 0.$$

Действительно, обозначая $\alpha = m+1$, для чисел b_m можно записать

$$b_m = \frac{(m+1)!(m+1)!}{(2m+3)!} = \frac{\alpha!\alpha!}{(\alpha+1)(2\alpha)!} \leqslant \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{i}{\alpha+i} \leqslant \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{m+1}},$$

откуда и следует, что $b_m \to 0$ при $m \to \infty$.

В то же время для чисел Бернулли B_{2m} имеется формула [1, с. 293]

$$B_{2m} = (-1)^{m+1} \frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \zeta(2m),$$

где $\zeta(s)$ — известная дзета-функция Римана (например, [8, с. 263]), определенная как $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, и обладающая свойством [1, с. 293], что $\zeta(s) \to 1$ при $s \to \infty$.

Из формулы для чисел Бернулли следует, что последовательность чисел Бернулли B_{2m} стремится к бесконечности при $m \to \infty$.

Таблица 2. Числовые коэффициенты b_m и числа Бернулли B_{2m+2}

m	0	1	2	3	4	5	6	7
b_m	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{630}$	$\frac{1}{2772}$	$\frac{1}{12012}$	$\frac{1}{51480}$	$\frac{1}{218790}$
B_{2m+2}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$
$k_m = \frac{b_m}{\lvert B_{2m+2}\rvert}$	1.00	1.00	0.30	0.048	0.0048	0.00033	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$6.4 \cdot 10^{-7}$

Таблица 3. Формулы для интегралов H_m и E_m
и оценок их погрешностей ΔI_m и ΔE_m

m	Формулы для интегралов I_m и E_m	ΔI_m ΔE_m
0	$I_0 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1)$ $E_0 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1)$	$\frac{M_2 L^3}{12}$ $\frac{M_2 L^3}{12}$
1	$I_1 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{12}(f_0' - f_1')$ $E_1 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{12}(f_0' - f_1')$	$\frac{M_4 L^5}{720}$ $\frac{M_4 L^5}{720}$
2	$I_2 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{10}(f_0' - f_1') + \frac{L^3}{120}(f_0'' + f_1'')$ $E_2 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{12}(f_0' - f_1') - \frac{L^4}{720}(f_0''' - f_1''')$	$\frac{M_6 L^7}{100800}$ $\frac{M_6 L^7}{30340}$
3	$I_3 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{3L^2}{28}(f_0' - f_1') + \frac{L^3}{84}(f_0'' + f_1'') + \frac{L^4}{1680}(f_0''' - f_1''')$ $E_3 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{12}(f_0' - f_1') - \frac{L^4}{720}(f_0''' - f_1''') + \frac{L^6}{30240}(f_0^{(5)} - f_1^{(5)})$	$\frac{M_8 L^9}{25401600}$ $\frac{M_8 L^9}{1209600}$
4	$I_4 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{9}(f_0' - f_1') + \frac{L^3}{72}(f_0'' + f_1'') + \frac{L^4}{1008}(f_0''' - f_1''')$ $+ \frac{L^5}{30240}(f_0^{(4)} + f_1^{(4)})$	$\frac{M_{10} L^{11}}{10059033600}$ $\frac{M_{10} L^{11}}{47900160}$
m	$I_m = \frac{d_m^0 L}{0!}(f_0 + f_1) + \frac{d_m^1 L^2}{1!}(f_0' - f_1') + \frac{d_m^2 L^3}{2!}(f_0'' + f_1'')$ $+ \frac{d_m^3 L^4}{3!}(f_0''' - f_1''') + \ldots + \frac{d_m^m L^{m+1}}{m!}(f_0^{(m)} + (-1)^m f_1^{(m)})$ $E_m = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{B_2 L^2}{2!}(f_0' - f_1') + \frac{B_4 L^4}{4!}(f_0''' - f_1''')$ $+ \frac{B_6 L^6}{6!}(f_0^{(5)} - f_1^{(5)}) + \ldots + \frac{B_{2m} L^{2m}}{(2m)!}(f_0^{(2m-1)} - f_1^{(2m-1)})$	$\frac{b_m L^{2m+3}}{(2m+2)!} M_{2m+2}$ $\frac{\lvert B_{2m+2}\rvert L^{2m+3}}{(2m+2)!} M_{2m+2}$

Для сравнения в табл. 2 приведены числовые коэффициенты двухточечного интегрирования b_m, числа Бернулли B_{2m+2} и округленные до двух цифр значения коэффициента k_m, равные отношению их модулей для начальных значений m. Как видно из табл. 2, первые два члена числовых последовательностей, соответствующие значениям $m = 0$ и $m = 1$, совпадают. Далее, с увеличением m, начиная с $m = 2$, обе числовые последовательности расходятся друг от друга, причем в разных направлениях: коэффициенты b_m

монотонно уменьшаются, стремясь к нулю, а модули чисел Бернулли B_{2m+2}, начиная с некоторого номера, неограниченно возрастают, стремясь к бесконечности.

Последняя строка табл. 2, содержащая данные об отношении коэффициентов b_m и чисел Бернулли B_{2m+2}, показывает то, что k_m не превосходит единицы и монотонно уменьшается с увеличением m. Соответственно, оценка точности двухточечной формулы интегрирования не хуже оценки формулы Эйлера — Маклорена и становится существенно лучше ее при увеличении m.

В табл. 3 представлены формулы для интегралов H_m и E_m, а также оценок их погрешностей для начальных значений m.

3. Результаты численных экспериментов

Пример 1. Для сравнения обоих методов интегрирования проведены расчеты приближения интеграла для функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ с использованием формул двухточечного интегрирования и по формуле Эйлера — Маклорена для различных значений m. Значение интеграла

$$I = \int_0^\pi \sin x \, dx$$

легко определяется аналитически и равно двум.

С использованием квадратурных формул, представленных в табл. 3, формулы для численной погрешности интегрирования

$$\delta I_m = |I - I_m| \tag{46}$$

и их оценок, выраженных (36) и (43), получены численные значения интегралов, их погрешности и их оценки для начальных значений m, которые представлены в табл. 4. В каждой ячейке второго, третьего и четвертого столбца этой таблицы вверху приводятся результаты расчета по формуле двухточечного интегрирования, внизу приводятся данные, полученные по формуле Эйлера — Маклорена.

Таблица 4. Значения интегралов I_m, E_m, их погрешностей δI_m, δE_m и оценок δI_m, δE_m

m	I_m E_m	δI_m δE_m	δI_m δE_m
0	0.000000000 0.000000000	2.000000000 2.000000000	2.583856390 2.583856390
1	1.644934067 1.644934067	0.355065933 0.355065933	0.425027340 0.425027340
2	1.973920880 1.915514875	0.026079120 0.084485125	0.029963226 0.099877422
3	1.998952025 1.979098817	0.001047975 0.020901183	0.001173513 0.024643766
4	1.999973416 1.994787525	0.000026584 0.005212475	0.000029248 0.006142026
5	1.999999535 1.998697660	0.000000465 0.001302340	0.000000505 0.001534358
6	1.999999994 1.999674463	0.0000000059 0.0003255368	0.0000000064 0.0003835187
7	2.000000000 1.999918619	0.000000000058 0.000081381203	0.000000000062 0.000095875264

Анализ результатов расчетов показал, что оба подхода при $m = 0$ и $m = 1$, дают одинаковые результаты. Однако при m равным двум и более точность результатов, полученных при использовании двухточечной формулы интегрирования, существенно выше данных, полученных по формуле Эйлера — Маклорена, и это повышение точности увеличивается с увеличением m.

Сравнение точности результатов наглядно проявляется при представлении их в графической форме. На рис. 1 представлены зависимости погрешности приближения δ_m от параметра m, полученные при использовании формулы двухточечного интегрирования и по формуле Эйлера — Маклорена.

Из поведения графиков наглядно видно, что обе зависимости, совпадая при $m = 0$ и $m = 1$, расходятся от точки $m = 1$, причем расхождение между ними увеличивается с увеличением m, и график, представляющий зависимость погрешности, полученной по формуле двухточечного интегрирования, лежит ниже аналогичного графика, построенного по формуле Эйлера — Маклорена.

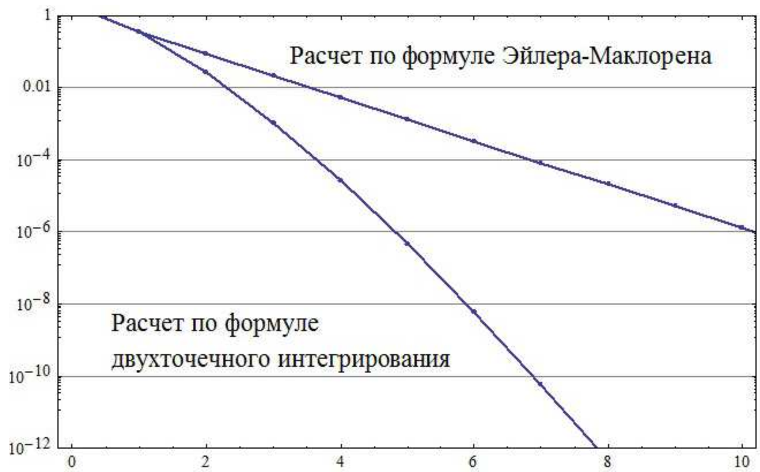


Рис. 1. Зависимость погрешности δ_m от параметра m для функции $f(x) = \sin x$.

Из данных, представленных в табл. 4 и из рис. 1, следует, что, например, при $m = 7$ отношение погрешности, полученной по формуле двухточечного интегрирования, более чем в миллион раз меньше погрешности, полученной по формуле Эйлера — Маклорена (их отношение составляет $0.000000000058/0.000081381203 = 0.71 \cdot 10^{-6}$). Это отношение вполне соответствует отношению оценок их погрешностей и отношению $k_m = 0.64 \cdot 10^{-6}$, представленному в последней строке табл. 2.

Для рассмотренной функции $f(x) = \sin x$ результаты исследований, представленные в табличной и графической форме, показали, что последовательности приближений интегралов I_m и E_m, полученные обоими методами, сходятся к точному значению интеграла I, хотя и с разной скоростью.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x},$$

который легко вычисляется аналитически и значение которого равно $\ln 2 = 0.69314718\ldots$

Для подынтегральной функции также существуют производные сколь угодно высокого порядка, которые, как несложно вывести, представляются формулой

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(j)} = \frac{(-1)^{(j)} j!}{x^{j+1}}.$$

С использованием этой формулы и квадратурных формул, представленных в табл. 3, получены численные значения интегралов с использованием двухточечного интегрирования и по формуле Эйлера — Маклорена. В табл. 5 представлены значения интегралов I_m и E_m и их численных погрешностей δI_m, δE_m для $m = 0, \ldots, 10$.

Таблица 5. Значения интегралов I_m, E_m и их погрешностей δI_m, δE_m

m	I_m	E_m	δI_m	δE_m
0	0.75000000	0.75000000	0.056852819	0.056852819
1	0.68750000	0.68750000	0.0056471806	0.0056471806
2	0.69375000	0.69531250	0.00060281944	0.0021653194
3	0.69308036	0.69140625	0.000066823417	0.0017409306
4	0.69315476	0.69555664	$7.5813448 \cdot 10^{-6}$	0.0024094601
5	0.69314631	0.68798828	$8.7374176 \cdot 10^{-7}$	0.0051588993
6	0.69314728	0.70907593	$1.0184515 \cdot 10^{-7}$	0.015928747
7	0.69314717	0.62574768	$1.1973324 \cdot 10^{-8}$	0.067399500
8	0.69314718	1.0690007	$1.4170850 \cdot 10^{-9}$	0.37585354
9	0.69314718	-1.9849420	$1.6862127 \cdot 10^{-10}$	2.6780891
10	0.69314718	24.471245	$2.0153288 \cdot 10^{-11}$	23.778098

Как видно из табл. 5 и рис. 2, с увеличением m значения интегралов I_m, рассчитанные по методу двухточечного интегрирования, стремятся к точному значению интеграла I, при этом погрешность δI_m монотонно убывает. В тоже время значения интегралов E_m, полученные по формуле по Эйлера — Маклорена, стремятся к значению интеграла I только при малых m, и с некоторого m погрешность δE_m начинает резко увеличиваться, т. е. процесс приближения становится расходящимся.

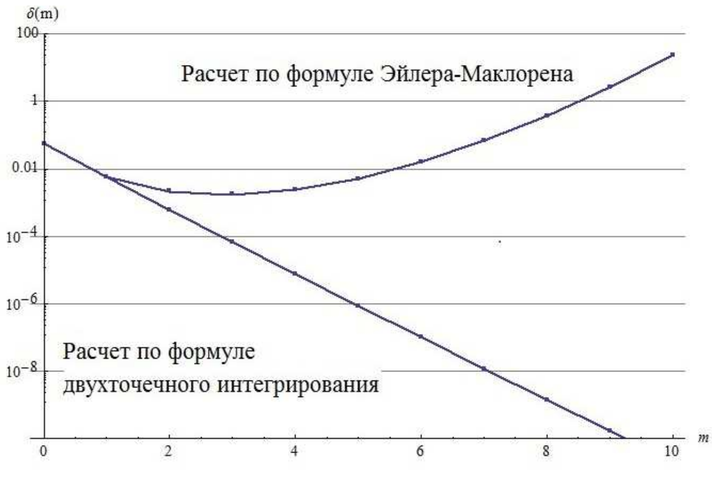


Рис. 2. Зависимость погрешности δ_m от параметра m для функции $f(x) = 1/x$.

Сравнение результатов, определенное численным путем, подтверждается аналитическими выкладками. Так, погрешность двухточечного интегрирования $\delta I_m = |rI_m|$ с использованием (34) и (46) и погрешность $\delta E_m = |rE_m|$ формулы по Эйлера — Маклорена с использованием (41) и (46) с учетом $L = 1$ для рассматриваемого интеграла можно записать в виде

$$\delta I_m = \frac{b_m}{\eta_1^{2m+3}}, \quad \delta E_m = \frac{|B_{2m+2}|}{\eta_2^{2m+3}}, \quad \eta_1, \eta_2 \in (1, 2).$$

Для погрешностей δI_m и δE_m имеем оценки, соответственно, сверху и снизу

$$\delta I_m \leqslant b_m, \quad \delta E_m \geqslant |B_{2m+2}|/2^{2m+3}.$$

Из этих оценок для этих погрешностей следует, что сходимость приближений интегралов для обоих методов в данном случае существенным образом определяется поведением последовательностей коэффициентов двухточечного интегрирования и чисел Бернулли, соответственно. Как отмечено выше, первая последовательность стремится к нулю при $m \to \infty$, а вторая стремится к бесконечности при $m \to \infty$ с факториальной скоростью, поэтому процесс приближения по двухточечной формуле для данного интеграла сходится, а по формуле Эйлера — Маклорена расходится.

Заключение

В работе рассмотрена задача интегрирования функции с использованием двухточечных интерполяционных многочленов Эрмита общего вида. В результате решения этой задачи получены формулы интегрирования для произвольного заданного порядка производных, в том числе и для несимметричного случая, когда порядки производных, заданных в концевых точках отрезка интегрирования, могут быть не равны друг другу. Получено также представление для остаточного члена, на основе которого дана оценка погрешности интегрирования.

Сравнение метода двухточечного интегрирования с подходом, основанном на использовании формулы Эйлера — Маклорена, показало, что для достаточно гладких функций точность двухточечного интегрирования существенно выше, чем по формуле Эйлера — Маклорена. Приведен пример интеграла, для которого его приближения, полученные с использованием формулы Эйлера — Маклорена, расходятся, а полученные по формуле двухточечного интегрирования сходятся и достаточно быстро. Отметим также, что в отличие от формулы Эйлера — Маклорена формула двухточечного интегрирования применима и в случае, когда максимальные порядки производных на концах отрезка интегрирования могут быть не равными друг другу, что важно в практических приложениях.

В части продолжения работы в этом направлении представляется интересным рассмотрение задачи оптимизации распределения максимальных порядков производных на концах отрезка интегрирования с целью минимизации погрешности приближения.

Литература

1. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1.—М.: Физматлит, 1962.—464 с.
2. *Гончаров В. И.* Теория интерполирования и приближения функций.—М.: Гостехтеориздат, 1934.—316 с.
3. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа.—М.: Гостехтеориздат, 1953.—528 с.
4. *Волков Е. А.* Численные методы.—М.: Наука, 1987.—248 с.
5. *Калитки Н. Н.* Численные методы: учеб. пособие.—СПб.: БХВ-Петербург, 2011.—592 с.
6. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.—М.: Наука, 1988.—256 с.
7. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.

8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2.—М.: Наука, 1970.—800 с.
9. *Шустов В. В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.—2015.—Т. 55, № 7.—С. 1091–1108. DOI: 10.7868/S004446691504016X.
10. *Шустов В. В.* О представлении интегралов значениями функции и ее производных на основе использования двухточечных многочленов Эрмита // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.—С. 85–87.
11. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.—СПб.: Изд-во «Лань», 2010.—608 с.
12. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 2.—М.: Высшая школа, 1970.—592 с.
13. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1.—М.: Высшая школа, 1981.—584 с.
14. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.—М.: Наука, 1984.—832 с.
15. *Шустов В. В.* О представлении интегралов значениями функции и ее производных на основе использования двухточечных многочленов Эрмита // Мат. форум. Т. 11. Исследование по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям; ЮМИ ВНЦ РАН. — Москва: РАН, 2017.—С.113–122.—(Итоги науки. Юг России).

Статья поступила 15 ноября 2019 г.

Шустов Виктор Владимирович
Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 125319, Москва, ул. Викторенко, 7
E-mail: vshustov@gosniias.ru
https://orcid.org/0000-0002-2465-7475

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 82–97

ON REPRESENTATION OF CERTAIN INTEGRALS USING THE VALUES OF A FUNCTION AND ITS DERIVATIVES

Shustov, V. V. [1]
[1] State Research Institute of Aviation Systems,
7 Viktorenko St., Moscow 125319, Russia
E-mail: vshustov@gosniias.ru

Abstract. The problem of integrating a function on the basis of its approximation by two-point Hermite interpolation polynomials is considered. Quadrature formulas are obtained for the general case, when the orders of the derivatives given at the endpoints of the segment can be not equal to each other. The formula for the remainder term is presented and the error of numerical integration is estimated. Examples of integrating functions with data on error and its estimation are given. A two-point approximation of the integrals is compared with a method based on the Euler-Maclaurin formula. Comparison of the two-point integration method with the approach based on the use of the Euler-Maclaurin formula showed that for sufficiently smooth functions the accuracy of two-point integration is significantly higher than by the Euler-Maclaurin formula. An example of an integral is given for which its approximations obtained using the Euler-Maclaurin formula diverge, and those obtained by the formula two-point integration converge quickly enough. We also note that, in contrast to the Euler-Maclaurin formula, the two-point integration formula is also applicable in the case when the maximum orders of the derivatives at the ends of the integration interval may not be equal to each other, which is important in practical applications.

Key words: quadrature of functions, two-point Hermite interpolation polynomial, quadrature formulas using derivatives, estimation of the integration error, Euler–Maclaurin formula, convergence of approximations.

Mathematical Subject Classification (2010): 41A55, 41A10, 65B15, 65D30.

For citation: *Shustov, V. V.* On Representation of Certain Integrals Using the Values of a Function and its Derivatives, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 82–97 (in Russian). DOI: 10.46698/v5909-5966-1536-u.

References

1. *Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P. Computing Methods. Vol.* 1, Oxford, Pergamon, 1965.
2. *Goncharov, V. I. Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsii* [The Theory of Interpolation and Approximation of Functions], Moscow, Gostekhteorizdat, 1934 (in Russian).
3. *Mikeladze, Sh. E. Chislennie metodi matematicheskogo analiza* [Numerical Methods in Mathematical Analysis], Moscow, Gostekhteorizdat, 1953 (in Russian).
4. *Volkov, E. A. Chislennye metodi* [Numerical Methods], Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).
5. *Kalitkin, N. N. Chislennye metodi* [Numerical Methods], St. Peterburg, BKhV-Peterburg, 2011 (in Russian).
6. *Nikol'skii, S. M. Kvadraturnye formuly* [Quadrature Formulas], Moscow, Nauka, 1988 (in Russian).
7. *Krylov, V. I. Priblizhennoe vichislenie integralov* [Approximate Calculation of Integrals], Moscow, Nauka, 1967 (in Russian).
8. *Fikhtengolts, G. M. Kurs diffirentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [A Course of Differential and Integral Calculus], vol. 2, Moscow, Nauka, 1970 (in Russian).
9. *Shustov, V. V.* Approximation of Functions by Two-Point Hermite Interpolating Polynomials, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 7, pp. 1077–1093. DOI: 10.1134/S0965542515040156.
10. *Shustov, V. V.* O predstavlenii integralov znaceniyami funktsii i ee proizvodnykh na osnove ispolzovaniya dvukhtoctechnykh mnogochlenov Ermita, *Teoriya operatorov, kompleksnii analiz i matematicheskoe modelirovanie* (*Divnomorskoe,* 7–14 *sentyabrya* 2016), Vladikavkaz, 2016, pp. 85–87 (in Russian).
11. *Bronshtein, I. N. and Semendyaev, K. A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov*, St. Peterburg, Lan, 2010 (in Russian).
12. *Kudryavtsev, L. D. Matematicheskii analiz* [Mathematical Analysis], vol. 2, Moscow, Vysshaya Shkola, 1970 (in Russian).
13. *Kudryavtsev, L. D. Matematicheskii analiz* [Mathematical Analysis], vol. 1, 1981 (in Russian).
14. *Korn, G. and Korn, T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, 1968.
15. *Shustov, V. V.* Representation of Integrals Using Values of Function and its Derivatives On The Basis Two-Point Hermite Polinomoals, *Mat. forum. T.* 11. *Issledovanie po matematicheskomu analizu, differencial'nym uravnenijam i ih prilozhenijam* (*Itogi Nauki. Yug Rossii*) [Mathematical Forum. Vol. 11. Studies on Mathematical Analysis, Differential Equations, and Their Applications (Review of Science: The South of Russia)], SMI VSC RAS, Moscow, RAS, 2017, pp. 113–122 (in Russian).

Received November 15, 2019

Victor V. Shustov
State Research Institute of Aviation Systems,
7 Viktorenko St., Moscow 125319, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `vshustov@gosniias.ru`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 98–99

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

С. Н. МЕЛИХОВУ — 60 ЛЕТ

5 марта 2020 г. исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук Сергею Николаевичу Мелихову, известному специалисту по комплексному и функциональному анализу.

С. Н. Мелихов родился в городе Донецке Ростовской области в семье шахтера. Пример родителей имел решающее значение в выработке им трудолюбия и настойчивости. Его выбор профессии определило успешное участие в математических олимпиадах. В 1970 г. начал издаваться журнал «Квант» для школьников, в те годы привлекший внимание к математике и физике большого числа школьников и существенно способствовавший формированию их естественно-научного мировоззрения. С. Н. Мелихов был активным участником конкурса «Задачник «Кванта», в 1977 г. стал его победителем. В 1977 г. он поступил на механико-математический факультет Ростовского государственного университета. Начиная с третьего курса, активно занимался научными исследованиями, вначале под руководством Ю. А. Кирютенко, а затем — Ю. Ф. Коробейника. В 1986 г. он защитил кандидатскую диссертацию, посвященную матричным операторам в пространствах числовых последовательностей. В ней были доказаны критерии непрерывности линейных операторов, задаваемых бесконечными матрицами, в пространствах числовых семейств с топологиями, определенными с помощью двойственности Кете-Теплица (слабыми, нормальными, сильными). Были исследованы различные коммутационные соотношения, в частности, описаны операторы, перестановочные со степенями операторов сдвига влево и вправо. Часть исследований была посвящена изучению ретрактивных свойств абсолютно сходящихся рядов в счетных индуктивных пределах локально выпуклых пространств.

После окончания аспирантуры С. Н. Мелихов остается работать в Ростовском государственном университете (РГУ): вначале — в НИИ механики и прикладной математики РГУ, затем (с 1988 г.) — на кафедре математического анализа. В это время его внимание привлекает развитая Ю. Ф. Коробейником и его учениками теория абсолютно представляющих систем и теория операторов свертки, в частности, дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в пространствах аналитических функций. Большое влияние на его математическое творчество оказала годичная стажировка (1989–1990 гг.) и последующие пребывания в Математическом институте университета Дюссельдорфа — родины Ф. Клейна — под руководством Р. Майзе, который является научным внуком Г. Кете. В конце 80-х годов прошлого века советскими и немецкими математиками была создана структурная теория пространств Фреше, послужившая толчком и давшая инструмент для решения ряда задач функционального и комплексного анализа. Опираясь на результаты этой теории, С. Н. Мелихов решил задачу о представлении аналитических функций рядами из квазиполиномов, проблему «коэффициентов» таких разложений (т. е. задачу о существовании линейного непрерывного правого обратного к соответствующему оператору представления). Совместно с немецким математиком З. Моммом он установил критерии существования линейного непрерывного правого обратного к оператору свертки, действующему в пространствах ростков голоморфных функций на выпуклом локально замкнутом подмножестве как для одного, так и для нескольких комплексных переменных. При этом была выяснена связь упомянутых задач с аналитическими проблемами существования специальных семейств (плюри)субгармонических функций, с граничным поведением выпуклых конформных отображений и плюрикомплексных функций Грина, с продолжением функций вполне регулярного роста.

Еще одно направление научной деятельности С. Н. Мелихова связано с проблемой проективного (алгебраического и топологического) описания счетных индуктивных пределов пространств Фреше голоморфных функций. В 1994 г. им, совместно с испанским математиком Х. Бонетом, был построен первый пример индуктивного предела весовых банаховых пространств целых функций, для которого топологическое проективное описание не имеет места. Все упомянутые результаты нашли отражение в докторской диссертации С. Н. Мелихова, защищенной им в 2003 г. в Институте математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН. Исследования, нашедшие отражение в его докторской диссертации, были продолжены и в следующие десятилетия. В частности, им, совместно с Р. Майзе и Х. Бонетом, была решена проблема алгебраического и топологического проективного описания счетных индуктивных пределов весовых пространств Фреше целых функций, реализующих сопряженное к пространству ростков голоморфных функций на выпуклом локально замкнутом подмножестве многомерного комплексного пространства и сопряженное к пространству ультрадифференцируемых функций. Он изучил и исследует проблему представления алгебр аналитических функционалов, связанных с оператором обратного сдвига. Полученные в этом направлении результаты позволили, в частности, ввести ассоциативное и коммутативное умножение в пространстве обобщенных функций.

В настоящее время Сергей Николаевич работает профессором на кафедре алгебры и дискретной математики Южного федерального университета. Он уже 15 лет активно сотрудничает с математиками Республики Северная Осетия-Алания, работая ведущим научным сотрудником отдела математического анализа Южного математического института.

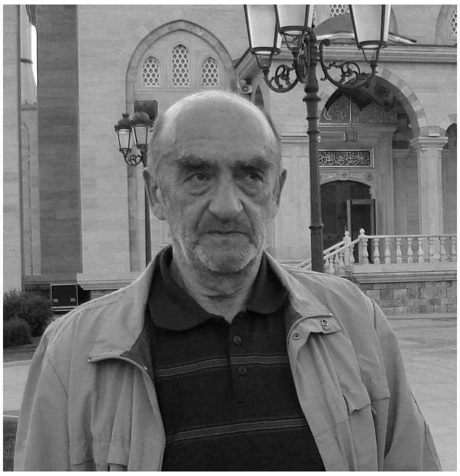
С. Н. Мелихов неоднократно принимал участие в международных и отечественных научных конференциях, получал стипендии Немецкой службы академических обменов (DAAD) для проведения научных исследований в Математическом институте Дюссельдорфа, сотрудничает с немецкими и испанскими математиками. Много сил С. Н. Мелихов отдает педагогической деятельности, в настоящее время читает лекции по функциональному анализу, математическим основам защиты информации. Он активно работает со студентами, руководимая им команда ЮФУ ежегодно занимает призовые места на Поволжской математической олимпиаде, проводимой в честь для рождения Н. В. Лобачевского. Уже несколько десятилетий С. Н. Мелихов является членом жюри областных математических олимпиад для школьников. Многие отмечают его способность рассказать доступно и увлекательно о сложных результатах, привлекающую к нему молодежь.

Пожелаем Сергею Николаевичу здоровья, больших творческих достижений и в дальнейшем!

А. В. Абанин, А. О. Ватульян, М. И. Карякин, С. Б. Климентов,
Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев, В. А. Стукопин

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 100–102

ПАМЯТИ АЛЕКСЕЯ БОРИСОВИЧА ШАБАТА
(08.08.1937 — 24.03.2020)



24 марта 2020 г. ушел из жизни Алексей Борисович Шабат, ученый уникального масштаба, математик, во многом определивший лицо современной математической физики.

Интерес Алексея Борисовича к математической науке не был случайным. Он родился в академической семье. Его отец, Борис Владимирович Шабат был известным математиком, профессором МГУ, автором известных учебников по комплексному анализу, главным редактором математической редакции издательства «Мир». Мать, Макарова Елена Александровна, была известным ученым, работавшим в Государственном астрономическом институте им. П. К. Штернберга МГУ.

Первые яркие работы Алексей Борисович выполнил будучи студентом мехмата МГУ под руководством профессора М. И. Вишика. Они были посвящены краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. После окончания мехмата в 1959 г. он получает предложение продолжить обучение в аспирантуре. Однако А. Б. Шабат, желая доказать свою независимость, отказался от полученного предложения и решает продолжить свою научную деятельность в Новосибирске, в Институте гидродинамики Сибирского отделения РАН.

Алексей Борисович Шабат стоял у истоков важного раздела современной математической физики — метода обратной задачи рассеяния, где ему принадлежит целый ряд основополагающих результатов. Он внес фундаментальный вклад в его развитие. В первой половине 70-х годов Шабат в соавторстве с В. Е. Захаровым опубликовал цикл работ, посвященных интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера. В этих работах была заложена общая схема интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. В эти же годы им опубликован ряд пионерских работ, развивающих метод обратной задачи рассеяния. Шабатом был предложен метод решения уравнения Кортевега — де Фриза на основе интегрального уравнения Марченко. Этот метод, ныне известный как метод одевания Захарова — Шабата (dressing method), позволил свести решение обратной задачи рассеяния к задаче сопряжения Римана — Гильберта. Только на эти работы сейчас имеется более семи тысяч ссылок в научной литературе!

В 80-е гг. на основе доказанной А. Б. Шабатом теоремы о существовании пары Лакса у уравнения, обладающего высшими симметриями, был развит симметрийный подход к проблеме классификации интегрируемых уравнений. В сотрудничестве со своими учениками (А. В. Жибер, В. В. Соколов, В. Э. Адлер, Р. И. Ямилов, И. Т. Хабибуллин, С. И. Свинолупов) Шабатом были сформулированы простые и эффективные критерии интегрируемости, являющиеся необходимыми условиями существования высших симметрий и законов сохранения, полностью описаны и проклассифицированы интегрируемые системы уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и лагранжевы нелинейные цепочки.

А. Б. Шабату принадлежит очень простая, но универсальная идея — условие инвариантности относительно симметрий выделяет классы специальных точных решений. В 90-х годах этот принцип был применен к дискретным симметриям, отвечающим преобразованиям Бэклунда (одевающая цепочка). В соавторстве с Р. И. Ямиловым была написана целая серия работ, посвященных преобразованиям Бэклунда, цепочкам, их приложениям и классификации. Периодическая версия так называемой одевающей цепочки Веселова — Шабата дала новый взгляд на работу С. П. Новикова (1974 г.) и алгеброгеометрическую теорию конечнозонных операторов Шрёдингера.

А. Б. Шабат указал, что комбинация классических преобразований типа преобразования Галилея и растяжения с преобразованиями Бэклунда приводит к нетривиальным результатам:

– Автомодельное замыкание одевающей цепочки — деформация солитонных потенциалов (с А. Дегасперисом, 1992, 1994);

– Квазипериодическое замыкание одевающей цепочки — деформация конечнозонных потенциалов, уравнения Пенлеве и их обобщения (с А. П. Веселовым, 1993);

– Замыкания преобразования Бэклунда на решетке, стационарные уравнения для мастер-симметрий, уравнения Пенлеве (с В. Э. Адлером, Р. И. Ямиловым, 2000);

– Мастер-симметрии в задаче о ступеньке для цепочки Вольтерра (с Р. Ч. Кулаевым, В. Э. Адлером, 2018, 2019).

Алексей Борисович Шабат был одним из тех ученых, благодаря которым наука движется вперед. Всех, кто был знаком с ним, поражало в нем сочетание хорошей интуиции и большого трудолюбия. Он не только чувствовал, в каком направлении надо двигаться в науке, но и умел преодолевать любые технические трудности. Не менее важно, что он воспитал много выдающихся математиков и физиков — не только своих студентов, но и людей вокруг себя. Его вклад в организацию науки был огромен.

Алексей Борисович ставил перед собой грандиозные цели и не отвлекался на пустяки. Он великолепно сотрудничал с другими математиками, не только внося ключевые идеи, но и проясняя технические детали. Если его увлекала какая-то идея, он готов был работать сутками без сна и еды. Единственное, что отвлекало его от математики — горы. Для него горы были способом отдохнуть от всего и углубиться в себя.

У Алексея Борисовича отсутствовало чувство оседлости. В разные годы жизни он учился и работал в различных городах и вузах:

1954–1959 гг. — Москва, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

1959–1973 гг. — Новосибирск, Институт гидродинамики СО РАН;

1973–1990 гг. — Уфа, Башкирский государственный университет;

1990–2020 гг. — Черноголовка, Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау;

2007–2018 гг. — Карачаевск, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Б. Алиева;

2018–2020 гг. — Майкоп, Адыгейский государственный университет.

Помимо этого, А. Б. Шабат работал в университетах Рима, Мадрида, Миннесоты, Кембриджа, Турина, Флоренции, Лидса, Лафборо.

В свои 80 лет он без особых проблем переехал жить в город Майкоп! Такого рода резкие перемены в своей жизни он рассматривал для себя как некий вызов. На каждом новом месте Алексей Борисович с неистощимым энтузиазмом начинал развивать активную деятельность, направленную на создание математической школы, на привлечение к науке молодых. Вокруг него, где бы он ни был, постоянно находилась молодежь. Это был постоянный генератор новых идей, новых математических задач, новых подходов к их решению. Его влияние на научную жизнь неоценимо.

Светлая память об этом замечательном человеке навсегда сохранится в наших сердцах.

В. Э. Адлер, С. Н. Асхабов, Р. Ч. Кулаев, А. Г. Кусраев,
С. С. Кутателадзе, А. К. Погребков, Ю. Г. Решетняк

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. http://publicationethics.org/about.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте rio@smath.ru.

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

Примечание: более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 22

Выпуск 2

Зав. редакцией В. В. Бозрова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 19.06.2020. Дата выхода в свет 26.06.2020.
Формат бумаги $60\times84^{1}/_{8}$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 12,09. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

Издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

Адрес издателя:
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380