

Главный редактор

А. Г. КУСРАЕВ

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Редакционная коллегия

А. В. АБАНИН
Южный федеральный университет;
Южный математический
институт — филиал ВЦ РАН

Н. А. ВАВИЛОВ
Санкт-Петербургский госуниверситет

А. О. ВАТУЛЬЯН
Южный федеральный университет;
Южный математический
институт — филиал ВЦ РАН

С. К. ВОДОПЬЯНОВ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

Е. И. ГОРДОН
Иллинойский университет,
Урбана, США

А. И. КОЖАНОВ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

В. А. КОЙБАЕВ
Южный математический
институт — филиал ВЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет
им. К. Л. Хетагурова

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК
Южный федеральный университет;
Южный математический
институт — филиал ВЦ РАН

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

В. Д. МАЗУРОВ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

А. М. НАХУШЕВ
Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН

С. Г. САМКО
Южный федеральный университет;
Университет Алгарве, Португалия

В. Г. ТРОИЦКИЙ
Альбертский университет,
Эдмонтон, Канада

Ш. С. ХУБЕЖТЫ
Южный математический
институт — филиал ВЦ РАН

А. Б. ШАБАТ
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН;
Карачаево-Черкесский государственный
университет им. У. Д. Алиева

И. И. ШАРАПУДИНОВ
Дагестанский государственный
педагогический университет;
Южный математический —
институт — филиал ВЦ РАН

Ответственный секретарь

Е. К. БАСАЕВА

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
ЭЛЕКТРОННАЯ ВЕРСИЯ: www.vmj.ru

© Южный математический институт —
филиал ВЦ РАН, 2017

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 19, выпуск 1

январь–март, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Баврин И. И., Яремко О. Э. Реконструкция функции, аналитической в единичном круге из \mathbb{C}	3
Биткина В. В. Автоморфизмы монстра Камерона с параметрами (6138, 1197, 156, 252)	11
Гиль А. В., Ногин В. А. Комплексные степени одного дифференциального оператора, связанного с оператором Шредингера	18
Джусоева Н. А., Дряева Р. Ю. Циклические элементарные сети	26
Климентов С. Б. О комбинациях диффеоморфных сдвигов окружности и некоторых одномерных интегральных операторов	30
Коробейник Ю. Ф. О распределении нулей одного класса мероморфных функций ...	41
Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышкова Р. В. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с нелокальным условием	50
Портнов Е. Н., Устинов Ю. А. Построение решения задачи Ляме для цилиндра с винтовой анизотропией и его приложение в гемодинамике артериальных сосудов	59
Султыгов М. Д. Многомерный аналог гипотезы Бибербаха для обобщенно звездных функций в пространстве \mathbb{C}^n , $n \geq 2$	67
Тасоев Б. Б. Сжимающие проекторы в $L_{p(\cdot)}$ -пространствах	72

УДК 517.544.76

РЕКОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИИ,
АНАЛИТИЧЕСКОЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ИЗ С

И. И. Баврин, О. Э. Яремко

Изучается проблема восстановления функции, аналитической в круге по ее интегральным характеристикам. Представлен алгоритм решения обратной задачи интегральной геометрии в пространстве аналитических в единичном круге функций. Найдены два простых интегральных представления для функций, аналитических в единичном круге. Первая формула восстанавливает функцию по средним вдоль вертикальных отрезков. Вторая формула восстанавливает функцию по ее взвешенным средним на окружности.

Ключевые слова: преобразование Радона, интегральное представление, обратная задача, полином Лежандра.

1. Введение

Преобразование Радона переводит функцию, заданную на одном геометрическом объекте, в функцию, заданную на другом геометрическом объекте. Преобразование Радона составляет основу интегральной геометрии. Например, переход от функций, определенных на плоскости, к функциям на прямых осуществляется интегрированием исходной функции по каким-либо кривым в области ее задания. Подобные преобразования имеют широкое применение. Одним из таких применений служит томография, основанная на решении обратной задачи интегральной геометрии — восстановлении многомерных функций по их интегральным характеристикам [1–6]. В настоящее время преобразование Радона [1, 5] широко применяется в различных областях науки.

Основная идея нашей работы состоит в следующем: метод реконструкции функции $f(x, y)$ зависит от класса рассматриваемых функций. Чем уже класс рассматриваемых функций, тем меньше информации необходимо знать для восстановления функции. Нами изучается класс функций, аналитических в единичном круге. Ставится задача о реконструкции функции $f(x, y)$ по ее интегралам вдоль отрезков, проходящих через начало или по ее интегралам вдоль семейства вертикальных отрезков. Задача восстановления функции, аналитической в единичном круге по ее интегралам вдоль отрезков, проходящих через начало координат, известна и полностью исследована в работах И. И. Баврина [7–14]. Задача о реконструкции функции $f(x, y)$ по ее интегралам вдоль семейства вертикальных отрезков ранее не изучалась.

2. Полиномы Лежандра

Напомним полезные сведения из теории полиномов Лежандра [15–17]. Функции Лежандра в математике являются решениями дифференциального уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1) P_n(x) = 0.$$

Эти обыкновенные дифференциальные уравнения часто встречаются в физике и других областях техники. В частности, это происходит при решении уравнения Лапласа (и связанных с ними дифференциальных уравнений в частных производных) в сферических координатах. Эти решения для $n = 0, 1, 2, \dots$ (с нормализацией $P_n(1) = 1$) образуют последовательность ортогональных многочленов, называемых многочленами Лежандра. Каждый многочлен Лежандра $P_n(x)$ выражается формулой Родригеса

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Интегральное представление полиномов Лежандра имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + i\sqrt{1-x^2} \cos t)^n dt, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Полиномы Лежандра также могут быть определены как коэффициенты разложения в ряд Тейлора производящей функции

$$\frac{1}{(1-2xz+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(x).$$

В физике эта формула является основой для мультипольных разложений. Ниже нам понадобятся одно из подобных разложений, а именно:

$$\frac{1-x^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) z^k P_k(x). \quad (2)$$

Важное свойство полиномов Лежандра состоит в том, что они ортогональны относительно внутреннего произведения на отрезке $-1 \leq x \leq 1$:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \quad (3)$$

δ_{mn} — символ Кронеккера.

3. Основной результат

ЗАДАЧА А: Реконструкция функции $w = f(z)$ по ее интегралам вдоль отрезков, проходящих через начало.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в единичном круге и непрерывна в его замыкании; пусть также на каждом из отрезков $O\eta = \{z : z = \varepsilon\eta, 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$ вычислено

ее взвешенное среднее значение. Требуется восстановить функцию $w = f(z)$ в каждой точке единичного круга.

В работе И. И. Баврина [14] для функций, аналитических в единичном круге и непрерывных в его замыкании, получена интегральная формула Коши — Баврина

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} L_\gamma \left[\frac{1}{1 - \frac{z}{\eta}} \right] L_\gamma^{-1}[f](\eta) \frac{d\eta}{\eta}, \quad (4)$$

где L_γ^{-1} — оператор, обратный к оператору Темлякова — Баврина [14] $L_\gamma = \gamma + z \frac{d}{dz}$. Оператор L_γ^{-1} имеет вид [14]

$$L_\gamma^{-1}[f](\eta) = \int_0^1 \varepsilon^{\gamma-1} f(\varepsilon\eta) d\varepsilon, \quad |\eta| = 1, \quad \gamma > 0. \quad (5)$$

Правую часть формулы (5) можно интерпретировать как взвешенное среднее значение функции $w = f(z)$, вычисленное по отрезку $\{z : z = \eta\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$. Таким образом, интегральная формула (4) решает задачу А.

ЗАДАЧА В: Реконструкция функции $w = f(z)$ по ее интегралам по каждому из вертикальных отрезков внутри замкнутого единичного круга.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в единичном круге и непрерывна в его замыкании; пусть также на каждом из вертикальных отрезков внутри замкнутого единичного круга вычислено среднее значение этой функции $w = f(z)$. Требуется восстановить функцию $w = f(z)$ в каждой точке единичного круга по ее средним:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x + i\sqrt{1-x^2} \cos t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

вычисленным для каждого значения $x \in [-1, 1]$.

ЗАДАЧА С: Реконструкция функции $w = f(z)$ по ее взвешенным средним интегралам на окружности.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в единичном круге и непрерывна в его замыкании. Как известно, интеграл функции, аналитической в единичном круге и непрерывной в его замыкании по границе круга, равен значению функции в начале координат, т. е.

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\psi}) d\psi = 2\pi f(0).$$

Тогда ее среднее значение по единичной окружности равно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\psi}) d\psi = f(0).$$

Изменение начала обхода окружности не дает ничего нового:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i(\varphi+\psi)}) d\psi = f(0), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Если теперь вычислить взвешенные средние по окружности

$$F(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\gamma\psi} f(\eta e^{i\psi}) d\psi, \quad |\eta| = 1, \quad \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то задача восстановления аналитической функции $w = f(z)$ в каждой точке единичного круга станет корректной.

Теорема 1. Если функция $w = f(z)$ аналитическая в единичном круге и непрерывная в его замыкании, то решение задачи А определяется интегральным представлением

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} L_\gamma \left[\frac{1}{1 - \frac{z}{\eta}} \right] L_\gamma^{-1}[f](\eta) \frac{d\eta}{\eta};$$

для решения задачи В справедливо интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - z^2}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}} F(x) dx, \quad |z| < 1,$$

где $F(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, — среднее значение функции $w = f(z)$, взятое по вертикальному отрезку $z = x + i\sqrt{1-x^2} \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$, соединяющему точки $(x, \sqrt{1-x^2})$ и $(x, -\sqrt{1-x^2})$ единичной окружности; решение задачи С определяется формулой

$$f(z) = \frac{1}{e^{i2\pi\gamma} - 1} \int_{|\eta|=1} L_\gamma \left[\frac{1}{\eta - z} \right] F(\eta) d\eta, \quad |z| < 1, \quad \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$F(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\gamma\psi} f(\eta e^{i\psi}) d\psi, \quad \eta = e^{i\varphi},$$

— суть среднее значение функции $w = z^\gamma f(e^{i\varphi} z)$, взятое по единичной окружности $C := \{z : e^{i\psi}, \psi \in [0, 2\pi]\}$, если $\gamma = 1, 2, \dots$, то нужно брать взвешенные средние по окружности в виде

$$F(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi e^{i\gamma\psi} f(\eta e^{i\psi}) d\psi, \quad |\eta| = 1,$$

при этом формула обращения имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C L_\gamma \left[\frac{1}{\eta - z} \right] F(\eta) d\eta, \quad |z| < 1, \quad \gamma = 1, 2, \dots$$

◁ Задача А. Доказательство содержится в работе одного из авторов И. И. Баврина [14].

Задача В. Пусть разложение функции $w = f(z)$ в ряд Тейлора имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Тогда

$$f(rz) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k z^k. \quad (6)$$

Рассмотрим функцию

$$F_r(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(r(x + i\sqrt{1-x^2} \cos t)\right) dt, \quad 0 < r < 1.$$

Из формулы для полиномов Лежандра (1) на основании (6) получим равенство

$$F_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k P_k(x). \quad (7)$$

Из формулы (7) и из свойства ортогональности полиномов Лежандра (3) получим тождество

$$f(rz) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} F_r(x) dx, \quad |z| < 1.$$

Фиксируя z и устремляя $r \rightarrow 1$, получаем требуемое интегральное представление для $f(z)$.

Задача С. Из определения оператора L_γ приходим к равенствам

$$L_\gamma[F(\eta)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\gamma\psi} L_\gamma[f(\eta e^{i\psi})] d\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\psi} (e^{i\gamma\psi} f(\eta e^{i\psi})) d\psi, \quad |\eta| < 1.$$

Тогда по формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$L_\gamma[F(\eta)] = \frac{1}{2\pi i} (e^{i\gamma\psi} f(\eta e^{i\psi})) \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{i2\pi\gamma} - 1}{2\pi i} f(\eta).$$

Следовательно,

$$F(\eta) = \frac{e^{i2\pi\gamma} - 1}{2\pi i} L_\gamma^{-1}[f(\eta)], \quad |\eta| < 1.$$

Функция $w = f(\eta)$ непрерывна в замыкании единичного круга, поэтому в последней формуле аргумент нужно устремить на границу. Применение формулы (4) завершает доказательство. \triangleright

Следствие 1. Для того чтобы функция $w = f(z)$ была аналитична в единичном круге и непрерывна в его замыкании и ее разложение в степенной ряд имело вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы среднее значение $F(x)$ имело разложение в ряд по полиномам Лежандра вида

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x).$$

◁ *Необходимость* вытекает из формулы (7).
Достаточность. Пусть

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right) z^m \int_{-1}^1 P_m(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \triangleright \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1. Пусть задана функция $f(z) = e^{rz}$, $0 < r < 1$. Вычислим ее среднее значение

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{r(x+i\sqrt{1-x^2}\cos t)} dt = e^{rx} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ir\sqrt{1-x^2}\cos t} dt.$$

Воспользовавшись интегральным представлением для функции Бесселя нулевого порядка [15]

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz\cos t} dt,$$

находим

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{r(x+i\sqrt{1-x^2}\cos t)} dt = e^{rx} J_0(r\sqrt{1-x^2}).$$

Согласно следствию 1 можно записать тождество

$$e^{rx} J_0(r\sqrt{1-x^2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} P_k(x).$$

ПРИМЕР 2. Пусть дана функция $f(z) = \frac{1}{1-rz}$, $0 < r < 1$. Вычислим ее среднее значение

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{1-r(x+i\sqrt{1-x^2}\cos t)} dt = \frac{1}{1-rx} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{1-i\frac{r\sqrt{1-x^2}}{1-rx}\cos t} dt.$$

Воспользуемся интегралом

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos t} dt = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad |\varepsilon| < 1.$$

В результате для функции $F(x)$ имеем значение

$$F(x) = \frac{1}{1-rx} \frac{1}{\sqrt{1-\left(-i\frac{r\sqrt{1-x^2}}{1-rx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}.$$

Вновь воспользовавшись следствием 1, запишем тождество

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k(x).$$

В итоге получена производящая функция для полиномов Лежандра [17].

Заключение. В работе решена проблема реконструкции для функции $w = f(z)$, аналитической в единичном круге. Представлены три формулы, восстанавливающие функцию $w = f(z)$ по ее интегралам. Первая формула получена И. И. Бавриным в работе [14]. В ней интегрирование осуществляется вдоль отрезков, проходящих через начало. Вторая и третья формулы выведены авторами в настоящей статье. Во второй формуле восстановление функции происходит по ее интегралам вдоль семейства вертикальных отрезков, в третьей по ее взвешенным интегралам по границе круга. Заметим, что в формуле Радона восстановление функции ведется по значениям интегралов, взятых по всем возможным направлениям.

Литература

1. Грузман И. С. Математические задачи компьютерной томографии // Соросовский образовательный журн.—2001.—№ 5.
2. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия.—М.: Мир, 1982.—304 с.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические задачи компьютерной томографии.—М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1987.—160 с.
4. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач.—М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1990.—232 с.
5. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.—288 с.
6. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии.—М.: Мир, 1983.—352 с.
7. Баврин И. И. Обобщение формулы Пуассона — Йенсена // Докл. АН.—2010.—Т. 431, № 2.—С. 154–156.
8. Баврин И. И. Обобщение формулы Шварца — Йенсена // Докл. АН.—2010.—Т. 433, № 4.—С. 439–440.
9. Баврин И. И. Обратная задача для интегральной формулы Коши в кольце // Докл. АН.—2009.—Т. 428, № 2.—С. 151–152.
10. Баврин И. И. Обратные задачи в интегральных формулах // Докл. АН.—2013.—Т. 450, № 3.—С. 257–259.
11. Баврин И. И. Интегральные представления в звездных областях // Докл. АН.—2012.—Т. 447, № 4.—С. 359–360.
12. Баврин И. И. Обратные задачи для интегральных формул Коши, Шварца и Пуассона в поликруге // Докл. АН.—2010.—Т. 434, № 6.—С. 727–729.
13. Баврин И. И. Интегральные представления в кратно-круговых областях. Обратные задачи // Докл. АН.—2011.—Т. 441, № 5.—С. 583–587.
14. Баврин И. И. Операторный метод в комплексном анализе.—М.: Прометей, 1991.—200 с.
15. Бейтман Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейн.—М.: Наука, 1966.—Т. 2.—582 с.
16. Янке Е. Специальные функции, формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш.—М.: Наука, 1977.—342 с.
17. Сеге Г. Ортогональные многочлены.—Физматгиз, 1962.—500 с.

Статья поступила 10 мая 2016 г.

БАВРИН ИВАН ИВАНОВИЧ

Московский педагогический государственный университет,
профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики
РОССИЯ, 119991, г. Москва, ул. Малая Пироговская, 1/1
E-mail: ivbavrin@yandex.ru

ЯРЕМКО ОЛЕГ ЭМАНУИЛОВИЧ

Пензенский государственный педагогический университет,
профессор кафедры компьютерных технологий
РОССИЯ, 440038, г. Пенза, ул. Красная, 40
E-mail: yaremki@mail.ru

A RECONSTRUCTION OF ANALYTIC FUNCTIONS ON THE UNIT DISK OF \mathbb{C}

Bavrin I. I., Yaremko O. E.

A reconstruction of an analytic function on the unit disk of \mathbb{C} by its integral characteristics is studied. An algorithm for solving the inverse problem of integral geometry in the space of analytic functions in the unit disk is presented. The main idea behind the paper is that the reconstruction method is determined by the class of functions under consideration: The narrower the class of functions is, the less information one needs to know to restore the function. The simplest reconstruction formulas are obtained in the class of analytic functions in the unit disk. Three integral representations for analytic functions in the unit disk are established. The first formula reconstructs the function by its means along radii. The second one restores an analytic function in the unit ball by its means along the vertical line segments. The third integral formula reconstructs an analytic function from its weighted means on the circle.

Keywords: the Radon transform, integral representation, the inverse problem, the Legendre polynomial.

УДК 519.17

АВТОМОРФИЗМЫ МОНСТРА КАМЕРОНА
С ПАРАМЕТРАМИ (6138, 1197, 156, 252)

В. В. Биткина

Пусть $3-(V, K, \Lambda)$ схема $E = (X, B)$ является расширением симметричной 2-схемы. Тогда либо E является адамаровой $3-(4\Lambda + 4, 2\Lambda + 2, \Lambda)$ схемой, либо $V = (\Lambda + 1)(\Lambda^2 + 5\Lambda + 5)$ и $K = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$, либо $V = 496$, $K = 40$ и $\Lambda = 3$. Дополнительный граф к блочному графу $3-(496, 40, 3)$ схемы сильно регулярен с параметрами (6138, 1197, 156, 252). Назовем этот дополнительный граф монстром Камерона. В работе найдены автоморфизмы монстра Камерона.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, вершинно симметричный граф, группа автоморфизмов графа.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$. Через a^\perp обозначается подграф $\{a\} \cup [a]$.

Граф Γ называется *сильно регулярным графом* с параметрами (v, k, λ, μ) , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k , каждое ребро Γ лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин.

Система инцидентности (X, \mathcal{B}) с множеством точек X и множеством блоков \mathcal{B} называется $t-(V, K, \Lambda)$ схемой, если $|X| = V$, каждый блок содержит ровно K точек и любые t точки лежат ровно в Λ блоках. Любая 2-схема является (V, B, R, K, Λ) схемой, где B — число блоков, каждая точка инцидентна R блокам, и имеют место равенства $VR = BK$, $(V - 1)\Lambda = R(K - 1)$. Схема называется *симметричной*, если $B = V$. Схема называется *квазисимметричной*, если для любых двух блоков $B, B' \in \mathcal{B}$ имеем $|B \cap B'| \in \{x, y\}$. Числа x, y называются *числами пересечений квазисимметричной схемы*, и предполагается, что $x < y$.

Блочный граф квазисимметричной схемы (X, \mathcal{B}) в качестве вершин имеет блоки схемы и два блока $B, C \in \mathcal{B}$ смежны, если $|B \cap C| = y$. Блочный граф квазисимметричной (V, B, R, K, Λ) схемы сильно регулярен с собственными значениями $k = (R - 1)(K - xB + x)/(y - x)$ кратности 1, $(R - K - \Lambda + x)/(y - x)$ кратности $V - 1$ и $-(K - x)/(y - x)$ кратности $B - V$.

© 2017 Биткина В. В.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 15-11-10025 (теорема), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006 (следствие).

Производной схемой для t - (V, K, Λ) схемы $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ в точке $x \in X$ называется схема \mathcal{D}_x с множеством точек $X_x = X - \{x\}$ и множеством блоков $\mathcal{B}_x = \{B - \{x\} : x \in B \in \mathcal{B}\}$. Схема \mathcal{E} называется *расширением схемы* \mathcal{D} , если производная схемы \mathcal{E} в некоторой точке изоморфна \mathcal{D} . Хорошо известно, что проективная плоскость расширяема, только если ее порядок равен 2 или 4. П. Камерон [1, теорема 1.35] описал расширения симметричных 2-схем.

Предложение 1. Пусть 3 - (V, K, Λ) схема $\mathcal{E} = (X, \mathcal{B})$ является расширением симметричной 2-схемы. Тогда верно одно из утверждений:

- (1) \mathcal{E} является адамаровой 3 - $(4\Lambda + 4, 2\Lambda + 2, \Lambda)$ схемой;
- (2) $V = (\Lambda + 1)(\Lambda^2 + 5\Lambda + 5)$ и $K = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$;
- (3) $V = 496$, $K = 40$ и $\Lambda = 3$.

В случае (3) имеем $R = V - 1 = 495$, $B = VR/K = 496 \cdot 495/40 = 6138$ и дополнительный граф к блочному графу схемы имеет параметры $(6138, 1197, 156, 252)$ и спектр $1197^1, 9^{5642}, -105^{495}$. Отсюда максимальный порядок коклики не больше $vm/(k + m) = 6138 \cdot 105/1302 = 495$. В частности, граница Хофмана для коклик совпадает с границей Цветковича. Дополнительный граф к блочному графу 3 - $(496, 40, 3)$ схемы назовем монстром Камерона. В [2] доказано, что окрестность любой вершины в монстре Камерона — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$. В [3] найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$.

Предложение 2. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| \leq 171$, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 72l$, либо $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 168l - 21$, либо $p = 19$ и $\alpha_1(g) = 456l + 171$;
- (2) Ω является n -кликкой, либо
 - (i) $p = 13$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 312l + 156$, либо
 - (ii) $p = 2$, $n = 9$ и $\alpha_1(g) = 48l + 12$ или $n = 11$ и $\alpha_1(g) = 32l - 12$, либо
 - (iii) $p = 5$, $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 120l + 45$ или $n = 7$ и $\alpha_1(g) = 120l - 30$;
- (3) Ω является $(3t + 1)$ -кокликкой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 72l + 12 - 45t$;
- (4) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 13$.

Там же доказано, что сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ не является реберно симметричным. В данной работе найдены автоморфизмы монстра Камерона.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями r, s , $s < 0$. Если D — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - D$ смежна точно с $w(k-d)/(v-w)$ вершинами из D .

◁ Это утверждение хорошо известно (см., например, [4, § 2]). ▷

Лемма 2 [5, теорема 3.2]. Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и собственными значениями $k, r, -t$. Если g — автоморфизм графа Γ и $\Omega = \text{Fix}(g)$, то $|\Omega| \leq v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k-r)$.

Из лемм 1–2 следует, что для сильно регулярного графа с параметрами (6138, 1197, 156, 252) число вершин в кокликке (кликке) не больше 495 (не больше 12) и $|\Omega| \leq 6138 \cdot 252/1188 = 31 \cdot 42 = 1302$.

Лемма 3. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (1197, 156, 15, 21), G — группа автоморфизмов графа Γ , g — элемент порядка 11 из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) $|\Omega| = 11t - 2$, $t \leq 15$, степень вершины в Ω равна $11s + 2$, $2 \leq s \leq 10$ и $\alpha_1(g) = 33(8m + 9 - 5t)$;

(2) $|G|$ не делится на 121.

◁ Имеем $|\Omega| = 11t - 2 \leq 171$, поэтому $t \leq 15$. Далее, степень вершины в Ω равна $11s + 2$, $s \leq 13$, $\lambda_\Omega = 4, 15$, $\mu_\Omega = 10, 21$.

Допустим, что Ω содержит вершину c степени, не меньшей 123. Тогда число ребер между $\Omega(c)$ и $\Omega_2(c)$ не меньше $123 \cdot 8$, но не больше $39 \cdot 21$, противоречие.

Допустим, что Ω содержит вершину c степени 13. Тогда число ребер между $\Omega(c)$ и $\Omega_2(c)$ равно $10(11t - 16)$, но не больше $13 \cdot 96$, поэтому t не больше 12. Теперь $\Omega(c)$ содержит не более одной вершины, смежной с 96 вершинами из $\Omega_2(c)$, поэтому указанное число ребер не больше $13 \cdot 85$ и t не больше 11. Повторив данное рассуждение несколько раз, убедимся, что $t \leq 3$. Теперь число ребер между $\Omega(c)$ и $\Omega_2(c)$ равно $10(11t - 16) = 8 \cdot 13$ и $10t = 24$, противоречие.

По [2, лемма 3] имеем $\chi_1(g) = (55t + \alpha_1(g))/3 - 67/8$ и $\alpha_1(g) = 3(8l + 67 - 55t)$ делится на 11. Поэтому $l = 11m + 4$ и $\alpha_1(g) = 33(8m + 9 - 5t)$.

Допустим, что h — автоморфизм порядка 121 графа Γ и $h^{11} = g$. Тогда Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(11t - 2, 34, 15, 21)$, противоречие.

Пусть $U = \langle g, h \rangle$ — подгруппа порядка 121 в группе автоморфизмов графа Γ , $\Sigma = \text{Fix}(U)$, $a \in \Sigma$. Тогда $\Sigma(a)$ содержит не менее двух вершин. Для вершины $b \in \Sigma(a)$ подграф $\Sigma(a) \cap [b]$ содержит 4 или 15 вершин. Если Σ является кликой, то $|\Sigma| = 10$, $\Sigma(a) \cap [b]$ содержит 8 вершин из $\Sigma(a)$ и еще 7 вершин, противоречие. Как и выше доказывается, что степень любой вершины в Σ не меньше 24, $|\Sigma| = 11e - 2$.

Допустим, что для $a \in \Sigma$ подграф $[a]$ не содержит U -орбиту Δ длины 121. Тогда для вершины $u \in \Delta$ подграф $[u] \cap [a]$ содержит не более одной вершины из Σ , противоречие с тем, что 21 и 20 не делятся на 11. Значит, Δ содержится в $[a]$ для любой вершины $a \in \Sigma$. Противоречие с тем, что число вершин в Σ не меньше 3.

Итак, в Γ нет U -орбит длины 121. Теперь $1197 \leq |\Sigma| + 12(163 - |\Sigma|)$ и $|\Sigma| \leq 69$. Далее, $156 \leq |\Sigma(a)| + 12(35 - |\Sigma(a)|)$ и $|\Sigma(a)| \leq 24$. Таким образом, Σ — регулярный граф степени 24 и ввиду леммы 3 имеем $|\Sigma| \geq 45 \cdot 19/7$, противоречие. ▷

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [6]. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений графа, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v - k - 1 & -r - 1 & -s - 1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей 1, $f, v - f - 1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает мономиальное матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Простран-

ство \mathbf{C}^v является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$ -инвариантных подпространств W_0, W_1, W_2 матрицы смежности графа Γ . Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда для любого $g \in G$ получим равенство

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^2 Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

В леммах 4–6 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$ и спектром $1197^1, 9^{5642}, -105^{495}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и χ_2 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 495.

Лемма 4. *Имеем $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/114 + 198/19$, $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l , не кратного p , и $495 - \chi_2(g)$ делится на p .*

◁ Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$. Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5642 & 806/19 & -217/19 \\ 455 & -825/19 & 198/19 \end{pmatrix}$$

и $\chi_2(g) = (15\alpha_0(g) - 25\alpha_1(g)/19 + 6\alpha_2(g)/19)/186$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/114 + 198/19$.

Два последних утверждения леммы следуют из леммы 1 [7]. ▷

3. Автоморфизмы монстра Камерона с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 31$ и $\alpha_1(g) = 31 \cdot 78$, либо $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 11(114l - 6)$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 3(114l + 54)$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 2(114l - 33)$;*

(2) *если Ω является n -кликкой, то либо*

(i) *$p = 19$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 19(6l + 3)$, либо*

(i) *$p = 13$, $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 6 \cdot 13(19l - 5)$, либо*

(iii) *$p = 5$, $n = 3$ и $\alpha_1(g) = 3(190l + 25)$ или $n = 8$ и $\alpha_1(g) = 6(95l + 20)$, либо*

(iv) *$p = 2$, $n = 10$ и $\alpha_1(g) = 6(38l + 4)$ или $n = 12$ и $\alpha_1(g) = 6(38l - 21)$;*

(3) *если Ω является m -кокликкой, то $p = 3$, $m = 3t$, $t \leq 70$ и $\alpha_1(g) = 9(38l + 10 + 3t)$ или $p = 7$, $m = 7t - 1$, $t \leq 70$ и $\alpha_1(g) = 63(38l + 8 + t)$;*

(4) *если Ω содержит ребро и является объединением m ($m \geq 2$) изолированных клик, то $p = 2$ и порядки изолированных клик в Ω равны 10 или 12.*

◁ Пусть Ω — пустой граф, $\alpha_i(g) = pw_i$. Так как $6138 = 9 \cdot 22 \cdot 31$, то $p \in \{2, 3, 11, 31\}$.

Пусть $p = 31$. Тогда $\chi_2(g) = 31(-w_1 + 36)/114$ и $\alpha_1(g) = 31(114l - 36)$. Если $l = 2$, то $\alpha_1(g) = 31 \cdot 192$ и найдется кликовая $\langle g \rangle$ -орбита длины 31, противоречие. Значит, $\alpha_1(g) = 31 \cdot 78$, $\alpha_2(g) = 31 \cdot 120$.

Пусть $p = 11$. Тогда $\chi_2(g) = 11(-w_1 + 108)/114$, $\alpha_1(g) = 11(114l - 6)$ и $\alpha_2(g) = 11(192 - 114l)$.

Пусть $p = 3$. Тогда число $\chi_2(g) = (-w_1 + 396)/38$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 3(114l + 54)$.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_2(g) = (-w_1 + 594)/57$ нечетно и $\alpha_1(g) = 2(114l - 33)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n -кликкой. Если $n = 1$, то p делит 1197 и 4940, поэтому $p = 19$, $\chi_2(g) = (63 - w_1)/6$ и $\alpha_1(g) = 19(6l + 3)$.

Пусть $n \geq 2$ и $a, b \in \Omega$. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^\perp$, то p делит 1040, 3900 и $158 - n$, поэтому и $p = 2, 5, 13$. В случае $p = 2$ по предложению 2 имеем $n = 10, 12$. Если $n = 10$, то число $\chi_2(g) = (213 - \alpha_1(g)/6)/19$ нечетно и $\alpha_1(g) = 6(38l + 4)$. Если $n = 12$, то число $\chi_2(g) = (216 - \alpha_1(g)/6)/19$ нечетно и $\alpha_1(g) = 6(38l - 21)$.

В случае $p = 5$ получим $n = 3$, число $\chi_2(g) = (405 - \alpha_1(g)/3)/38$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 3(190l + 25)$ или $n = 8$, число $\chi_2(g) = (210 - \alpha_1(g)/6)/19$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 6(95l + 20)$.

В случае $p = 13$ получим $n = 2$, $\chi_2(g) = (201 - \alpha_1(g)/6)/19$ и $\alpha_1(g) = 6 \cdot 13(19l - 5)$.

Пусть Ω является m -коккликкой, $0 < m \leq 495$. Если $a, b \in \Omega$, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [b]$, $[a] - [b]$, поэтому p делит 252 и 945. Отсюда $p = 3, 7$. Если $p = 3$, то $m = 3t$, $t \leq 165$, число $\chi_2(g) = 3(3t + 132 - \alpha_1(g)/9)/38$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 9(38l + 10 + 3t)$.

Если $p = 7$, то $m = 7t - 1$, $t \leq 70$, $\chi_2(g) = 3(7t + 132 - \alpha_1(g)/9)/38$ и $\alpha_1(g) = 63(38l + 8 + t)$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением m ($m \geq 2$) изолированных клик. Если a, c — несмежные вершины из Ω , то g действует полурегулярно на $[a] \cap [c]$ и p делит 252.

Пусть a, b — смежные вершины из клики, лежащей в Ω . Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^\perp$, то p делит 1040. Отсюда $p = 2$ и порядки изолированных клик в Ω равны 10 или 12. \triangleright

Лемма 6. Если Ω содержит геодезический путь b, a, c , то выполняются следующие утверждения:

- (1) если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины $a \in \Omega$, то $p \leq 5$, $\Omega = a^\perp$ и $\alpha_1(g) = 0$;
- (2) g точно действует на $[a]$ для некоторого 2-пути b, a, c и $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31\}$;
- (3) если $\Omega(a)$ не содержит геодезических 2-путей, то $\Omega(a)$ — коклика и $p = 3$.

\triangleleft Если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины $a \in \Omega$, то $\Omega = a^\perp$ и $\alpha_1(g) = 0$. Далее, $\chi_2(g) = 3(\alpha_0(g) + 66)/38$, и $495 - \chi_2(g)$ делится на p . Заметим, что объединение подграфов $u^\perp - [a]$ по всем вершинам u из некоторой $\langle g \rangle$ -орбиты длины p содержит $p(1198 - 252)$ вершин и $946p \leq 4940$, поэтому $p \neq 5$.

Можно считать, что g точно действует на $[a]$ для некоторого 2-пути b, a, c из Ω (в противном случае g фиксирует каждую вершину графа Γ). Теперь ввиду предложения 2 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31\}$.

Пусть $\Omega(a)$ не содержит геодезических 2-путей. По предложению 2 подграф $\Omega(a)$ является коккликкой и $p = 3$. \triangleright

Теорема. Пусть Γ — монстр Камерона с параметрами (6138, 1197, 156, 252), $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| \leq 171$, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф, либо $p = 31$ и $\alpha_1(g) = 31 \cdot 78$, либо $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 11(114l - 6)$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 3(114l + 54)$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 2(114l - 33)$;
- (2) Ω является n -кликкой, либо
 - (i) $p = 19$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 19(6l + 3)$, либо
 - (ii) $p = 13$, $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 6 \cdot 13(19l - 5)$, либо
 - (iii) $p = 5$, $n = 3$ и $\alpha_1(g) = 3(190l + 25)$ или $n = 8$ и $\alpha_1(g) = 6(95l + 20)$, либо
 - (iv) $p = 2$, $n = 10$ и $\alpha_1(g) = 6(38l + 4)$ или $n = 12$ и $\alpha_1(g) = 6(38l - 21)$;

(3) Ω является m -кликкой, $p = 3$, $m = 3t$, $t \leq 70$ и $\alpha_1(g) = 9(38l + 10 + 3t)$ или $p = 7$, $m = 7t - 1$, $t \leq 70$ и $\alpha_1(g) = 63(38l + 8 + t)$;

(4) Ω содержит ребро и является объединением m ($m \geq 2$) изолированных клик, $p = 2$ и порядки изолированных клик в Ω равны 10 или 12;

(5) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 13$.

\triangleleft Доказательство теоремы следует из лемм 5–6 и предложения 2. \triangleright

До конца работы будем предполагать, что G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . По теореме $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31\}$ и $|G : G_a| = 18 \cdot 11 \cdot 31$.

Лемма 7. Пусть f — элемент порядка 31 из G , g — элемент простого порядка $p < 31$ из $C_G(f)$. Тогда либо Ω — пустой граф, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 31 \cdot 42$, либо выполняются следующие утверждения:

(1) если $p = 13$, то $|\Omega| = 31(13s + 3)$, $s \leq 3$ и $\alpha_1(g) = 3(38l + 93(13s + 3) + 392)$;

(2) $p \neq 11$.

\triangleleft Пусть f — элемент порядка 31 из G . По теореме $\alpha_1(f) = 31 \cdot 78$, $\alpha_2(f) = 31 \cdot 120$. Пусть g — элемент простого порядка $p < 31$ из $C_G(f)$. Если Ω — пустой граф, то p делит 78 и 120, поэтому $p = 2, 3$. В случае $p = 3$ число $\alpha_1(g) = 3(114l + 54)$ делится на 31, поэтому $7l - 13$ делится на 31 и $l \geq 24$, противоречие. В случае $p = 2$ число $\alpha_1(g) = 2(114l - 33)$ делится на 31, поэтому $5l + 1$ делится на 31 и $l = 6$.

Пусть Ω — непустой граф. Тогда $|\Omega| = 31t$ и p делит $198 - t$. Далее, $\chi_2(g) = (93t + 392 - \alpha_1(g)/3)/38$ и $\alpha_1(g) = 3(38l + 93t + 392)$ делится на p .

Если $p = 13$, то $t = 13s + 3$, и с учетом неравенства $31(13s + 3) \leq 1302$ имеем $s \leq 3$ и $8 - l$ делится на 13.

Если $p = 11$, то $t = 11s$. Так как g фиксирует не менее десяти $\langle f \rangle$ -орбит на $W = \{w \mid d(w, w^f) = 2\}$, то $10 \leq s$, противоречие. \triangleright

Лемма 8. Имеем $S(G) = O_{2,3}(G)$, цоколь \bar{T} группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_2(32)$ и либо

(1) \bar{T}_a — подгруппа порядка 16, $V = S(G)$ является 3-группой, $|V : V_a| = 3$ и \bar{T} действует неприводимо на V , либо

(2) \bar{T}_a — подгруппа порядка 32, $S(G) = VW$, где V является силовской 3-подгруппой из $S(G)$, $|V : V_a| = 3$ и \bar{T} действует неприводимо на V , W является силовской 2-подгруппой из $S(G)$, $|W : W_a| = 2$ и \bar{T} действует неприводимо на W .

\triangleleft Из лемм 3, 7 следует, что $S(G) = O_{2,3}(G)$.

Пусть \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По [8, таблица 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(32)$ или $O'N$. Но в группе $O'N$ наименьший индекс собственной подгруппы равен 122760, противоречие.

Значит, $\bar{T} \cong L_2(32)$ и \bar{T}_a — подгруппа порядка 16 или 32.

Если \bar{T}_a — подгруппа порядка 16, то $V = S(G)$ является абелевой 3-группой, $|V : V_a| = 3$ и \bar{T} действует неприводимо на V .

Если \bar{T}_a — подгруппа порядка 32, то $S(G) = VW$, где V является силовской 3-подгруппой из $S(G)$, $|V : V_a| = 3$ и \bar{T} действует неприводимо на V , W является силовской 2-подгруппой из $S(G)$, $|W : W_a| = 2$ и \bar{T} неприводимо на W . Лемма доказана. \triangleright

Следствие. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ (в частности, Γ — монстр Камерона), и группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Тогда $S(G) = O_{2,3}(G)$, цоколь \bar{T} группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_2(32)$ и либо

(1) \bar{T}_a — подгруппа порядка 16, $V = S(G)$ является абелевой 3-группой, $|V : V_a| = 3$ и \bar{T} действует неприводимо на V , либо

(2) \bar{T}_a — подгруппа порядка 32, $S(G) = VW$, где V является силовской 3-подгруппой из $S(G)$, $|V : V_a| = 3$ и \bar{T} действует неприводимо на V , W является силовской 2-подгруппой из $S(G)$, $|W : W_a| = 2$ и \bar{T} действует неприводимо на W .

В частности, $|G|$ не делится на 19 и Γ не является реберно симметричным графом.

◁ Доказательство следует из лемм 7–8. ▷

Литература

1. Cameron P., Van Lint J. Designs, Graphs, Codes and their Links.—Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1981.—240 p.—(London Math. Soc. Student Texts, № 22).
2. Махнев А. А. Расширения симметричных 2-схем // Межд. конф. Мальцевские чтения. Тез. докл.—Новосибирск, 2015.—С. 111.
3. Биткина В. В., Гутнова А. К., Махнев А. А. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (1197, 156, 15, 21) // Владикавказ. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 2.—С. 5–11.
4. Brouwer A. E., Haemers W. H. The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14.—P. 397–407.
5. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms // Discrete Math.—2011.—Vol. 311, № 2–3.—P. 132–144.
6. Cameron P. J. Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—232 p.—(London Math. Soc. Student Texts, №45).
7. Гаврилюк А. Л., Махнев А. А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.—2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
8. Zavaritsina A. V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electronic Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 15 августа 2016 г.

БИТКИНА ВИКТОРИЯ ВАСИЛЬЕВНА
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
ассистент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: bviktoriyav@mail.ru

AUTOMORPHISMS OF THE CAMERON'S MONSTER WITH PARAMETERS (6138, 1197, 156, 252)

Bitkina V. V.

Let the 3- (V, K, Λ) scheme $E = (X, B)$ be an extension of the symmetric 2-scheme. Then either E is Hadamard 3- $(4\Lambda + 4, 2\Lambda + 2, \Lambda)$ scheme, or $V = (\Lambda + 1)(\Lambda^2 + 5\Lambda + 5)$ and $K = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$, or $V = 496$, $K = 40$ and $\Lambda = 3$. The complementary graph of a block graph of 3- $(496, 40, 3)$ scheme is strongly regular with parameters (6138, 1197, 156, 252). Let's call this complementary graph Cameron's monster. In this paper automorphisms of monster are studied.

Key words: strongly regular graph, vertex symmetric graph, automorphism group of a graph.

УДК 517.983

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННОГО С ОПЕРАТОРОМ ШРЕДИНГЕРА¹

А. В. Гиль, В. А. Ногин

Изучаются комплексные степени дифференциального оператора второго порядка $S_{\bar{\lambda}}$, с комплексными коэффициентами в главной части. Отрицательные степени этого оператора реализованы как потенциалы $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}\varphi$ с нестандартной метрикой. Положительные степени, обратные к отрицательным, — как аппроксимативные обратные операторы. Описан также образ $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}(L_p)$ в терминах оператора, левого обратного к $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}$.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, образ, мультипликатор, комплексные степени, метод аппроксимативных обратных операторов.

1. Введение

В работе исследуются комплексные степени дифференциального оператора $S_{\bar{\lambda}}$ в \mathbb{R}^{n+1} с комплексными коэффициентами в главной части:

$$S_{\bar{\lambda}} = m^2 I + ib \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n (1 - i\lambda_k) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad (1)$$

где $m > 0$, $b \neq 0$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Комплексные степени оператора $S_{\bar{\lambda}}$ с отрицательными вещественными частями на функциях $\varphi(x, t) \in \Phi(\mathbb{R}^{n+1})$, где $\Phi(\mathbb{R}^{n+1})$ — пространство Лизоркина (см. п. 2.2), определяются в образах Фурье равенством

$$(\widehat{S_{\bar{\lambda}}^{-\alpha/2} \varphi})(\xi, \tau) = \left(m^2 + b\tau - |\xi'|^2 + i \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2 \right)^{-\alpha/2} \widehat{\varphi}(\xi, \tau). \quad (2)$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}^1$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$.

Получены интегральные представления комплексных степеней (2) в виде интегралов типа потенциала с нестандартной метрикой. Соответствующие дробные потенциалы имеют вид:

$$(H_{\bar{\lambda}}^{\alpha} \varphi)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h_{\bar{\lambda}}^{\alpha}(y, s) \varphi(x - y, t - s) dy ds, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1, \quad (3)$$

где

$$h_{\bar{\lambda}}^{\alpha}(y, s) = d_{n,\alpha}(\bar{\lambda})(s)_+^{\frac{\alpha-n-1}{2}} \exp \left\{ i \frac{m^2}{b} s - \sum_{k=1}^n \frac{b(\lambda_k - i)y_k^2}{4(1 + \lambda_k^2)s} \right\}, \quad (4)$$

© 2017 Гиль А. В., Ногин В. А.

¹ Работа первого автора выполнена в рамках совместного научного проекта международного конкурса «ГКН МОН РА — ЕГУ — ЮФУ РФ» № ВнГр-07/2017-31.

$$d_{n,\alpha}(\bar{\lambda}) = \frac{b^{(n-\alpha)/2} \exp\left(\frac{-\alpha-n}{4}\pi i\right)}{(4\pi)^{n/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{k=1}^n \sqrt{1-i\lambda_k}}.$$

Установлены оценки для оператора $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}$ из L_p в L_q . В рамках метода аппроксимативных обратных операторов, построено обращение потенциалов $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}\varphi$, $\varphi \in L_p$. Дано также описание образа $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}(L_p)$ в терминах обращающих конструкций.

Таким образом, в работе получены явные выражения для комплексных степеней $S_{\bar{\lambda}}^{\alpha/2}\varphi$ с положительными вещественными частями и описаны области определения этих степеней.

В настоящее время имеется ряд работ по теории комплексных степеней дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами (см. [4, гл. 9, 11]), обзорную статью [2], а также работы [3–9]). Рассмотренный здесь случай оператора (1) является одним из наиболее трудных, что обусловлено анизотропностью соответствующих дробных потенциалов (т. е. комплексных степеней оператора (1) с отрицательными вещественными частями). Последнее, в свою очередь, связано с наличием комплексных коэффициентов в главной части оператора.

Ранее, в статье [10], был исследован дифференциальный оператор $i\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n(1 - i\lambda_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, представляющий из себя оператор Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \tag{5}$$

возмущенный комплексными коэффициентами в главной части. Далее, в статье [11], был изучен дифференциальный оператор $m^2I + i\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n(1 - i\lambda_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, связанный с операторами Шредингера (5) и Гельмгольца $m^2I + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. В данной работе рассмотрен наиболее общий случай.

2. Вспомогательные сведения

2.1. Обозначения. $\langle f, w \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \overline{f(x, t)} w(x, t) dx dt$; $(W_{\delta}\varphi)(x, t) = (w(\cdot, \delta) * \varphi)(x, t)$ — интеграл Гаусса — Вейерштрасса, где $w(x, t, \delta) = (4\pi\delta)^{-n/2} e^{-(|x|^2 - t^2)/(4\delta)}$ — ядро Гаусса — Вейерштрасса; S — класс Шварца быстро убывающих гладких функций; \mathcal{S}_0 — банахова алгебра преобразований Фурье функций, интегрируемых в \mathbb{R}^n ; $C_0(\mathbb{R}^{n+1}) = \{f : f \in C(\mathbb{R}^{n+1}), f(\infty) = 0\}$ — пространство непрерывных функций, исчезающих на бесконечности.

Лемма [4, лемма 1.31]. Пусть функция $f(x, z)$ аналитична по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ и имеет суммируемую мажоранту: $|f(x, z)| \leq F(x) \in L_1(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда интеграл $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x, z) dx$ аналитичен по z в области D .

2.2. О пространствах Лизоркина Φ, Ψ . Через Ψ обозначим класс функций из S , которые исчезают вместе со всеми своими производными на совокупности координатных гиперплоскостей в \mathbb{R}^{n+1} : $y_1 = 0, \dots, y_{n+1} = 0$.

Пространство Ψ является счетно-нормированным пространством, полным относительно набора попарно-согласованных норм, задаваемых равенствами

$$\|\psi\|_N = \sup_{\substack{|k| \leq N, \\ u \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bigcup_{l=1}^{n+1} \{y_l = 0\}}} (M(u))^N |D^k \psi(u)|, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

где $u = (x, t)$, $M(u) = \max\{\sqrt{1 + |u|^2}, 1/\rho(u)\}$, $\rho(u) = \min_{j=1, \dots, n+1} |y_j|$.

Обозначим через $\Phi = \Phi(\mathbb{R}^{n+1})$ пространство преобразов Фурье функций из Ψ : $\Phi = F^{-1}(\Psi)$. Пространства Ψ и Φ были введены П. И. Лизоркиным (см., например, [13]). Нам понадобится информация о плотности класса Φ в L_p .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно [4, теорема 2.1], что Класс Φ плотен в L_p , $1 < p < \infty$, и в $C_0(\mathbb{R}^{n+1})$. Как показано в [4, глава 2, §4], для любой функции $\omega(x, t) \in S$ существует последовательность функций $\omega_N(x, t) \in \Phi$, аппроксимирующая $\omega(x)$ по норме L_p , $1 < p < \infty$, и по норме C_0 .

3. Основные результаты

3.1. Интегральные представления для комплексных степеней $S_{\bar{\lambda}}^{-\alpha/2} \varphi$, $\varphi \in \Phi$.

Комплексные степени $S_{\bar{\lambda}}^{-\alpha/2} \varphi$, $\varphi \in \Phi$, определим равенством (2). Интегральное представление для указанных степеней дает следующая

Теорема. Пусть $0 < \operatorname{Re} \alpha < n + 2$, $\varphi \in \Phi$. Тогда

$$\left(S_{\bar{\lambda}}^{-\alpha/2} \varphi\right)(x, t) = \left(H_{\bar{\lambda}}^{\alpha} \varphi\right)(x, t), \quad (6)$$

где $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}$ — оператор (3).

◁ Утверждение теоремы будет следовать из равенства

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{\varphi}(\xi, \tau) \exp(-ix\xi - it\tau) d\xi}{\left(m^2 + b\tau + \sum_{k=1}^n (i\lambda_k - 1)\xi_k^2\right)^{\alpha/2}} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h_{\bar{\lambda}}^{\alpha}(y, s) \varphi(x - y, t - s) dy ds, \quad (7)$$

где $h_{\bar{\lambda}}^{\alpha}(y, s)$ — ядро (4). Для доказательства (7) установим вначале формулу

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{\varphi}(\xi, \tau) \exp\left(-\varepsilon \sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2 - ix\xi - it\tau\right) d\xi}{\left(m^2 + b\tau - \sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2 + i\varepsilon\right)^{\alpha/2}} \\ = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h_{\bar{\gamma}, \varepsilon}^{\alpha}(y, s) \varphi(x - y, t - s) dy ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\gamma_k = 1 - i\lambda_k$,

$$h_{\bar{\gamma}, \varepsilon}^{\alpha}(y, s) = \frac{b^{(n-\alpha)/2} \exp(-\frac{\alpha\pi i}{4}) (\varepsilon b + is)^{-n/2} \exp\left\{\left(\frac{m^2 i - \varepsilon}{b}\right) s - \sum_{k=1}^n \frac{by_k^2}{4\gamma_k(b\varepsilon + is)}\right\} (s)_+^{-2+\operatorname{Re}\alpha}}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{k=1}^n \sqrt{\gamma_k}},$$

$\gamma_k > 0$, $k = 1, \dots, n$.

Заметим, что $h_{\bar{\gamma}, \varepsilon}^{\alpha}(y, s) \in L_1$.

С помощью формулы Бохнера (в \mathbb{R}^n) получаем:

$$\begin{aligned} \widehat{h_{\bar{\gamma}, \varepsilon}^{\alpha}}(\xi, \tau) &= \frac{2 \exp(-\frac{\alpha\pi i}{4})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\varepsilon\rho + ib\tau\rho + im^2\rho)}{\rho^{1-\alpha/2} (\varepsilon + i\rho)^{n/2}} d\rho \\ &\times \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2} \right)^{1-n/2} \int_0^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-r^2}{\varepsilon + i\rho}\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(2r \sqrt{\sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2}\right) dr, \end{aligned}$$

где $J_{\frac{n-2}{2}}(z)$ — функция Бесселя порядка $\frac{n-2}{2}$. Применив к внутреннему интегралу в правой части формулу 6.631.4 из [14], имеем

$$\widehat{h_{\gamma,\varepsilon}^{\alpha}}(\xi, \tau) = \frac{\exp(-\alpha\pi i/4)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\varepsilon\rho + i\left(m^2 + b\tau - \sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2\right)\rho\right)}{\rho^{1-\alpha/2} \exp\left(\varepsilon \sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2\right)} d\rho.$$

Используя далее формулу 3.381.4 из [14], будем иметь:

$$\widehat{h_{\gamma,\varepsilon}^{\alpha}}(\xi, \tau) = \exp\left(-\varepsilon \sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2\right) \left(m^2 + b\tau - \sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2 + i\varepsilon\right)^{-\alpha/2}. \quad (9)$$

Умножив обе части (9) на $\widehat{\varphi}(\xi, \tau)$ и применив обратное преобразование Фурье, получаем (8).

Заметим, что обе части (8) аналитичны по γ_1 в области $D_1 = \{\operatorname{Re} \gamma_1 > 0, \operatorname{Im} \gamma_1 < 0\}$. Аналитичность правой части этой формулы обосновывается применением леммы 1 с учетом равномерной (в области D_1) оценки

$$|h_{\gamma,\varepsilon}^{\alpha}(y, s)| \leq C(\varepsilon^2 b^2 + s^2)^{-n/4} e^{-\varepsilon \cdot s/b} (s)^{-1 + \frac{\operatorname{Re} \alpha}{2}}. \quad (10)$$

Аналитичность левой части (8) очевидна.

Анализ доказательства граничной теоремы единственности И. И. Привалова, приведенного в [1, с. 413–415], показывает, что равенство (8) справедливо для $\gamma_1 \in D_1$, $\gamma_2 > 0, \dots, \gamma_n > 0$.

Далее, зафиксируем $\gamma_1 \in D_1$ и распространим по аналитичности формулу (6) для $\gamma_1 \in D_1$ и $\gamma_2 \in D_2 = \{\operatorname{Re} \gamma_2 > 0, \operatorname{Im} \gamma_2 < 0\}$.

Продолжая процесс последовательного аналитического продолжения (по переменным $\gamma_3, \dots, \gamma_n$), убеждаемся в справедливости (8) для $\gamma_k \in D_k = \{\operatorname{Re} \gamma_k > 0, \operatorname{Im} \gamma_k < 0\}$, $k = 1, \dots, n$.

Полагая в (8) $\gamma_k = 1 - i\lambda_k$, $k = 1, \dots, n$, $\lambda_k > 0$, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}_+^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{\varphi}(\xi, \tau) \cdot \exp^{\sum_{k=1}^n \varepsilon(i\lambda_k - 1)\xi_k^2 - ix\xi - it\tau}}{\left(m^2 + b\tau + \sum_{k=1}^n (i\lambda_k - 1)\xi_k^2 + i\varepsilon\right)^{\alpha/2}} d\xi \\ & = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h_{\lambda,\varepsilon}^{\alpha}(y, s) \varphi(x - y, t - s) dy ds, \quad \varphi \in \Phi, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$h_{\lambda,\varepsilon}^{\alpha}(y, s) = d_{n,\alpha}(\bar{\lambda})(\varepsilon b + is)^{-n/2} (s)_+^{\frac{-2 + \operatorname{Re} \alpha}{2}} \exp\left\{\frac{(m^2 i - \varepsilon)s}{b} - \sum_{k=1}^n \frac{b(ib\varepsilon + s)(\lambda_k - i)y_k^2}{4(1 + \lambda_k^2)(\varepsilon^2 b^2 + s^2)}\right\}.$$

Переходя в (11) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем (7). Предельный переход в правой части (11) обосновывается мажорантной теоремой Лебега, применимой с учетом оценки

$$\int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x - y, t - s)|}{|s|^{\frac{n+2 - \operatorname{Re} \alpha}{2}}} dy ds < \infty, \quad \operatorname{Re} \alpha < n + 2.$$

Возможность предельного перехода под знаком интеграла в левой части (11) очевидна. Применяя к обеим частям (7) преобразование Фурье, получаем (6). \triangleright

3.2. Действие оператора H_{λ}^{α} в L_p -пространствах. Действие оператора H_{λ}^{α} из $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ в $L_q(\mathbb{R}^{n+1})$ описывается следующей теоремой.

Теорема 2. Оператор H_{λ}^{α} ограничен из L_p в L_q , $0 < \operatorname{Re} \alpha < n + 2$, $1 \leq p < \frac{n+2}{\operatorname{Re} \alpha}$, $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p \operatorname{Re} \alpha}$.

Утверждение теоремы 2 легко выводится из [15, теоремы 28.2, с. 412], содержащей $(L_p - L_q)$ -оценки для параболических потенциалов Джонса — Сэмпсона в \mathbb{R}^{n+1} .

3.3. Обращение потенциалов $f = H_{\lambda}^{\alpha} \varphi$ с L_p -плотностями. В рамках метода аппроксимативных обратных операторов, левый обратный к $S_{\lambda}^{-\alpha/2}$ оператор будем строить в виде:

$$(T_{\lambda}^{\alpha} f)(x, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0}^{(L_p(\mathbb{R}^{n+1}))} (T_{\delta, \lambda}^{\alpha} f)(x, t), \quad (12)$$

где

$$(T_{\delta, \lambda}^{\alpha} f)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} r_{\delta, \lambda}^{\alpha}(y, s) f(x - y, t - s) dy ds, \quad (13)$$

$$r_{\delta, \lambda}^{\alpha}(y, s) = F^{-1} \left[\left(m^2 + b\tau - |\xi|^2 + i \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2 \right)^{\alpha/2} \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + i\delta} \right)^d e^{-\delta|\xi|^2} \right] (y, s),$$

$\delta > 0$, $d > n + 1 - \frac{\operatorname{Re} \alpha}{2}$.

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $0 < \operatorname{Re} \alpha < n + 2$, $1 \leq p < \frac{n+2}{\operatorname{Re} \alpha}$, $\varphi \in L_p$. Тогда

$$(T_{\lambda}^{\alpha} H_{\lambda}^{\alpha} \varphi)(x, t) = \varphi(x, t). \quad (14)$$

Предел по норме L_p в (12) можно заменить пределом почти всюду.

\triangleleft Заметим, что функция

$$\left(m^2 + b\tau - |\xi|^2 + i \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2 \right)^{\alpha/2} \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + i\delta} \right)^d \exp(-\delta|\xi|^2)$$

принадлежит \mathcal{R}_0 согласно теореме 3.5 из [4]. Следовательно, $r_{\delta, \lambda}^{\alpha}(y, s) \in L_1$. Доказательство равенства (14) основано на представлении

$$(T_{\delta, \lambda}^{\alpha} H_{\lambda}^{\alpha} \varphi)(x, t) = (W_{\delta} M_{\delta} \varphi)(x, t) + (W_{\delta} \varphi)(x, t). \quad (15)$$

Здесь $0 < \operatorname{Re} \alpha < n + 2$, $\varphi \in L_p$, $1 \leq p < \frac{n+2}{\operatorname{Re} \alpha}$. Оператор M_{δ} имеет вид

$$(M_{\delta} \varphi)(x, t) = \sum_{j=1}^d C_d^j (-\delta)^j (A_{\delta}^j \varphi)(x, t),$$

где

$$(A_{\delta}^j \varphi)(x, t) = \underbrace{\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty}}_j e^{-\delta(y_1 + \dots + y_j)} \varphi(x_1 - y_1 - \dots - y_j, x_2, \dots, x_n, t) dy_1 \dots dy_j.$$

Равенство (15) проверяется переходом к образам Фурье для $\varphi \in \Phi$, с учетом формулы

$$\widehat{(M_\delta \varphi)}(\xi, \tau) = \left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + i\delta} \right)^d - 1 \right) \widehat{\varphi}(\xi, \tau), \quad \varphi \in \Phi. \quad (16)$$

Это равенство распространяется по ограниченности на все L_p , $1 < p < \frac{n+2}{\operatorname{Re} \alpha}$, с учетом того, что операторы в обеих частях (15) ограничены из L_p в L_q , $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p \operatorname{Re} \alpha}$.

Ограниченность оператора в правой части (15) из L_p в L_q вытекает из теоремы Юнга о свертках, с учетом очевидной оценки $\|M_\delta \varphi\|_p \leq C \|\varphi\|_p$ и ограниченности оператора W_δ из L_p в L_q для $1 \leq p \leq q < \infty$.

Оператор $T_{\delta, \bar{\lambda}}^\alpha H_{\bar{\lambda}}^\alpha$ ограничен из L_p в L_q по теореме 2, в силу того, что $T_{\delta, \bar{\lambda}}^\alpha$ — оператор свертки с интегрируемым ядром.

В случае, когда $\varphi \in L_1$, равенство (15) доказывается вначале в смысле Φ' :

$$\langle T_{\delta, \bar{\lambda}}^\alpha H_{\bar{\lambda}}^\alpha \varphi, \omega \rangle = \langle W_\delta M_\delta \varphi + W_\delta \varphi, \omega \rangle, \quad \omega \in \Phi. \quad (17)$$

Пусть далее $\omega_N(x, t)$ — последовательность функций из Φ , аппроксимирующая $\omega(x, t) \in S$ по норме L_q , $q = \frac{n+2}{n - \operatorname{Re} \alpha + 2}$ и по норме C_0 (см. замечание 1). В силу (17) имеем

$$\langle T_{\delta, \bar{\lambda}}^\alpha H_{\bar{\lambda}}^\alpha \varphi, \omega_N \rangle = \langle W_\delta M_\delta \varphi + W_\delta \varphi, \omega_N \rangle. \quad (18)$$

Переходя в (18) к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем (15) для $\varphi \in L_1$.

В [2] показано, что если $g(x, t) \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, то

$$(W_\delta M_\delta g)(x, t) \rightarrow 0 \quad (19)$$

по норме L_p или почти всюду.

Переходя в (15) к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в указанном смысле, получаем (14). \triangleright

3.4. Описание образа $H_{\bar{\lambda}}^\alpha(L_p)$. Через $H_{\bar{\lambda}}^\alpha(L_p)$ обозначим образ оператора $H_{\bar{\lambda}}^\alpha$:

$$H_{\bar{\lambda}}^\alpha(L_p) = \{f(u) : f(u) = (H_{\bar{\lambda}}^\alpha \varphi)(u), \varphi \in L_p\}.$$

Основной результат статьи составляет следующая

Теорема 4. Пусть $0 < \operatorname{Re} \alpha < n + 2$, $1 \leq p < \frac{n+2}{\operatorname{Re} \alpha}$, $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p \operatorname{Re} \alpha}$. Тогда

$$H_{\bar{\lambda}}^\alpha(L_p) = \{f \in L_q : T_{\bar{\lambda}}^\alpha f \in L_p\}.$$

\triangleleft Вложение

$$H_{\bar{\lambda}}^\alpha(L_p) \subset \{f(u) \in L_q : T_{\bar{\lambda}}^\alpha f \in L_p\} \quad (20)$$

вытекает из теорем 2 и 3.

Докажем вложение

$$H_{\bar{\lambda}}^\alpha(L_p) \supset \{f(u) \in L_q : T_{\bar{\lambda}}^\alpha f \in L_p\},$$

обратное к (20).

Пусть $f \in L_q$. Обозначим $\varphi = T_{\bar{\lambda}}^\alpha f$. Справедливо равенство

$$\langle H_{\bar{\lambda}}^\alpha \varphi, \omega \rangle = \langle \varphi, \overline{H_{\bar{\lambda}}^\alpha \omega} \rangle, \quad \omega \in \Phi,$$

которое обосновывается применением теоремы Фубини с учетом $(L_p - L_q)$ -оценок оператора H_λ^α , приведенных в теореме 3. Здесь $\overline{H_\lambda^\alpha}$ — оператор с символом

$$\left(m^2 + b\tau + \sum_{k=1}^n (i\lambda_k - 1)\xi_k^2\right)^{\alpha/2}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \langle H_\lambda^\alpha \varphi, \omega \rangle &= \langle \varphi, \overline{H_\lambda^\alpha} \omega \rangle = \left\langle \lim_{\delta \rightarrow 0} T_{\delta, \bar{\lambda}}^\alpha f, \overline{H_\lambda^\alpha} \omega \right\rangle \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle T_{\delta, \bar{\lambda}}^\alpha f, \overline{H_\lambda^\alpha} \omega \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle f, \overline{T_{\delta, \bar{\lambda}}^\alpha} \overline{H_\lambda^\alpha} \omega \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Последнее из равенств (21) вытекает из того, что сходимость в L_p влечет сходимость в Φ' .

С учетом (21) и (15), будем иметь:

$$\langle H_\lambda^\alpha \varphi, \omega \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle f, \overline{(W_\delta M_\delta + W_\delta)} \omega \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle (W_\delta M_\delta + W_\delta) f, \omega \rangle = \langle f, \omega \rangle. \quad (22)$$

Второе из равенств (22) обосновывается применением неравенства Гёльдера при $p > 1$ и мажорантной теоремы Лебега при $p = 1$.

Используя рассуждения, аналогичные применявшимся при переходе от (15) к (17), получаем:

$$\langle f, \omega \rangle = \langle H_\lambda^\alpha \varphi, \omega \rangle, \quad \omega \in S,$$

откуда вытекает, что $f(x, t) = (H_\lambda^\alpha \varphi)(x, t)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$. Следовательно, $f(x, t) \in H_\lambda^\alpha(L_p)$. \triangleright

Литература

1. Samko S. G. Hypersingular integrals and their applications // Internat. Ser. Analytical Methods and Special Functions.—Vol. 5.—London—N. Y.: Taylor & Frances, 2002.—376 p.
2. Nogin V. A., Samko S. G. Method of approximating inverse operators and its applications to the inversion of potential-type integral transforms // Integral Transforms and Special Functions.—1999.—Vol. 6, № 2.—P. 89–104.
3. Ногин В. А., Сухинин Е. В. Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p -плотностями // Докл. АН.—1993.—Т. 329, № 5.—С. 550.
4. Abramyau A. V., Nogin V. A. Integral transforms, connected with fractional powers of nonhomogeneous differential operators in L_p -spaces // Integral Transforms and Special Functions.—1994.—Vol. 2, № 1.—P. 1.
5. Ногин В. А., Сухинин Е. В. Дробные степени оператора Клейна —Гордона // Докл. АН.—1995.—Т. 341, № 2.—С. 166.
6. Abramyau A. V., Nogin V. A. Fractional powers of differential operators of the second order with constant coefficients in L_p -spaces // Докл. АН.—1995.—Vol. 341, № 3.—P. 295.
7. Karapetyants A. N., Nogin V. A. Complex powers of the second order non-homogeneous elliptic differential operators with degenerating symbols in the spaces $L_p(\mathbb{R}^n)$ // Bol. Soc. Mat. Mexicana.—2001.—Vol. 7.—P. 193–209.
8. Karasev D. N., Nogin V. A. On the boundedness of some potential-type operators with oscillating kernels // Mathematische Nachrichten.—2005.—Vol. 278, № 5.—P. 554–574.
9. Гиль А. В., Ногин В. А. Обращение и описание образов потенциалов с особенностями ядер на сфере // Владикавказ. матем. журн.—2012.—Т. 14, № 4.—С. 10–18.
10. Гиль А. В., Ногин В. А. Описание функциональных пространств, связанных с обобщенными операторами Шредингера // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки.—2014.—№ 1.—С. 10–13.

11. Гиль А. В., Ногин В. А. Комплексные степени одного дифференциального оператора в L_p -пространствах // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки.—2014.—№ 5.—С. 5–10.
12. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1966.—630 с.
13. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН.—1969.—Т. 105.—Р. 89–167.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Физматгиз, 1971.—1108 с.
15. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.

Статья поступила 16 мая 2016 г.

Гиль Алексей Викторович
Южный федеральный университет,
ассистент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: gil-alexey@yandex.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: vnogin@ns.math.rsu.ru

COMPLEX POWERS OF A DIFFERENTIAL OPERATOR RELATED TO THE SCHRÖDINGER OPERATOR

Gil A. V., Nogin V. A.

We study complex powers of the generalized Schrödinger operator in $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ with complex coefficients in the principal part

$$S_{\bar{\lambda}} = m^2 I + ib \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \sum_{k=1}^n (1 - i\lambda_k) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (1)$$

where $m > 0$, $b > 0$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Complex powers of the operator $S_{\bar{\lambda}}$ with negative real parts on «sufficiently nice» functions $\varphi(x)$ are defined as multiplier operators, whose action in the Fourier pre-images is reduced to multiplication by the corresponding power of the symbol of the operator under consideration:

$$F\left((S_{\bar{\lambda}}^{-\alpha/2} \varphi)\right)(\xi) = \left((m^2 + b\xi_{n+1} - |\xi'|^2 + i \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2) \right)^{-\alpha/2} \widehat{\varphi}(\xi), \quad (2)$$

where $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $0 < \operatorname{Re} \alpha < n + 2$. We obtain integral representations for complex powers (2) as potential-type operators with non-standard metric. The corresponding fractional potentials have the form $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha} \varphi$. Complex powers $S_{\bar{\lambda}}^{-\alpha/2} \varphi$, $0 < \operatorname{Re} \alpha < n + 2$, are interpreted as distributions:

$$\langle S_{\bar{\lambda}}^{-\alpha/2} \varphi, \omega \rangle = \langle \varphi, \overline{S_{\bar{\lambda}}^{-\alpha/2} \omega} \rangle, \quad \varphi \in \Phi,$$

where Φ is the Lizorkin space of functions in S , whose Fourier transforms vanish on coordinate hyperplanes. Within the framework of the method of approximative inverse operators we describe the range $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}(L_p)$, $1 \leq p < \frac{n+2}{\operatorname{Re} \alpha}$. Recently a number of papers related to complex powers of second order degenerating differential operator was published (see survey papers [1–3], and also [6–11]). The case considered in our work is the most difficult, because of non-standard expressions for the potentials $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha} \varphi$.

Key words: differential operator, range, multiplier, complex powers, method of approximative inverse operators.

УДК 519.46

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЕТИ

Н. А. Джусоева, Р. Ю. Дряева

Доказано, что циклические элементарные сети нечетного порядка являются дополняемыми, т. е. их можно дополнить диагональю до (полной) сети. В частности такие сети являются замкнутыми. Показано, что для произвольного четного порядка существуют элементарные циклические сети, которые не являются дополняемыми.

Ключевые слова: промежуточная подгруппа, нерасщепимый максимальный тор, сеть, циклическая сеть, сетевая группа, элементарная сетевая группа, трансекция.

Изучение надгрупп нерасщепимого максимального тора, связанного с радикальным расширением $K = k(\sqrt[n]{d})$ степени n поля k , тесно связано с циклическими элементарными сетями порядка n , ассоциированными с промежуточными подгруппами [1]. Исследованию таких сетей посвящена данная заметка. Доказано, что циклические элементарные сети нечетного порядка n можно дополнить до (полной) сети, в частности, они являются замкнутыми.

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью* [2] над кольцом R порядка n , если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j . Для сети принята также терминология «ковер» [3]. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер* [4], [5, вопрос 15.46]). Таким образом, элементарная сеть — это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i \neq j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца R таких, что $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел i, r, j . Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i \neq j \leq n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети.

Известно (см., например, [2]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \quad (1)$$

для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik},$$

где суммирование ведется по всем k отличным от i .

© 2017 Джусоева Н. А., Дряева Р. Ю.

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России и темы НИР ЮМИ ВНЦ РАН (рег. номер НИОКР 115033020013).

Элементарная сеть σ называется *замкнутой* (или *допустимой* [5, вопрос 15.46]), если элементарная группа

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\alpha) : \alpha \in \sigma_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq n \rangle$$

$(t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}, \alpha \in R)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Другими словами, замкнутость сети σ означает, что элементарная сеть $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$, индуцированная трансвекциями из элементарной группы $E(\sigma)$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \{\alpha \in R : t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)\}$$

совпадает с σ . Из построения сетевой группы [2] следует, что дополняемые элементарные сети являются замкнутыми. С другой стороны, в [6] приводится пример замкнутой, но не дополняемой сети.

Пусть R — унитарное кольцо $d \in R$. Пусть, далее, A_2, \dots, A_n — подгруппы аддитивной группы кольца R . Через $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_2, \dots, A_n)$ мы обозначаем таблицу (без диагонали), определенную следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j > i. \end{cases} \quad (2)$$

Если так определенная таблица является элементарной сетью, то $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_2, \dots, A_n)$ мы называем *циклической элементарной сетью*, ассоциированной с циклическим тором T [1], или просто *циклической элементарной сетью*. Вопросы, связанные с сетями, в частности с циклическими сетями, рассматривались также в [7]–[10].

Теорема. Для нечетного n , $n \geq 3$, циклическая элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_2, \dots, A_n)$ порядка n является дополняемой.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. Пусть n нечетно, $n \geq 3$ и $\sigma = (\sigma_{ij})$ — циклическая элементарная сеть. Тогда

$$\sigma_{k1}^2 \sigma_{1k} \subseteq \sigma_{k1}, \quad \sigma_{1k}^2 \sigma_{k1} \subseteq \sigma_{1k}, \quad 2 \leq k \leq n. \quad (3)$$

◁ а) Покажем первое включение леммы. Пусть в начале $3 \leq k \leq n-1$. Согласно (2) $\sigma_{k1} = \sigma_{k+1,2} = A_k$. Далее, заметим, что $k+1 \neq n-k+3$, так как n нечетно, в частности $k \neq \frac{n+2}{2}$. Заметим также, что $n-k+3 \leq n$, так как $k \geq 3$. Далее, согласно (2) $\sigma_{k1}^2 \sigma_{1k} = A_k^2 dA_{n-k+2}$. С другой стороны, согласно (2) $\sigma_{2,n-k+3} = dA_k$, $\sigma_{n-k+3,2} = A_{n-k+2}$. Поэтому

$$\sigma_{k1}^2 \sigma_{1k} = A_k^2 dA_{n-k+2} = \sigma_{k+1,2} \sigma_{2,n-k+3} \sigma_{n-k+3,2} \subseteq \sigma_{k+1,2} = \sigma_{k1}.$$

Пусть теперь $k=2$ ($n \geq 3$). Тогда (см. (2))

$$\sigma_{21}^2 \sigma_{12} = A_2^2 dA_n = \sigma_{32} \sigma_{21} \sigma_{12} \subseteq \sigma_{31} \sigma_{12} \subseteq \sigma_{32} = \sigma_{21}.$$

Наконец, пусть $k=n$ ($n \geq 3$). Тогда (см. (2))

$$\sigma_{n1}^2 \sigma_{1n} = A_n^2 dA_2 = \sigma_{n1} \sigma_{12} \sigma_{21} \subseteq \sigma_{n2} \sigma_{21} \subseteq \sigma_{n1}.$$

б) Покажем теперь второе включение леммы. Имеем (см. (1))

$$\sigma_{k1} = A_k, \quad \sigma_{1k} = dA_{n-k+2}, \quad \sigma_{n+2-k,1} = A_{n+2-k},$$

при этом отметим, что $k \neq n - k + 2$ (так как n нечетно). Поэтому

$$\begin{aligned}\sigma_{k1}\sigma_{1k}^2 &= A_k d^2 A_{n+2-k}^2 = dA_k \sigma_{n+2-k,1} \sigma_{1k} \subseteq dA_k \sigma_{n+2-k,k} \\ &= d\sigma_{n+2-k,k} \sigma_{k1} \subseteq d\sigma_{n+2-k,1} = dA_{n+2-k} = \sigma_{1k}. \triangleright\end{aligned}$$

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Для доказательства теоремы согласно (1) нам нужно показать включения

$$\sigma_{ij}^2 \sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ji}^2 \sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ji}. \quad (4)$$

Не умаляя общности предположим, что $i > j$. Согласно (2)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i-j+1,1} = A_{i-j+1}, \quad \sigma_{ji} = \sigma_{1,i-j+1} = dA_{n+1+j-i}.$$

Положим $k = i - j + 1$. Тогда $\sigma_{ij} = \sigma_{k1}$, $\sigma_{ji} = \sigma_{1k}$. Заметим при этом, что $2 \leq k \leq n$. Следовательно, для доказательства включений (4) достаточно применить лемму, т. е. включения (3). ▷

Отметим, что условие нечетности n , требуемое в теореме, существенно. Приведем пример элементарной циклической сети четного порядка, которая не дополняема.

Пусть F – произвольное поле, $F(x)$ – поле рациональных функций $\frac{f}{g}$, $f, g \in F[x]$, в котором мы рассматриваем две подгруппы

$$A = \left\{ \frac{f}{g} \in F(x) : \deg g - \deg f \geq 4 \right\}, \quad B = \frac{F}{x} + A.$$

Пусть $n = 2m$ – четно ($m \geq 1$), $d = 1$. Положим $A_i = A$, $2 \leq i \leq n$, $i \neq m+1$, $A_{m+1} = B$ и рассмотрим таблицу $\sigma = \sigma(A_2, \dots, A_n)$. В силу очевидных включений $A^2 \subseteq B$, $AB \subseteq A$ система $\sigma = \sigma(A_2, \dots, A_n)$ является сетью. Заметим, что $\sigma_{1,m+1} = \sigma_{m+1,1} = B$, но B^3 не содержится в B , поэтому $\sigma_{1,m+1} \sigma_{m+1,1} \sigma_{1,m+1}$ не содержится в $\sigma_{1,m+1}$, следовательно (см. (1)), представленная сеть σ не является дополняемой.

Следствие. Циклическая элементарная сеть нечетного порядка является замкнутой.

Литература

1. Койбаев В. А., Шилов А. В. О подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—2010.—Т. 375.—С. 130–139.
2. Борович З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп.—М.: Наука, 1982.—288 с.
4. Левчук В. М. Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 17-е.—Новосибирск, 2010.
6. Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Труды Института математики и механики УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 4.—С. 134–141.
7. Койбаев В. А. Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, № 5.—С. 70–86.
8. Койбаев В. А. Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 4.—С. 39–43.
9. Койбаев В. А., Нужин Я. Н. Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. матем.—2013.—Т. 18, вып. 1.—С. 75–84.
10. Дряева Р. Ю., Койбаев В. А. Разложение элементарной трансвекции в элементарной группе // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—2015.—Т. 435.—С. 33–40.

Статья поступила 14 марта 2016 г.

ДЖУСОЕВА НОННА АНАТОЛЬЕВНА
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: djusoevanonna@rambler.ru

ДРЯЕВА РОКСАНА ЮРЬЕВНА
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
аспирант кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Ватутина, 46
E-mail: dryaeva-roksana@mail.ru

CYCLICAL ELEMENTARY NETS

Dzhusoeva N. A., Dryaeva R. Y.

Let R be a commutative ring with the unit and $n \in \mathbb{N}$. A set $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, of additive subgroups of the ring R is a *net* over R of order n , if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all $1 \leq i, r, j \leq n$. A net which doesn't contain the diagonal is called an *elementary net*. An elementary net $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, is *complemented*, if for some additive subgroups σ_{ii} of R the set $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ is a full net. An elementary net σ is called *closed*, if the elementary group $E(\sigma) = \langle t_{ij}(\alpha) : \alpha \in \sigma_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq n \rangle$ doesn't contain elementary transvections. It is proved that the cyclic elementary odd-order nets are complemented. In particular, all such nets are closed. It is also shown that for every odd $n \in \mathbb{N}$ there exists an elementary cyclic net which is not complemented.

Key words: intermediate subgroup, non-split maximal torus, net, cyclic net, net group, elementary group, transvection.

УДК 517.518.13+517.983.23

О КОМБИНАЦИЯХ ДИФФЕОМОРФНЫХ СДВИГОВ ОКРУЖНОСТИ
И НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. Б. Климентов

В работе изучаются суперпозиции диффеоморфизмов единичной окружности и сингулярных интегральных операторов на этой окружности. Установлено свойство таких суперпозиций, аналогичное свойству бесселевых потенциалов. Приводится пример, показывающий, что полученный результат, вообще говоря, не улучшаем.

Ключевые слова: сдвиг контура, сингулярный интегральный оператор.

1. Введение. Формулировка результатов

Обозначим через $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z -плоскости E , $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D ; $\bar{D} = D \cup \Gamma$.

В работе используется банахово пространство $C^{k,\alpha}(\Gamma)$ комплекснозначных функций, имеющих на Γ k производных, где $k \geq 1$ — целое число, причем k -е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α , $0 \leq \alpha \leq 1$. В этом пространстве предполагается заданной стандартная норма (см., например, [1, с. 25]). Как обычно, предполагаем, что $C^{k,0}(\Gamma) = C^k(\Gamma)$, $C^{0,\alpha}(\Gamma) = C^\alpha(\Gamma)$ при $\alpha < 1$.

Пусть $\zeta(t)$ — диффеоморфизм класса $C^{k,\alpha}(\Gamma)$, $k \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, контура Γ на себя, причем $\zeta'_t(t) \neq 0$, где $\zeta'_t = \zeta'_s \cdot s'_t = \zeta'_s \cdot \bar{t}'_s$, $t(s) = e^{is}$.

Следуя [2, с. 33], для функции $\varphi(t)$, определенной на Γ , введем оператор сдвига $\mathscr{W}\varphi(t) = \varphi(\zeta(t))$. Очевидно, \mathscr{W} — линейный, ограниченный, непрерывно обратимый в $C^{k,\alpha}(\Gamma)$, $k \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, оператор, причем $\|\mathscr{W}\|_{C(\Gamma)} = 1$ (см. [2, с. 33]).

Обозначим через

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

одномерный сингулярный (интегральный) оператор.

При изучении дифференциальных свойств «вплоть до края» решений краевых задач со сдвигом для различных эллиптических систем возникает потребность в исследовании свойств суперпозиции $\mathscr{W}S\mathscr{W}^{-1} - S$.

Основным результатом этой работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Если $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leq 1$, $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$, $0 < \beta \leq 1$, $\mu = \alpha + \beta \leq 2$, то при $\mu < 1$ $\Psi\varphi(t) = (\mathscr{W}S\mathscr{W}^{-1} - S)\varphi(t) \in C^\mu(\Gamma)$, причем

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^\mu(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}, \quad (2)$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$.

Если $\mu = 1$, то $\Psi\varphi(t) \in C^{\mu-\varepsilon}(\Gamma)$ для любого ε , $0 < \varepsilon < \mu$, с выполнением оценки, аналогичной (2).

Если $\mu > 1$, то $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\mu-1}(\Gamma)$, причем

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^{1,\mu-1}(\Gamma)} \leq \text{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}, \quad (3)$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$.

Очевидно

Следствие 1. Если $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leq 1$, $\varphi(t) \in C^{1,\beta}(\Gamma)$, $0 < \beta \leq 1$, то $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, причем

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leq \text{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,1}(\Gamma)} \leq \text{const}\|\varphi(t)\|_{C^{1,\beta}(\Gamma)}, \quad (4)$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показывают примеры (см. замечание 2 после доказательства теоремы 1), при $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ показатель α в левой части (4) не улучшаем в том смысле, что существуют функции $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ такие, что $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, но $\Psi\varphi(t) \notin C^{1,\gamma}(\Gamma)$ при любом γ , $1 \geq \gamma > \alpha$.

2. Вспомогательные построения

Положим $t = e^{is}$, $\tau = e^{i\sigma}$, $\omega = r\sigma + (1-r)s$, $0 \leq r \leq 1$, $u = e^{i\omega}$.

Лемма 1. Если $\zeta(t) \in C^{n+1,\alpha}(\Gamma)$, $n \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, то имеют место следующие разновидности формулы Тэйлора:

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) - \zeta(t) &= \zeta'(t)(\tau - t) + \zeta''(t)\frac{(\tau - t)^2}{2!} + \dots \\ &+ \zeta^{(n)}(t)\frac{(\tau - t)^n}{n!} + \frac{(\tau - t)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \Omega(r, s, \sigma, \omega) \zeta^{(n+1)}(e^{i\omega})(1-r)^n dr, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Omega(r, s, \sigma, \omega) = i \cdot \left[\frac{\tau - t}{\sigma - s} \right]^{-n-1} \cdot e^{i(n+1)\omega} \cdot \left[\frac{e^{i(\sigma-s)(1-r)} - 1}{(\sigma - s)(1-r)} \right]^n; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) - \zeta(t) &= \zeta'(t)(\tau - t) + \zeta''(t)\frac{(\tau - t)^2}{2!} + \dots \\ &+ \zeta^{(n)}(t)\frac{(\tau - t)^n}{n!} + \zeta^{(n+1)}(t)\frac{(\tau - t)^{n+1}}{(n+1)!} + \Omega_1(\tau, t), \end{aligned} \quad (7)$$

где остаточный член имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_1(\tau, t) &= \frac{(\tau - t)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \left[\Omega(r, s, \sigma, \omega) \zeta^{(n+1)}(e^{i\omega}) - \zeta^{(n+1)}(t) \right] (1-r)^n dr \\ &= O(|\tau - t|^{n+1+\alpha}). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь запись $f(x) = O(\varphi(x))$ означает выполнение неравенства

$$|f(x)| \leq \text{const}|\varphi(x)|,$$

где const от f и φ не зависит.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для функции $f(t) \in C^1(\Gamma)$ очевидно соотношение:

$$f(\tau) - f(t) = \int_t^\tau f'(u) du. \quad (9)$$

Подставив в (9)

$$f(u) = \zeta(u) + (\tau - u)\zeta'(u) + \frac{(\tau - u)^2}{2}\zeta''(u) + \frac{(\tau - u)^3}{3!}\zeta'''(u) + \dots + \frac{(\tau - u)^n}{n!}\zeta^{(n)}(u),$$

в получившемся интеграле перейдем к переменной интегрирования r , после чего получим (5).

Легко проверяется соотношение

$$\Omega(r, s, \sigma, \omega) = 1 + O(|\tau - t|). \quad (10)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} i \cdot \left[\frac{\tau - t}{\sigma - s} \right]^{-n-1} &= e^{-i(n+1)s} \left[\frac{e^{i(\sigma-s)} - 1}{\sigma - s} \right]^{-(n+1)} \\ &= e^{-i(n+1)s} \cdot i^{-n} \cdot [1 + O(\sigma - s)], \\ \left[\frac{e^{i(\sigma-s)(1-r)} - 1}{(\sigma - s)(1 - r)} \right]^n &= i^n \cdot [1 + O(\sigma - s)], \end{aligned}$$

и

$$e^{-i(n+1)s} \cdot e^{i(n+1)\omega} = e^{ir(\sigma-s)(n+1)} = 1 + O(\sigma - s).$$

Поскольку

$$0 < \text{const} \leq \frac{|t_2 - t_1|}{|s_2 - s_1|} \leq 1 \quad (11)$$

для любых $t_1, t_2 \in \Gamma$ (s_1, s_2 — дуговые абсциссы этих точек), в этих формулах можно заменить $O(\sigma - s)$ на $O(|\tau - t|)$. Прделав такую замену, из (6) получим (10).

Далее, формально записав равенство (7) и вычтя из него (5), с использованием (10) получим (8). Последнее равенство в (8) следует из (10) и $\zeta^{(n+1)}(z) \in C^\alpha(\Gamma)$. ▷

3. Доказательство основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Запишем рассматриваемый оператор следующим образом:

$$\Psi\varphi(t) = (\mathcal{W}S\mathcal{W}^{-1} - S)\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma k(\tau, t)\varphi(\tau) d\tau, \quad (12)$$

где

$$k(\tau, t) = \frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t}. \quad (13)$$

Поскольку (см. [3, с. 30–31])

$$\int_\Gamma \frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)} d\tau = \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \pi i, \quad z = \zeta(t) \in \Gamma,$$

то при $\varphi(\tau) = \text{const}$ ($\mathcal{W}S\mathcal{W}^{-1} - S$) $\varphi(t) \equiv 0$, т. е.

$$\int_{\Gamma} k(\tau, t) d\tau \equiv 0 \quad (14)$$

и

$$\Psi\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} k(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t_*)) d\tau, \quad (15)$$

при всяком зафиксированном $t_* \in \Gamma$.

Отметим, что (13) можно переписать в виде

$$k(\tau, t) = \frac{\int_{\tau}^t [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)] du}{[\zeta(\tau) - \zeta(t)](\tau - t)}. \quad (16)$$

Зафиксируем на Γ точку t и отложим в ту и другую сторону от t дуги $t't$ и tt'' , равные по длине $2\sigma < \pi$. Обозначим через $l = t't''$ объединение этих дуг. Обозначим также через λ, s, ν дуговые абсциссы соответственно точек τ, t, w ; $w - t = h$, $|\nu - s| = \sigma$.

Положим в (15) $t_* = t$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} & \Psi\varphi(t+h) - \Psi\varphi(t) \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} k(\tau, t+h)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h)) d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} k(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как $\zeta = \zeta(t)$ — диффеоморфизм, $|\zeta'(t)| \geq \text{const} > 0$, то из (16) и $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ получим

$$|k(\tau, t)| \leq \text{const} \cdot \frac{|\tau - t|}{|\zeta(\tau) - \zeta(t)|} \cdot \frac{1}{|\tau - t|^{1-\alpha}} \leq \text{const} \cdot \frac{1}{|\tau - t|^{1-\alpha}}, \quad (18)$$

где последняя константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$.

Аналогично

$$|k(\tau, t+h)| \leq \text{const} \cdot \frac{1}{|\tau - t - h|^{1-\alpha}}. \quad (19)$$

Запишем разность (17) как $I_0 + I$, где

$$I_0 = \frac{1}{\pi i} \int_l k(\tau, t+h)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h)) d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_l k(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau,$$

$$I = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus l} k(\tau, t+h)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h)) d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus l} k(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau.$$

Воспользовавшись (6), из $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$ и (18), (19) выводим

$$|I_0| \leq \text{const} \left\{ \int_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} |\lambda - s - \sigma|^{\mu-1} d\lambda + \int_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} |\lambda - s|^{\mu-1} d\lambda \right\} \leq \text{const}|h|^{\mu}, \quad (20)$$

где $\mu = \alpha + \beta$, а константа зависит от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Перейдем к оценке выражения I , которое запишем в виде

$$I = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus l} k(\tau, t) (\varphi(t) - \varphi(t+h)) d\tau, \quad (21)$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus l} [k(\tau, t+h) - k(\tau, t)] (\varphi(\tau) - \varphi(t+h)) d\tau. \quad (22)$$

В силу (14)

$$I_1 = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{\pi i} \int_l k(\tau, t) d\tau,$$

и из (18) и $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$ будем иметь

$$|I_1| \leq \text{const} |h|^\beta \int_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{1-\alpha}} \leq \text{const} |h|^{\alpha+\beta}, \quad (23)$$

где константа зависит от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Перейдем к оценке выражения I_2 . Для этого преобразуем разность $k(\tau, t+h) - k(\tau, t)$. Ясно, что это будет некоторая дробь $\frac{P(\tau, t, h)}{Q(\tau, t, h)}$, где

$$Q(\tau, t, h) = [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)] \cdot [\zeta(\tau) - \zeta(t)] \cdot (\tau - t) \cdot (\tau - t - h). \quad (24)$$

Учитывая (16), для $P(\tau, t, h)$ будем иметь

$$\begin{aligned} P(\tau, t, h) &= \left\{ \int_{\tau}^t [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)] du + \int_t^{t+h} [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)] du \right\} \left\{ - \int_{\tau}^t \zeta'(u) du \right\} (\tau - t) \\ &\quad - \int_{\tau}^t [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)] du \left\{ - \int_{\tau}^t \zeta'(u) du - \int_t^{t+h} \zeta'(u) du \right\} (\tau - t) \\ &\quad - h \int_{\tau}^t [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)] du \int_{\tau}^{t+h} \zeta'(u) du \\ &= \zeta'(\tau) \int_t^{t+h} \zeta'(u) du (\tau - t) (\tau - t - h) - h \int_{\tau}^t \zeta'(u) du \int_{\tau}^{t+h} \zeta'(u) du. \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leq 1$, имеют место следующие соотношения (см. лемму 1):

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} \zeta'(u) du &= \zeta(t+h) - \zeta(t) = \zeta'(t)h + O(|h|^{1+\alpha}), \\ \int_{\tau}^t \zeta'(u) du &= \zeta(t) - \zeta(\tau) = -\zeta'(t)(\tau - t) + O(|\tau - t|^{1+\alpha}), \end{aligned}$$

$$\int_{\tau}^{\tau+h} \zeta'(u) du = -\zeta'(\tau)(\tau - t - h) + O(|\tau - t - h|^{1+\alpha}).$$

Подставляя эти соотношения в (25), получим

$$\begin{aligned} P(\tau, t, h) &= \zeta'(\tau)(\tau - t)(\tau - t - h) \cdot O(|h|^{1+\alpha}) \\ &\quad + h\zeta'(t)(\tau - t) \cdot O(|\tau - t - h|^{1+\alpha}) \\ &\quad + h\zeta'(\tau)(\tau - t - h) \cdot O(|\tau - t|^{1+\alpha}). \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично (20) из (22), (24) и (26) будем иметь

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \text{const} \cdot |h|^{1+\alpha} \int_{\Gamma \setminus l} \frac{|d\tau|}{|\tau - t| \cdot |\tau - t - h|^{1-\beta}} \\ &\quad + \text{const} \cdot |h| \int_{\Gamma \setminus l} \frac{|d\tau|}{|\tau - t| \cdot |\tau - t - h|^{1-\alpha-\beta}} \\ &\quad + \text{const} \cdot |h| \int_{\Gamma \setminus l} \frac{|d\tau|}{|\tau - t|^{1-\alpha} \cdot |\tau - t - h|^{1-\beta}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как на $\Gamma \setminus l$ величина $\frac{\sigma}{\lambda-s}$ не превышает по абсолютной величине $\frac{1}{2}$, из (27) получаем

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \text{const} \cdot \sigma^{1+\alpha} \left\{ \int_{s+2\sigma}^{\pi+s} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\beta}} + \int_{-\pi+s}^{s-2\sigma} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\beta}} \right\} \\ &\quad + \text{const} \cdot \sigma \left\{ \int_{s+2\sigma}^{\pi+s} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\alpha-\beta}} + \int_{-\pi+s}^{s-2\sigma} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\alpha-\beta}} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Если $\alpha + \beta < 1$, из (28) будем иметь

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \text{const} \cdot \sigma^{1+\alpha} \int_{s+2\sigma}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda - s)^{2-\beta}} + \text{const} \cdot \sigma \int_{s+2\sigma}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda - s)^{2-\alpha-\beta}} \\ &\leq \text{const} \cdot \sigma^{\alpha+\beta} \leq \text{const} \cdot |h|^{\alpha+\beta}, \end{aligned} \quad (29)$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^\beta(\Gamma)}$.

Если $\alpha + \beta = 1$, то, не переходя к бесконечным пределам в интегралах, из (28) получаем

$$|I_2| \leq \text{const} \cdot |h| \ln \frac{1}{|h|}, \quad (30)$$

где также константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^\beta(\Gamma)}$.

Предположим теперь, что $1 < \alpha + \beta < 2$. В этом случае из (20), (23)–(26) и (28) получаем, что к пределу

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(t+h) - \Psi(t)}{h} = \frac{1}{\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{k(\tau, t+h) - k(\tau, t)}{h} (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau$$

применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости, т. е. предел можно подвести под знак интеграла и функция $\Psi(t)$ дифференцируема (на Γ) по t , причем

$$\Psi'_t(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} M(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau, \quad (31)$$

где

$$M(\tau, t) = \frac{\zeta'(t)\zeta'(\tau)(\tau - t)^2 - [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2}{[\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2(\tau - t)^2} = \frac{\partial}{\partial t} k(\tau, t), \quad (32)$$

и интеграл в (31) есть обычный абсолютно сходящийся несобственный интеграл. Действительно, с помощью формул

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) - \zeta(t) &= \zeta'(\tau)(\tau - t) + O(|\tau - t|^{1+\alpha}), \\ \zeta(\tau) - \zeta(t) &= \zeta'(t)(\tau - t) + O(|\tau - t|^{1+\alpha}) \end{aligned} \quad (33)$$

числитель дроби в (32) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\zeta'(t)\zeta'(\tau)(\tau - t)^2 - [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 \\ &= \zeta'(t)(\tau - t) \cdot O(|\tau - t|^{1+\alpha}) + \zeta'(\tau)(\tau - t) \cdot O(|\tau - t|^{1+\alpha}), \end{aligned}$$

откуда, с учетом $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$, будем иметь

$$|M(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t))| \leq \text{const} \cdot \frac{1}{|\tau - t|^{2-\alpha-\beta}}, \quad (34)$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Используя схему, аналогичную примененной к $\Psi(t)$, покажем, что $\Psi'_t(t) \in C^{\alpha+\beta-1}(\Gamma)$.

Аналогично (17) запишем

$$\begin{aligned} &\Psi'_t(t+h) - \Psi'_t(t) \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} M(\tau, t+h)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h)) d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} M(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau \end{aligned} \quad (35)$$

и представим эту разность как $J_0 + J$, где

$$J_0 = \frac{1}{\pi i} \int_l M(\tau, t+h)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h)) d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_l M(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau,$$

$$J = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus l} M(\tau, t+h)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h)) d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus l} M(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau$$

(здесь дуга l та же, что и выше).

Аналогично (20), из (34) имеем

$$|J_0| \leq \text{const} \left\{ \int_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} |\lambda - s - \sigma|^{\mu-2} d\lambda + \int_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} |\lambda - s|^{\mu-2} d\lambda \right\} \leq \text{const} |h|^{\mu-1}, \quad (36)$$

где $\mu = \alpha + \beta$.

Далее, аналогично предыдущему, представим J в виде суммы $J = J_1 + J_2$, где

$$J_1 = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus l} M(\tau, t)(\varphi(t) - \varphi(t+h)) d\tau, \quad (37)$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus l} [M(\tau, t+h) - M(\tau, t)](\varphi(\tau) - \varphi(t+h)) d\tau. \quad (38)$$

Аналогично (23) будем иметь

$$|J_1| \leq \text{const} |h|^\beta \int_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\alpha}} \leq \text{const} |h|^{\alpha+\beta-1}, \quad (39)$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Далее, для оценки J_2 преобразуем разность

$$M(\tau, t+h) - M(\tau, t) = \frac{P_1(\tau, t, h)}{Q_1(\tau, t, h)},$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(\tau, t, h) &= [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 (\tau - t - h)^2 (\tau - t)^2, \\ P_1(\tau, t, h) &= \left\{ \zeta'(t+h)\zeta'(\tau)(\tau - t - h)^2 - [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 \right\} [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 (\tau - t)^2 \\ &\quad - \left\{ \zeta'(t)\zeta'(\tau)(\tau - t)^2 - [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 \right\} [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 (\tau - t - h)^2, \end{aligned} \quad (40)$$

или, после элементарных преобразований,

$$\begin{aligned} P_1(\tau, t, h) &= \zeta'(t+h)\zeta'(\tau)(\tau - t - h)^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 (\tau - t)^2 \\ &\quad - [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 (\tau - t)^2 \\ &\quad - \zeta'(t)\zeta'(\tau)(\tau - t)^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 (\tau - t - h)^2 \\ &\quad + [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 (\tau - t - h)^2 \\ &= \zeta'(\tau)(\tau - t)^2 (\tau - t - h)^2 \left\{ [\zeta'(t+h) - \zeta'(t)] [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 \right. \\ &\quad \left. + \zeta'(t) \left[(\zeta(\tau) - \zeta(t))^2 - (\zeta(\tau) - \zeta(t) + \zeta(t) - \zeta(t+h))^2 \right] \right\} \\ &\quad + [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 [(\tau - t - h)^2 - (\tau - t)^2] \\ &= \zeta'(\tau)(\tau - t)^2 (\tau - t - h)^2 \left\{ [\zeta'(t+h) - \zeta'(t)] [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 \right. \\ &\quad \left. - \zeta'(t) \left[2(\zeta(\tau) - \zeta(t))(\zeta(t) - \zeta(t+h)) + (\zeta(t) - \zeta(t+h))^2 \right] \right\} \\ &\quad + [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 [-2h(\tau - t) + h^2(\tau - t)^2]. \end{aligned} \quad (41)$$

Используя (33), а также формулу

$$\zeta(t) - \zeta(t+h) = -\zeta'(t)h + O(|h|^{1+\alpha}), \quad (42)$$

из (41) для $P_1(\tau, t, h)$ получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} P_1(\tau, t, h) &= h^\alpha \cdot O(|\tau - t|^4 |\tau - t - h|^2) \\ &\quad + h \cdot \left[O(|\tau - t|^{3+\alpha} |\tau - t - h|^2) + O(|\tau - t|^{2+\alpha} |\tau - t - h|^3) \right] \\ &\quad + h^{1+\alpha} \cdot O(|\tau - t|^3 |\tau - t - h|^2). \end{aligned} \quad (43)$$

Поскольку на $\Gamma \setminus l$ величина $\frac{\sigma}{\lambda-s}$ не превышает по абсолютной величине $\frac{1}{2}$, из (40), (43), на $\Gamma \setminus l$ имеем оценку

$$\begin{aligned} & |(M(\tau, t+h) - M(\tau, t))(\varphi(\tau) - \varphi(t+h))| \\ & \leq \text{const} \left\{ \frac{\sigma^\alpha}{|\lambda-s|^{2-\beta}} + \frac{\sigma}{|\lambda-s|^{3-\mu}} + \frac{\sigma^{1+\alpha}}{|\lambda-s|^{3-\beta}} \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

где, как и выше, $t = e^{is}$, $\tau = e^{i\lambda}$, $\mu = \alpha + \beta$, а константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Аналогично (28), (29), из (44) получим

$$|J_2| \leq \text{const} \cdot |h|^{\alpha+\beta-1}. \quad (45)$$

Сопоставляя (20), (23), (29), (30), (36), (39) и (45), получаем утверждение теоремы 1. \triangleright

Непосредственно из рассуждений доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 2. Если $\zeta(z) \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ — голоморфное продолжение $\zeta(t)$ внутрь D , а $\Psi(z)$ определяется формулами (12), (13) с заменой переменной t на z , то

$$\lim_{z \rightarrow t} \Psi(z) = \Psi(t), \quad \lim_{z \rightarrow t} \frac{\partial}{\partial z} \Psi(z) = \Psi'(t), \quad z \in D, \quad t \in \Gamma. \quad (46)$$

Замечание 2. Обсудим несколько подробнее банахово пространство (комплекснозначных) функций $C^{1,\alpha}(\Gamma)$. Норма в нем, как известно [1, с. 25], задается формулой

$$\|\varphi(t)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} = \max_{t \in \Gamma} |\varphi(t)| + \max_{t \in \Gamma} |\varphi'(t)| + \sup_{\tau, t \in \Gamma} \frac{|\varphi'(\tau) - \varphi'(t)|}{|\tau - t|^\alpha}. \quad (47)$$

Обозначим через $C_0^{1,\alpha}(\Gamma)$ подпространство функций $\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, для которых

$$\lim_{|\tau-t| \rightarrow 0} \frac{|\varphi'(\tau) - \varphi'(t)|}{|\tau - t|^\alpha} = 0.$$

($C_0^{1,\alpha}(\Gamma)$ — замкнутое подпространство пространства $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ (см. [4, с. 269]).)

Обозначим $C_*^{1,\alpha}(\Gamma) = C^{1,\alpha}(\Gamma) \setminus C_0^{1,\alpha}(\Gamma)$, $D \subset C^{1,\alpha}(\Gamma)$ — множество диффеоморфизмов окружности Γ . Покажем, что $D_* = D \cap C_*^{1,\alpha}(\Gamma) \neq \emptyset$.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Положим

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \pi - 2], \\ \frac{1}{2}(1 + |s - \pi + 1|^\alpha), & s \in [\pi - 2, \pi], \\ \frac{1}{2}(3 - |s - \pi - 1|^\alpha), & s \in [\pi, \pi + 2], \\ 1, & s \in [\pi + 2, 2\pi] \end{cases}$$

и

$$\varphi^*(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \pi - 2], \\ \frac{1}{2}(3 - |s - \pi + 1|^\alpha), & s \in [\pi - 2, \pi], \\ \frac{1}{2}(1 + |s - \pi - 1|^\alpha), & s \in [\pi, \pi + 2], \\ 1, & s \in [\pi + 2, 2\pi], \end{cases}$$

а также

$$f(s) = \int_0^s \varphi(\sigma) d\sigma, \quad f^*(s) = \int_0^s \varphi^*(\sigma) d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi].$$

Очевидно, функции $\zeta(t) = \zeta(e^{is}) = \zeta(s) = e^{if(s)}$ и $\zeta^*(t) = e^{if^*(s)}$ задают диффеоморфизмы класса $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ окружности Γ на себя и $\zeta(t), \zeta^*(t) \in C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$.

Отметим, что

$$\zeta^*(t) = \overline{\zeta(\bar{t})} \cdot t^2. \quad (48)$$

Введем в рассмотрение два линейных оператора

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + S), \quad P_- = \frac{1}{2}(I - S),$$

где I — тождественный оператор. Это непрерывные проекторы в пространстве $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ (см. [1, с. 38], [3, с. 66]). Для краткости далее будем обозначать проекции $P_{\pm}C^{1,\alpha}(\Gamma)$ через P_{\pm} .

Ясно, что пространство $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ представимо в виде прямой суммы $P_+ \oplus P_-$. На P_+ и P_- естественным образом определена норма (47) и определенная на $P_+ \oplus P_-$ топология произведения $P_+ \times P_-$ совпадает с топологией на $C^{1,\alpha}(\Gamma)$, определенной нормой (47).

Рассмотрим разложение в ряд Фурье функции $\zeta(t) = \zeta(e^{is})$:

$$\zeta(e^{is}) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_0 + c_{-n}e^{-ins} + c_n e^{ins}]. \quad (49)$$

Очевидно, $P_- \zeta(e^{is}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-ins}$, а $P_+ \zeta(e^{is}) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_0 + c_n e^{ins}]$.

Продифференцировав ряд (49) по s , из теоремы 4.7 и формулы (4.1) из [5, с. 79, 81], получим следующее утверждение.

Лемма 2. Если $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leq 1$, то $c_{\nu} = O(\frac{1}{|\nu|^{1+\alpha}})$. Для того чтобы $\zeta(t) \in C_*^{1,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись коэффициенты c_{ν} разложения (49) со сколь угодно большими по модулю номерами такие, что $|c_{\nu}| \geq \frac{L}{|\nu|^{1+\alpha}}$, где константа $L > 0$ от ν не зависит.

◁ Пусть $\zeta(t) \in C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$ — построенный выше диффеоморфизм окружности Γ . Положим в теореме 1 $\varphi(\tau) = \zeta(\tau)$. Тогда

$$\Psi\zeta(t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta(\tau)}{\tau - t} d\tau + \zeta(t) = 2P_- \zeta(t). \triangleright$$

Если $P_- \zeta(t) \notin C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$, то в силу леммы 2 и (48) $P_- \zeta^*(t) \in C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$ и в качестве $\varphi(\tau)$ возьмем $\zeta^*(t)$. Таким образом, можем считать, что $\Psi\zeta(t) \in C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$, откуда $\Psi\zeta(t) \notin C^{1,\gamma}(\Gamma)$ для любого γ , $1 \geq \gamma > \alpha$.

Литература

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
2. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.—М.: Физматгиз, 1977.—448 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.

4. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—400 с.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1.—М.: Мир, 1965.—615 с.

Статья поступила 25 октября 2016 г.

КЛИМЕНТОВ СЕРГЕЙ БОРИСОВИЧ
 Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
 ведущий научный сотрудник отдела математического анализа
 РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
 Южный федеральный университет,
 заведующий кафедрой геометрии
 РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
 E-mail: sklimentov@hotmail.com

ON COMBINATIONS OF THE CIRCLE SHIFTS AND SOME ONE-DIMENSIONAL INTEGRAL OPERATORS

Klimentov S. B.

The diffeomorphism $\zeta = \zeta(e^{is})$ of the unit circle and the operator $\Psi\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] \varphi(\tau) d\tau$ are under consideration. The main results can be stated as follows: If $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leq 1$, $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$, $0 < \beta \leq 1$, $\mu = \alpha + \beta \leq 2$, then $\Psi\varphi(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$ for $\mu < 1$. Moreover, the following inequality holds:

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^{\mu}(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)},$$

where the constant depends on $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ only. If $\mu = 1$, then $\Psi\varphi(t) \in C^{\mu-\varepsilon}(\Gamma)$ for all $0 < \varepsilon < \mu$ and the similar inequality holds. If $\mu > 1$, then $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\mu-1}(\Gamma)$, and

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^{1,\mu-1}(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)},$$

where the constant depends on $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ only. If $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leq 1$, $\varphi(t) \in C^{1,\beta}(\Gamma)$, $0 < \beta \leq 1$, then $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, and

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{C^{0,1}(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{C^{1,\beta}(\Gamma)},$$

where the constant depends on $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ only. The index α in the left-hand side of the last inequality can not be improved. The appropriate example is given.

Key words: shift, singular integral operator.

УДК 517.547.2

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. Ф. Коробейник

В работе исследуется распределение нулей одного класса мероморфных функций, содержащего, в частности, дзета-функцию Римана.

Ключевые слова: нули мероморфной функции, функциональное уравнение.

1. Введение. Класс \mathcal{K}_0 и область \mathcal{G}_g

Как обычно (см., например, [1]), определенная и однозначная в некоторой области \mathcal{G} из \mathbb{C} функция f называется мероморфной в \mathcal{G} , если она аналитична в каждой точке области, за исключением не более чем счетного множества Q_f точек (из \mathcal{G}), не имеющего предельных точек в \mathcal{G} , причем каждая из точек «исключительного» множества Q_f является полюсом f (любого конечного порядка).

Если $d \in (-\infty, +\infty)$, то условимся всюду в дальнейшем символом \mathcal{E}_d обозначать вертикальную полуплоскость $\{z: \operatorname{Re} z > d\}$, а символом $\overline{\mathcal{E}}_d$ — ее замыкание в \mathbb{C} (т. е. $\overline{\mathcal{E}}_d = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq d\}$). Введем класс \mathcal{K}_0 мероморфных функций g , каждая из которых обладает такими свойствами:

1) g однозначна и аналитична в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathcal{E}}_{\frac{1}{2}-h}$ ($h = h(g) \in (0, +\infty)$), за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек, расположенных в вещественном промежутке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + h_1]$, где $h_1 = h_1(g)$ и $0 < h_1 < h$, причем в каждой из этих выключенных точек функция g имеет полюс произвольного порядка;

2) для всех точек z из $\overline{\mathcal{E}}_{\frac{1}{2}-h}$ $g(z) = \overline{g(\bar{z})}$;

3) $g(z) \neq 0$ в $\overline{\mathcal{E}}_{\frac{1}{2}+h_1}$;

4) функция $g(z)$ отлична от нуля во всех точках вещественной полупрямой $\ell(\frac{1}{2} - h) := \{z = x \geq \frac{1}{2} - h\}$, в которых она аналитична (всюду в этой работе используется стандартное обозначение $z = x + iy$, где $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$), так что $\ell(\frac{1}{2} - h) = \{z: \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2} - h\}$;

5) всюду в вертикальной полосе $\overline{\mathcal{E}}_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h} := \{z: \frac{1}{2} - h \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2} + h\}$ $g(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению (типа уравнения Римана для дзета-функции) $g(z) = b_g(z)g(1-z)$.

«Множитель Римана» $b_g(z)$, вообще говоря, зависит от функции g и удовлетворяет следующим условиям:

6) $b_g(z)$ мероморфна в полосе $\overline{\mathcal{E}}_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h}$; более точно, она имеет в этой полосе не более конечного числа полюсов (все они принадлежат промежутку $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + h_1]$), а в остальных точках z полосы функция $b_g(z)$ аналитична;

7) все нули функции b_g вещественны и те из них, которые лежат правее точки $z = x = \frac{1}{2}$, принадлежат полупрямой

$$\bar{\ell}\left(\frac{1}{2} + h_1\right) := \left\{ z : \operatorname{Im} z = 0; \frac{1}{2} + h_1 \leq \operatorname{Re} z < +\infty \right\}.$$

Из 1)–7), в частности, следует, что $b_g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, для любого $g \in \mathcal{X}_0$; далее, если z_0 — чисто комплексное число, т. е. если $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, то точка z_0 будет нулем какой-либо функции g_0 из \mathcal{X}_0 кратности $\alpha_g \geq 1$ тогда и только тогда, когда $1 - z_0$ — нуль $g_0(z)$ той же кратности (оба эти результата используются в дальнейшем).

Пусть $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ и $g \in \mathcal{X}_0$. Назовем полупрямую $\ell_y^{(g)} := \{z = x + iy : \frac{1}{2} - h \leq x < +\infty\}$ g -регулярной, если она не содержит нулей $g(z)$, и g -нерегулярной, — в противном случае, т. е. когда на этой полупрямой имеется хотя бы один нуль функции g . Соответствующую ординату y также будем называть g -регулярной, в первом случае, и g -нерегулярной — во втором. Множество всех g -регулярных ординат обозначается далее символом Φ_g , а g -нерегулярных — символом Ψ_g .

Из обычной для всех курсов теории функций комплексного переменного теоремы единственности для аналитической функции нетрудно вывести, что множество Ψ_g не имеет конечных предельных точек и потому не более чем счетно.

Введем теперь неограниченную односвязную область \mathcal{G}_g , полученную удалением из $\mathcal{E}_{\frac{1}{2}-h}$ счетной совокупности промежутков, состоящей из промежутка $\left(\frac{1}{2} - h, \frac{1}{2} + h_1\right]$ и счетной системы промежутков

$$\left(\frac{1}{2} - h + iy, \frac{1}{2} + h_1 + iy\right], \quad y \in \Psi_g.$$

Так как $g(z) \neq 0$ в \mathcal{G}_g , то, как известно (см., например, [2, гл. 8, § 1, с. 319, теорема 1.2]), функция $\ln |g(z)|$, где $g \in \mathcal{X}_0$, гармонична в области \mathcal{G}_g ; кроме того, существует бесконечное множество \mathcal{M}_g гармонических и сопряженных с $\ln |g(z)|$ в \mathcal{G}_g функций, которые отличаются друг от друга на вещественную постоянную.

2. Выводное уравнение. Постановка основной задачи работы

Пусть $\sigma \in (h_1, h)$ и T — g -регулярная ордината (без ограничения общности, можно считать, что $T > 0$). Образует прямоугольный четырехугольник $\Gamma = \bigcup_{k=1}^4 \Gamma_k$ с вершинами в точках A, C, D, F и сторонами Γ_k , $1 \leq k \leq 4$, где $\Gamma_1 := [AC]$, $\Gamma_2 := [CD]$, $\Gamma_3 := [DF]$, $\Gamma_4 := [FA]$, $A = \frac{1}{2} - \sigma - iT$, $C = \frac{1}{2} + \sigma - iT$, $D = \frac{1}{2} + \sigma + iT$, $F = \frac{1}{2} - \sigma + iT$. Установим на Γ направление движения против часовой стрелки. Согласно теории вычетов (см., например, [1])

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \sum_{k=1}^4 \operatorname{Im} \int_{\Gamma_k} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 2\pi[-\mathcal{P}_g + \mathcal{N}_g(T) + 2\mathcal{N}_g(T, \sigma)].$$

Здесь \mathcal{P}_g — сумма порядков всех полюсов $g(z)$ (согласно § 1 все полюсы функции $g(z)$ из \mathcal{X}_0 расположены в промежутке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + h_1\right]$ вещественной оси); $\mathcal{N}_g(T)$ — сумма кратностей всех возможных нулей $g(z)$, принадлежащих интервалу $\left(\frac{1}{2} - iT, \frac{1}{2} + iT\right)$ прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$; наконец, $\mathcal{N}_g(T, \sigma)$ — сумма кратностей всех возможных нулей функции $g(z)$, лежащих внутри прямоугольника $BCDE$, где $B := \frac{1}{2} - iT$, $E := \frac{1}{2} + iT$.

При этом

$$\int_{\Gamma_4} \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \int_{\Gamma_1} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = - \left[\int_{\Gamma_2} \frac{g'(1-z)}{g(1-z)} dz + \int_{\Gamma_3} \frac{g'(1-z)}{g(1-z)} dz \right].$$

Учитывая, что при $b_g(z)g(1-z)g(z) \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{b'_g(z)}{b_g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{g'(1-z)}{g(1-z)},$$

находим, что

$$\sum_{k=1}^4 \operatorname{Im} \int_{\Gamma_k} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \operatorname{Im} \int_F \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz + \operatorname{Im} \int_D \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz + 2 \operatorname{Im} \left[\int_{\Gamma_2} \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \int_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \right].$$

Таким образом, для любых $g \in \mathcal{X}_0$, $\sigma \in (h_1, h)$, $T \in \Phi_g$ справедливо равенство

$$-\mathcal{P}_g + \mathcal{N}_g(T) + 2\mathcal{N}_g(T, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{FDC} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{CDF} \frac{g'(z)}{g(z)} dz. \quad (1)$$

Преобразуем теперь последнее слагаемое в правой части равенства (1). Всюду далее используется стандартное представление функции $g(z)$ из \mathcal{X}_0 в виде $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где (u, v) — пара сопряженных гармонических в \mathcal{G}_g функций. Имеем

$$\int_{CDF} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \int_{\Gamma_2} \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \int_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Далее,

$$\begin{aligned} J &:= \int_{\Gamma_2} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \int_{-T}^T \frac{\left[u\left(\frac{1}{2} + \sigma + i\tau\right) - iv\left(\frac{1}{2} + \sigma + i\tau\right) \right]}{\left[u^2\left(\frac{1}{2} + \sigma + i\tau\right) + v^2\left(\frac{1}{2} + \sigma + i\tau\right) \right]} g'\left(\frac{1}{2} + \sigma + i\tau\right) i d\tau \\ &= \int_{-T}^T \frac{\left[v\left(\frac{1}{2} + \sigma, \tau\right) + iu\left(\frac{1}{2} + \sigma, \tau\right) \right]}{\left[u^2\left(\frac{1}{2} + \sigma, \tau\right) + v^2\left(\frac{1}{2} + \sigma, \tau\right) \right]} \left[\frac{\partial v\left(\frac{1}{2} + \sigma, \tau\right)}{\partial \tau} - i \frac{\partial u\left(\frac{1}{2} + \sigma, \tau\right)}{\partial \tau} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} J &= \int_{-T}^T \frac{\left[u\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right) \frac{\partial v\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right)}{\partial y} - v\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right) \frac{\partial u\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right)}{\partial y} \right]}{\left[u^2\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right) + v^2\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right) \right]} dy \\ &= \int_{-T}^T \frac{\left[\frac{\partial u\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right)}{\partial x} u\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right) + v\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right) \frac{\partial v\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right)}{\partial x} \right]}{\left[u^2\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right) + v^2\left(\frac{1}{2} + \sigma, y\right) \right]} dy = \int_{-T}^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln |g(x + iy)| \right] \Big|_{x=\frac{1}{2} + \sigma} dy. \end{aligned}$$

Здесь символ $\left[\frac{\partial}{\partial x} \ln |g(x + iy)| \right]_{x=\frac{1}{2} + \sigma}$ означает, что вначале находится обычная частная производная $\frac{\partial}{\partial x} \ln |g(x + iy)|$, а затем в полученном выражении x заменяется на $\frac{1}{2} + \sigma$.

Аналогично

$$\int_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \int_{\frac{1}{2}+\sigma}^{\frac{1}{2}-\sigma} \frac{[u(x, T) - iv(x, T)]}{[u^2(x, T) + v^2(x, T)]} \left[\frac{\partial u(x, T)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, T)}{\partial x} \right] dx;$$

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \int_{\frac{1}{2}+\sigma}^{\frac{1}{2}-\sigma} \frac{[u(x, T) \frac{\partial v(x, T)}{\partial x} - v(x, T) \frac{\partial u(x, T)}{\partial x}]}{[u^2(x, T) + v^2(x, T)]} dx = - \int_{\frac{1}{2}+\sigma}^{\frac{1}{2}-\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial y} \ln |g(x + iy)| \right] \Big|_{y=T} dx.$$

Следовательно (см., например, [1, гл. II, п. 12, стр. 43]),

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{\Gamma_2} \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \operatorname{Im} \int_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)} dz &= \int_{\frac{1}{2}+\sigma-iT}^{\frac{1}{2}-\sigma+iT} -\frac{\partial W}{\partial y} dx + \frac{\partial W}{\partial x} dy \\ &= \mu \left(\frac{1}{2} - \sigma + iT \right) - \mu \left(\frac{1}{2} + \sigma - iT \right), \end{aligned}$$

где $W(x, y) := \ln |g(x + iy)|$, а $\mu(x, y)$ — любая функция из множества \mathcal{M}_g гармонических и сопряженных (в \mathcal{G}_g) с $\ln |g(x + iy)|$ функций. Таким образом, равенство (1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\forall g \in \mathcal{K}_0) (\forall \sigma \in (h_1, h)) (\forall T \in \Phi_g) (\forall \mu \in \mathcal{M}_g) \\ &- \mathcal{P}_g + \mathcal{N}_g(T) + 2\mathcal{N}_g(T, \sigma) \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{FDC} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz + \frac{1}{\pi} \left[\mu \left(\frac{1}{2} - \sigma + iT \right) - \mu \left(\frac{1}{2} + \sigma - iT \right) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь FDC — спрямляемая кривая, состоящая из двух прямолинейных отрезков $[F, D]$ и $[D, C]$, с началом в точке $F = \frac{1}{2} - \sigma + iT$ и концом — в точке $C := \frac{1}{2} + \sigma - iT$.

Основная цель данной работы заключается в том, чтобы попытаться выразить величины \mathcal{P}_g , $\mathcal{N}_g(T)$ и $\mathcal{N}_g(T, \sigma)$ через какие-то характеристики, непосредственно связанные с «множителем Римана» $b_g(z)$. В следующем параграфе делается первый шаг в решении поставленной задачи.

3. Определение числа \mathcal{P}_g

Пусть, как выше, $\sigma \in (h_1, h)$, а T — положительная g -регулярная ордината. Кроме введенных точек A, C, D, F, B, E рассмотрим еще точку $O := \{\frac{1}{2}\}$. Проведем простую спрямляемую кривую γ_1 с начальной точкой F и конечной — O так, чтобы все остальные точки кривой γ_1 принадлежали внутренности S прямоугольного треугольника FOE . При этом кривую γ_1 проведем настолько близко к отрезку $[F, 0]$, что все возможные нули (если они есть) функции $g(z)$, принадлежащие замкнутой области, ограниченной кривой γ_1 и сегментом $[F, 0]$, находятся лишь на $[F, 0]$.

Проведем еще кривую γ_2 с началом в O и концом в C , симметричную с γ_1 относительно точки O . Тогда γ_2 — простая спрямляемая кривая, все точки которой, кроме начальной и конечной, лежат внутри треугольника OBC . Кривую γ_2 можно взять настолько близко к $[O, C]$ (за счет приближения γ_1 к $[F, O]$), что $g(z) \neq 0$ в области, ограниченной $\gamma_2 \cup [OC]$.

Положим $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2$. Согласно теории вычетов

$$2\pi \left[-\mathcal{P}_g + \frac{\mathcal{N}_g(T)}{2} + \mathcal{N}_g(T, \sigma) \right] = \operatorname{Im} \int_C^D \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \operatorname{Im} \int_D^F \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz,$$

или, преобразуя последний интеграл и учитывая, что

$$\frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{g'(1-z)}{g(1-z)} = \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} \quad (\forall z \in \gamma_2),$$

$$2\pi[-2\mathcal{P}_g + \mathcal{N}_g(T) + 2\mathcal{N}_g(T, \sigma)] = 2\operatorname{Im} \int_C^D \frac{g'(z)}{g(z)} dz + 2\operatorname{Im} \int_D^F \frac{g'(z)}{g(z)} dz + 2\operatorname{Im} \int_{\Gamma_2} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz.$$

Таким образом,

$$(\forall \sigma \in (h_1, h)) (\forall T \in \Phi_g) (\forall g \in \mathcal{X}_0)$$

$$\begin{aligned} & -2\mathcal{P}_g + \mathcal{N}_g(T) + 2\mathcal{N}_g(T, \sigma) \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_C^D \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_D^F \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_O^C \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz. \end{aligned} \quad (3)$$

Если теперь вычесть (3) из (1), то мы придем к равенству

$$\mathcal{P}_g = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{FDC} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_C^O \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz. \quad (4)$$

Формула (4) показывает, что значение \mathcal{P}_g является определенным оператором (функционалом) от $b_g(z)$. Ей можно придать более компактный вид. Предварительно обозначим символом $\tilde{\mathcal{P}}_g$ сумму порядков всех полюсов функции $b_g(z)$ из полосы $\mathcal{E}_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h_1}$ (согласно исходным предположениям, все эти полюсы принадлежат промежутку $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + h_1]$). Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{FDC} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz + \operatorname{Im} \int_C^O \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{FDCOF} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz + \operatorname{Im} \int_C^O \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{FOC} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz = \pi(\tilde{\mathcal{P}}_g - \tilde{\mathcal{N}}_\sigma(T, \sigma)). \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\mathcal{N}}_\sigma(T, \sigma)$ — сумма кратностей всех возможных нулей $b_g(z)$, которые могут находиться в промежутке вещественной оси $[\frac{1}{2} + h_1, \frac{1}{2} + \sigma)$, который лежит внутри треугольника FDC . Таким образом, $\mathcal{P}_g = \tilde{\mathcal{P}}_g - \tilde{\mathcal{N}}_\sigma(T, \sigma)$.

**4. Определение величин $\mathcal{N}_g(T)$ и $\mathcal{N}_g(T, \sigma)$.
Основное соотношение для класса \mathcal{K}_0**

Пусть $\sigma \in (h_1, h)$, $g \in \mathcal{K}_0$. Из обычной теоремы единственности для аналитической функции следует в данном случае (с учетом описанных выше свойств функций из класса \mathcal{K}_0), что множество Φ_g всех g -регулярных ординат всюду плотно в $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, а множество Ψ_g всех g -нерегулярных ординат можно всегда представить в виде $\{\pm t_n\}_{n=1}^N$, где $1 \leq N \leq \infty$ и $t_n \uparrow +\infty$ при $N = +\infty$. Зафиксируем какую-либо g -нерегулярную ординату τ_0 (без потери общности можно считать, что $0 < \tau_0$) и найдем две последовательности $\{T_k^{(j)}\}_{k=1}^\infty$, $j = 1, 2$, g -регулярных ординат такие, что при $k \rightarrow \infty$ $T_k^{(1)} \uparrow \tau_0$, $T_k^{(2)} \downarrow \tau_0$, причем в интервале $(T_1^{(1)}, T_1^{(2)})$ (а, следовательно, и в любом интервале $(T_k^{(1)}, T_k^{(2)})$, $k \geq 1$) g -нерегулярных ординат, кроме τ_0 , нет. Положим при $k = 1, 2, 3, \dots$, $j = 1, 2$,

$$A_k^{(j)} := \left(\frac{1}{2} - \sigma - iT_k^{(j)} \right), \quad C_k^{(j)} := \left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(j)} \right),$$

$$D_k^{(j)} := \left(\frac{1}{2} + \sigma + iT_k^{(j)} \right), \quad F_k^{(j)} := \left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(j)} \right)$$

и воспользуемся формулой (2), согласно которой при $T = T_k^{(j)}$

$$\begin{aligned} & - \mathcal{P}_g + \mathcal{N}_g(T_k^{(j)}) + 2\mathcal{N}_g(T_k^{(j)}, \sigma) \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{F_k^{(j)} D_k^{(j)} C_k^{(j)}} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz + \frac{1}{\pi} \left[\mu \left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(j)} \right) - \mu \left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(j)} \right) \right] \end{aligned}$$

(здесь, как и раньше, $\mu(x, y)$ — произвольная функция из множества \mathcal{M}_g). Отсюда при любом $k \geq 1$

$$\begin{aligned} & N_g(T_k^{(2)}) - N_g(T_k^{(1)}) + 2 \left[N_g(T_k^{(2)}, \sigma) - N_g(T_k^{(1)}, \sigma) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Im} \int_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} C_k^{(2)}} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz - \operatorname{Im} \int_{F_k^{(1)} D_k^{(1)} C_k^{(1)}} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz \right] \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \left[\mu \left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(2)} \right) - \mu \left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(1)} \right) \right] \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \left[\mu \left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(1)} \right) - \mu \left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(2)} \right) \right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Если номер $k \geq 1$ неограниченно возрастает, то левая часть равенства (5) стремится к конечному числу $2\alpha_0 + 4\beta_0$, где $\alpha_0 = \alpha_0(g)$ — кратность возможного нуля $g(z)$ вида $\frac{1}{2} + i\tau_0$, а $\beta_0 = \beta_0(g)$ — сумма кратностей всех (также возможных) нулей той же функции $g(z)$, имеющих вид $\frac{1}{2} + x + i\tau_0$, $0 < x \leq h_1$. Но тогда и правая часть равенства (5) должна стремиться к тому же пределу $2\alpha_0 + 4\beta_0$, какова бы ни была функция μ из \mathcal{M}_g . При этом величины α_0 и β_0 могут принимать лишь значения $1, 2, \dots$ — и всегда (так как $\tau_0 \in \Psi_g$) $2\alpha_0 + 4\beta_0 \geq 2$.

Преобразуем теперь первое слагаемое правой части равенства (5). Имеем

$$\nu := \int_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} C_k^{(2)}} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz - \int_{F_k^{(1)} D_k^{(1)} C_k^{(1)}} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz = \int_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} D_k^{(1)}} (\cdot) dz + \int_{D_k^{(1)}}^{F_k^{(1)}} (\cdot) dz + \int_{C_k^{(1)}}^{C_k^{(2)}} (\cdot) dz.$$

Здесь и далее $(\cdot) = \frac{b'_g(z)}{b_g(z)}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \nu &= \operatorname{Im} \int_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} D_k^{(1)} F_k^{(1)} F_k^{(2)}} (\cdot) dz + \operatorname{Im} \int_{F_k^{(2)}}^{F_k^{(1)}} (\cdot) dz + \operatorname{Im} \int_{C_k^{(1)}}^{C_k^{(2)}} (\cdot) dz \\ &= \operatorname{Im} \int_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} D_k^{(1)} F_k^{(1)} F_k^{(2)}} (\cdot) dz + \operatorname{Im} \int_{F_k^{(2)}}^{F_k^{(1)}} \left[\frac{b'_g(z)}{b_g(z)} + \frac{b'_g(1-z)}{b_g(1-z)} \right] dz \\ &= \operatorname{Im} \int_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} D_k^{(1)} F_k^{(1)} F_k^{(2)}} (\cdot) dz + 2 \operatorname{Im} \int_{F_k^{(2)}}^{F_k^{(1)}} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz = 2 \operatorname{Im} \int_{F_k^{(2)}}^{F_k^{(1)}} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz = -2 \operatorname{Im} \int_{F_k^{(1)}}^{F_k^{(2)}} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{F_k^{(1)}}^{F_k^{(2)}} \frac{b'_g(z)}{b_g(z)} dz = 0$, из (5) получим

$$\begin{aligned} 2\pi(\alpha_0 + 2\beta_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left[\mu \left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(2)} \right) - \mu \left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(2)} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\mu \left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(1)} \right) - \mu \left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(1)} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом соотношение (6) справедливо для любой функции $\mu(x, y)$ из \mathcal{M}_g , если $g \in \mathcal{X}_0$ и $\sigma \in (h_1, h)$. Этим обстоятельством можно воспользоваться и, подбирая подходящим образом функцию μ , получим из (6) достаточно хорошие оценки сверху для положительной величины $\alpha_0 + 2\beta_0$. Изложению полученных на этом пути результатов предполагается посвятить отдельную статью.

5. Один подкласс класса \mathcal{X}_0 , связанный с общими рядами Дирихле

Обозначим символом \mathcal{X}_1 множество всех функций $g(z)$, обладающих следующими свойствами:

0) $g(z)$ является суммой ряда Дирихле $g_1 + \sum_{k=2}^{\infty} g_k e^{-\lambda_k z}$, имеющего конечную абсциссу a_g абсолютной сходимости (т. е. $a_g < +\infty$); при этом для любого $k \geq 1$ $g_k \in \mathbb{C}$, $g_k = g_k(g)$, $g_1 \neq 0$; $a_g \in [\frac{1}{2}, +\infty)$;

1) $\forall z \in \mathcal{E}_{a_g} \quad g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$;

2) $\forall k \geq 2 \quad \lambda_k = \lambda_k(g) \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ и $0 < \lambda_2 < \lambda_3 \leq \dots < \lambda_k \uparrow +\infty$;

3) функция $g(z)$ аналитически продолжается из \mathcal{E}_{a_g} в $\mathcal{E}_{\frac{1}{2}-h}$, где $h = h(g)$ — какое-либо число из интервала $(x_0 - \frac{1}{2}, +\infty)$, а x_0 — (единственный) вещественный корень уравнения $|g_1| = \sum_{k=2}^{\infty} |g_k| e^{-\lambda_k x}$; при этом (продолженная) функция $g(z)$ аналитична во всех точках

замкнутой полуплоскости $\overline{\mathcal{E}}_{\frac{1}{2}-h}$, за исключением, быть может, конечного числа точек, расположенных в промежутке $(\frac{1}{2}, x_0]$ и являющихся полюсами $g(z)$;

4) функция $g(z)$ отлична от нуля во всех точках сегмента $[\frac{1}{2} - h, x_0]$, в которых она аналитична;

5) в замкнутой полосе $\overline{\mathcal{E}}_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h}$ функция $g(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению $g(z) = b_g(z)g(1-z)$, причем функция $b_g(z)$ удовлетворяет условиям 6) и 7) из § 1, в которых $h_1 = x_0 - \frac{1}{2}$.

Из определения класса \mathcal{K}_1 следует, что $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_0$. Поэтому для функций из класса \mathcal{K}_1 справедливы все результаты, полученные в §§ 2–4.

Может быть, самым интересным конкретным примером функции из класса \mathcal{K}_1 является дзета-функция Римана $\zeta(z)$. Как хорошо известно (см., например, [3, 4]), она регулярна в кольце $0 < |z - 1| < +\infty$, имеет в точке $z = 1$ простой полюс и в полуплоскости \mathcal{E}_1 является суммой обыкновенного ряда Дирихле:

$$\zeta(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-z} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1 \cdot e^{-z \ln n},$$

для которого $a_\zeta = 1$, $x_0^{(\zeta)} \in (1, 2)$ — корень уравнения $1 = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x}$, $b_\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z)$. В данном случае можно положить $h_1 = h_1(\zeta) = x_0^{(\zeta)} - \frac{1}{2}$, а в качестве $h = h(\zeta)$ взять любое число из интервала $(h_1, \frac{5}{2})$. Можно также положить $h_1(\zeta) = a_\zeta = 1$, а в качестве $h(\zeta)$ взять любое число из интервала $(1, \frac{5}{2})$. При сделанном выборе чисел h и h_1 «множитель Римана» $b_\zeta(z)$ удовлетворяет условиям 6)–7) из § 1, откуда $\zeta(z) \in \mathcal{K}_1$. Следовательно, для дзета-функции справедливы все результаты из §§ 2–4 и, в частности, соотношения (1)–(6), в которых надо положить $g(z) = \zeta(z)$, $b_g(z) = 2(2\pi)^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z)$.

Литература

1. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций.—М.: ГИФМЛ, 1961.—335 с.
2. Евграфов М. А. Аналитические функции.—М.: Наука, 1968.—471 с.
3. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.—407 с.
4. Edwards H. M. Riemann's Zeta Function.—N. Y.: Dover Publications, Inc. Minnesota, 2001.—315 p.

Статья поступила 23 октября 2016 г.

КОРОБЕЙНИК Юрий Федорович
Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: kor@math.rsu.ru

ON DISTRIBUTION OF ZEROS FOR A CLASS
OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

Korobeĭnik Yu. F.

In this article some class \mathcal{K}_0 of meromorphic functions is introduced. Each function $y(z)$ from \mathcal{K}_0 satisfies the functional equation $y(z) = b_y(z)y(1-z)$ with its own «Riemann's multiplier» $b_y(z)$ which is a meromorphic function with real zeros and poles. All poles of an arbitrary function from \mathcal{K}_0 are real and belong to the interval $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + h_1]$, $h_1 = h_1(y)$. Using the theory of residues we prove some relation connecting the following magnitudes: \mathcal{P}_y , the sum of all orders of poles of $y \in \mathcal{K}_0$; $\mathcal{N}_y(T)$, the sum of multiplicities of all zeros of y having the form $\frac{1}{2} + i\tau$, $|\tau| < T$; $\mathcal{N}_y(T, \sigma)$, the sum of multiplicities of all zeros of y which lies inside the rectangle with vertices $A = \frac{1}{2} - \sigma - iT$, $C = \frac{1}{2} + \sigma - iT$, $D = \frac{1}{2} + \sigma + iT$, $F = \frac{1}{2} - \sigma + iT$. Here T is a y -regular ordinate, that is, $y(z)$ is analytic and has no zeros on the line $\text{Im } z = T$, $\text{Re } z \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (h_1, h)$, $h = h(y)$, σ is chosen in such a manner that $y(z) \neq 0$ on the segments $[F, A]$ and $[C, D]$. The problem of finding the magnitudes of \mathcal{P}_y , $\mathcal{N}_y(T)$ and $\mathcal{N}_y(T, \sigma)$ with the help of corresponding characteristics of the «Riemann's multiplier» $b_y(z)$ is posed. This problem is solved in the paper for \mathcal{P}_y . Moreover, the obtained equality enables one to deduce a definite relation the left part of which contains the number $2\alpha_{T_0} + 4\beta_{T_0}$ where T_0 is arbitrary y -nonregular ordinate, α_{T_0} is the multiplicities of all possible zero of y of the form $\frac{1}{2} + iT_0$, β_{T_0} is the sum of multiplicities of all possible zeros of y belonging to $\frac{1}{2} + iT_0, +\infty + iT_0$. It is proved that the class \mathcal{K}_0 contains the Riemann's Zeta-Function.

Key words: zeros of meromorphic functions, functional equation.

УДК 519.633

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА
АЛЛЕРА — ЛЫКОВА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

М. М. Лафишева, М. А. Керефов, Р. В. Дышекова

Работа посвящена построению разностных схем для уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова. Рассмотрена задача с нелокальными граничными условиями типа В. А. Стеклова. Установлен факт сходимости разностной схемы со скоростью $O(h + \tau)$. Проведены численные расчеты с использованием метода окаймления.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса, нелокальные условия, разностная схема, априорная оценка, сходимость, метод окаймления.

Вопросы тепло-влагопереноса в почвах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, гляциологии, экологии, строительной физики и других областей науки. Сложное взаимодействие потоков тепла в почво-грунтах и снежном покрове обуславливает протекание процессов инфильтрации, миграции и морозного пучения, испарения и транспирации, метаморфизма и снеготаяния.

Вопросы теплового и водного режима корнеобитаемого слоя почвы, процессов испарения и транспирации имеют важное значения для сельского хозяйства. Данные процессы определяют условия перезимовки и произрастания сельскохозяйственных культур. Велика роль миграции и инфильтрации влаги в формировании продуктивных запасов влаги на сельскохозяйственных полях.

Исследователи все свое внимание концентрируют на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов [2] и т. д.

Если уравнение переноса влаги

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial W}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где W — влажность в долях единицы, x — глубина, t — время, D — коэффициент диффузивности, предполагает бесконечную скорость распространения возмущения, то уравнение А. В. Лыкова

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial W}{\partial x} \right] \quad (2)$$

учитывает конечную его скорость.

В то же время весьма существенно введение дополнительного слагаемого $A_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, даже когда оно мало. Особенно роль последнего становится заметной в процессах, предполагающих быстрые колебания влажности на границах исследуемого образца почвы.

Правильное истолкование того факта, когда и при каких условиях происходит движение влаги в прямом и обратном направлениях, возможно на основе нового модифицированного уравнения диффузии или уравнения Аллера [8]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial W}{\partial x} + A \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \right].$$

В литературе мы находим всевозможные постановки задач для таких уравнений. Одним из таких классов качественно новых задач являются нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных.

Нелокальными называют такие задачи, в которых вместо, или вместе с граничным условием ставятся условия, связывающие значения решения (и, возможно, его производных) во внутренних точках области или в точках границы и каких-либо внутренних точках. Подобные задачи возникают при математическом моделировании процессов различной природы, например, влагопереноса, теплопроводности, при изучении задач математической биологии, задач управления и других.

1. Постановка задачи. Априорная оценка

В замкнутой области $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$u(0, t) = \lambda u(l, t), \quad (4)$$

$$u_x(0, t) = \lambda u_x(l, t), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (6)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (7)$$

где $0 < c_0 \leq k(x, t) \leq c_1$, $|k_t| \leq c_2$, ρ , A — положительные постоянные.

Нелокальные условия типа (4)–(5) рассматривались еще В. А. Стекловым [6]. Краевые задачи с нелокальным условием по времени изучались в ряде работ А. И. Кожанова, М. М. Шханукова — Лафишева и др.

В предположении существования достаточно гладкого решения задачи (3)–(7), получим для него априорную оценку. Для чего умножим уравнение (3) скалярно на u_t :

$$(u_t, u_t) + \rho(u_{tt}, u_t) = ((ku_x)_x, u_t) + A(u_{xxt}, u_t) + (f, u_t), \quad (8)$$

где $(u, v) = \int_0^l u v dx$, $(u, u) = \|u\|_0^2$.

Преобразуем, с учетом граничных условий, интегралы, входящие в (8)

$$(u_t, u_t) = \|u_t\|_0^2, \\ (u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_0^2,$$

$$\begin{aligned}
((ku_x)_x, u_t) &= ku_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l ku_x u_{tt} dx \\
&= u_x(l, t) u_t(l, t) (k(l, t) - \lambda^2 k(0, t)) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l ku_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k_t u_x^2 dx, \\
(f, u_t) &\leq \frac{1}{2} \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|_0^2,
\end{aligned}$$

$$(u_{xxt}, u_t) = u_{xt}(l, t) u_t(l, t) - u_{xt}(0, t) u_t(0, t) - \|u_{xt}\|_0^2 = u_{xt}(l, t) u_t(l, t) (1 - \lambda^2) - \|u_{xt}\|_0^2.$$

Подставляя в (8) полученные соотношения, получим

$$\begin{aligned}
\|u_t\|_0^2 + \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l ku_x^2 dx + A \|u_{xt}\|_0^2 \\
\leq u_{xt}(l, t) u_t(l, t) (1 - \lambda^2) + u_x(l, t) u_t(l, t) (k(l, t) - \lambda^2 k(0, t)) \\
+ \frac{1}{2} \int_0^l k_t u_x^2 dx + \frac{1}{2} \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|_0^2. \quad (9)
\end{aligned}$$

Положим $k(l, t) = k(0, t)$, $\lambda = 1$. Тогда неравенство (9) примет вид

$$\rho \frac{d}{dt} \|u_t\|_0^2 + \frac{d}{dt} \int_0^l ku_x^2 dx + 2A \|u_{xt}\|_0^2 \leq \int_0^l k_t u_x^2 dx + \|f\|_0^2,$$

или, с учетом $|k_t| \leq c_2$, имеем

$$\rho \frac{d}{dt} \|u_t\|_0^2 + \frac{d}{dt} \int_0^l ku_x^2 dx + 2A \|u_{xt}\|_0^2 \leq c_2 \|u_x\|_0^2 + \|f\|_0^2. \quad (10)$$

Проинтегрируем (10) по τ от 0 до t

$$\rho \|u_t\|_0^2 + c_0 \|u_x\|_0^2 + 2A \int_0^t \|u_{xt}\|_0^2 d\tau \leq c_2 \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + c_0 \|u'_0\|_0^2 + \int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \rho \|u_1\|_0^2. \quad (11)$$

Перепишем неравенство (11) в виде

$$\|u_x\|_0^2 \leq M_1 \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + F(t),$$

где $F(t) = M_2 \left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_1(x)\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2 \right)$, M_1, M_2 — положительные постоянные.

Воспользуемся леммой Гронуолла [1]. Тогда из неравенства (11) получим априорную оценку для решения исходной дифференциальной задачи (3)–(7)

$$\|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \int_0^t \|u_{xt}\|_0^2 d\tau \leq M \left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_1(x)\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2 \right). \quad (12)$$

Из оценки (12) следует единственность и устойчивость решения дифференциальной задачи по входным данным.

2. Разностная схема. Дискретный аналог априорной оценки

Введем в замкнутой области \bar{Q}_T сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih : i = 0, 1, \dots, N, h = l/N\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau : j = 0, 1, \dots, j_0, \tau = T/j_0\},$$

$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ с шагами $h = l/N$, $\tau = T/j_0$.

Дифференциальной задаче (3)–(7) поставим в соответствие разностную схему ($\lambda = 1$)

$$y_0 + \rho y_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda (\sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}) + Ay_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi. \quad (13)$$

$$y(0, t) = y(l, t), \quad (14)$$

$$y_{x,0} = y_{\bar{x},N}, \quad (15)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (16)$$

$$y_t(x, 0) = u_1(x), \quad (17)$$

где

$$y_0 = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}, \quad y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad \check{y} = y^{j-1}, \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad a_i = k_{i-1/2},$$

$$(ay_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right), \quad \varphi = f_i^j.$$

Порядок аппроксимации разностной схемы (13)–(17) $O(h + \tau)$.

Перепишем уравнение (13) при $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ и $k(x, t) = 1$. Примем во внимание также очевидное равенство [4]

$$\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y} = y + \sigma\tau^2 y_{\bar{t}\bar{t}}.$$

Теперь разностное уравнение (13) примет вид

$$y_0 + \rho y_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda y + \sigma\tau^2 \Lambda y_{\bar{t}\bar{t}} + A \Lambda y_0 + \varphi. \quad (18)$$

Для получения разностного аналога априорной оценки умножим скалярно уравнение (18) на y_0 :

$$\left(y_0, y_0 \right) + \rho \left((E - \bar{\sigma}\tau^2 \Lambda) y_{\bar{t}\bar{t}}, y_0 \right) = \left(\Lambda y, y_0 \right) + A \left(\Lambda y_0, y_0 \right) + \left(\varphi, y_0 \right), \quad (19)$$

где $\bar{\sigma} = \sigma/\rho$, $\|u\|_0^2 = (u, u)$, $(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h$.

Используем в дальнейших преобразованиях следующее равенство [4]

$$\left(y_{\bar{t}\bar{t}}, y_0 \right) = 0.5 \left(\|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right).$$

Рассмотрим слагаемые равенства (19):

$$\left((E - \bar{\sigma}\tau^2 \Lambda) y_{\bar{t}\bar{t}}, y_0 \right) = \left(y_{\bar{t}\bar{t}}, y_0 \right) - \bar{\sigma}\tau^2 \left(\Lambda y_{\bar{t}\bar{t}}, y_0 \right) = 0.5 \left(\|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right) - \bar{\sigma}\tau^2 0.5 \left(\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 \right),$$

$$\begin{aligned} (\Lambda y_0, y_0) &= (y_{\bar{x}\bar{t}0}, y_0) = -(y_{\bar{x}0}, y_{\bar{x}0}) + y_{\bar{x}t,N} y_{t,N} - y_{x_{t,0}} y_{t,0} = -\|y_{\bar{x}0}\|_0^2, \\ (\varphi, y_0) &\leq \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2} \|y_0\|_0^2. \end{aligned}$$

Имеет место формула [4]

$$-(\Lambda y, y_0) = \frac{1}{8} (\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|_0^2)_t - \frac{\tau^2}{8} (\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2)_t. \quad (20)$$

Подставив полученное в равенство (19) и учитывая выражение (20), будем иметь

$$\begin{aligned} \|y_0\|_0^2 + \frac{\rho}{2} (\|y_{\bar{t}}\|_0^2)_t + \frac{\rho\bar{\sigma}\tau^2}{2} (\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2)_t + \frac{1}{8} (\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|_0^2)_t \\ - \frac{\tau^2}{8} (\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2)_t + \|y_{\bar{x}0}\|_0^2 \leq \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2} \|y_0\|_0^2 \end{aligned}$$

или

$$\rho (\|y_{\bar{t}}\|_0^2)_t + \left(\rho\bar{\sigma}\tau^2 - \frac{\tau^2}{4} \right) (\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2)_t + \frac{1}{4} (\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq \|\varphi\|_0^2. \quad (21)$$

Введем обозначение

$$E^j = \rho \|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 + \frac{1}{4} (\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|_0^2)_t.$$

Тогда неравенство (21) примет вид

$$E_t^j \leq \|\varphi\|_0^2$$

или

$$E^{j+1} - E^j \leq \tau \|\varphi\|_0^2.$$

Просуммируем последнее выражение по j' от 1 до j

$$E^{j+1} \leq E^1 + \sum_{j'=1}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau.$$

При $\sigma \geq 1/4$ из неравенства (21) получим

$$\rho \|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + c_1 \|\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 + \frac{1}{4} (\|\hat{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}\|_0^2) \leq \rho \|y_{\bar{t}}^1\|_0^2 + c_1 \|y_{\bar{x}\bar{t}}^1\|_0^2 + \frac{1}{4} (\|y_{\bar{x}}^1 + y_{\bar{x}}^0\|_0^2) + \sum_{j'=1}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau.$$

Преобразуем слагаемое правой части последнего неравенства

$$\|y_{\bar{x}}^1 + y_{\bar{x}}^0\|_0^2 = \|u_{1,\bar{x}}\tau + 2u_{0,\bar{x}}\|_0^2 \leq \frac{\tau}{2} \|u_{1,\bar{x}}\|_0^2 + \|u_{0,\bar{x}}\|_0^2.$$

Итак, получена априорная оценка

$$\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M \left(\|u_1\|_0^2 + \|u_{1,\bar{x}}\|_0^2 + \|u_{0,\bar{x}}\|_0^2 + \sum_{j'=1}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau \right). \quad (22)$$

Из оценки (22) следует устойчивость и сходимость разностной схемы (13)–(17).

3. Алгоритм численного решения задачи. Метод окаймления

Пусть $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/2$, $k(x, t) = 1$. Тогда разностное уравнение (13) примет вид

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i, \quad (23)$$

где

$$F_i = \frac{y_i^{j-1}}{2\tau} - \rho \frac{(y_i^{j-1} - 2y_i^j)}{\tau^2} + \left(\frac{a}{2} - \frac{A}{2\tau} \right) \frac{y_{i+1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i-1}^{j-1}}{h^2} + \varphi_i^j,$$

$$A_i = B_i = \frac{a}{2h^2} + \frac{A}{2\tau h^2}; \quad C_i = \frac{1}{2\tau} + \frac{\rho}{\tau^2} + \frac{a}{h^2} + \frac{A}{\tau h^2}.$$

Запишем граничные условия (14), (15) в виде

$$y_0 - y_N = 0, \quad (24)$$

$$2y_N - y_1 - y_{N-1} = 0. \quad (25)$$

Дополним задачу начальными условиями

$$y^0 = u_0, \quad (26)$$

$$y^1 = \tau u_1 + u_0. \quad (27)$$

Задачу (23)–(27) будем решать методом окаймления [7, 9], а не методом прогонки, так как матрица системы не трехдиагональна.

Представим задачу (23)–(27) в виде

$$A_N \cdot X_N = F_N, \quad (28)$$

где

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ A & -C & B & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A & -C & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу системы (28) A_N перепишем в виде окаймленной матрицы

$$A_N = \begin{pmatrix} A_{N-1} & u_N \\ v_N & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$A_{N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ A & -C & B & \dots & 0 \\ 0 & A & -C & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -C \end{pmatrix}, \quad F_N = \begin{pmatrix} F_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Обозначим X_{N-1} решение усеченной системы

$$A_{N-1} \cdot X_{N-1} = F_{N-1}. \quad (29)$$

Аналогично Q_{N-1} есть решение той же системы, но с другой правой частью

$$A_{N-1} \cdot Q_{N-1} = -u_{N-1}. \quad (30)$$

Решать системы (29) и (30) можно методом прогонки. А затем, зная X_{N-1} , Q_{N-1} , мы легко вычислим по формуле [7] X_N

$$X_N = \begin{pmatrix} X_{N-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{f_N - v_N X_{N-1}}{a_{NN} + v_N Q_{N-1}} \cdot \begin{pmatrix} Q_{N-1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Итак, разностная задача (23)–(27) решается с помощью метода окаймления на каждом временном слое, последовательно, начиная со второго.

Приведем результаты расчетов (в среде Matlab), при различных входных данных.

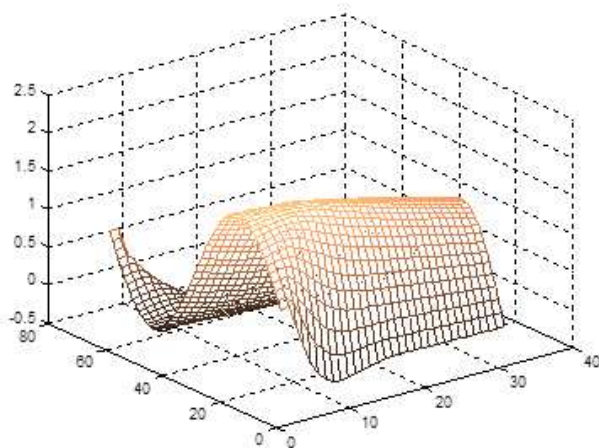


Рис. 1. Вычисления проведены со следующими входными данными:

$$u_0 = \sin x, u_1 = \cos x, A = 1, \rho = 1, f = 0, l = 2\pi.$$

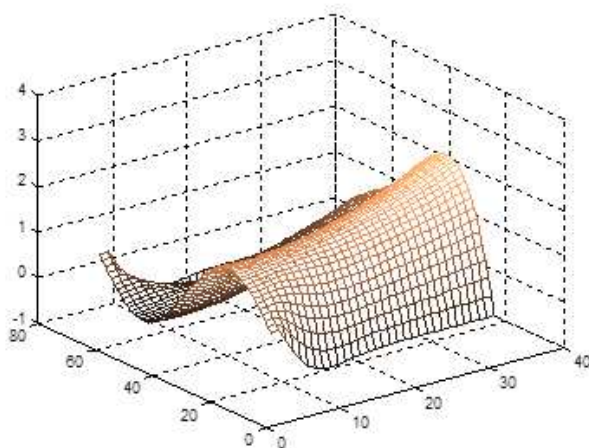


Рис. 2. Вычисления проведены со следующими входными данными:

$$u_0 = \sin x, u_1 = \cos x, A = 1, \rho = 1, f = 5, l = 2\pi.$$

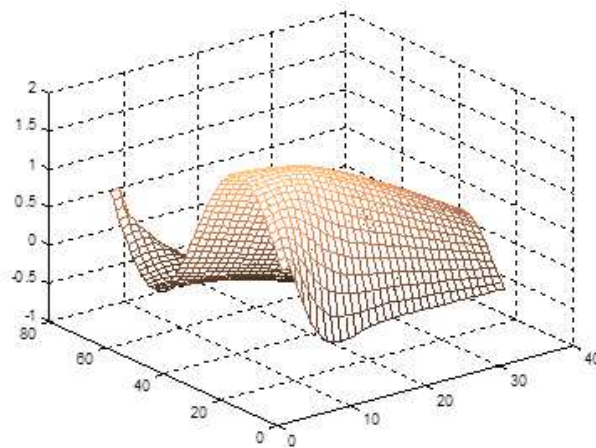


Рис. 3. Вычисления проведены со следующими входными данными:

$$u_0 = \sin x, \quad u_1 = \cos x, \quad A = 1, \quad \rho = 1, \quad f = -1, \quad l = 2\pi.$$

Для проверки правильности работы алгоритма сравним точное решение задачи (3)–(7) с разностным решением задачи (13)–(17) (рис. 4).

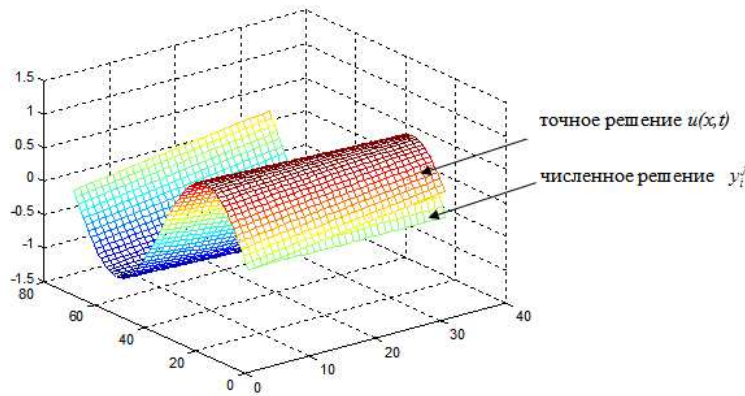


Рис. 4.

Возьмем функцию $u = \sin(x + t)$ (положив $A = 1$, $\rho = 1$), которая удовлетворяет граничным условиям при $l = 2\pi$. Тогда

$$u_0 = \sin x, \quad u_1 = \cos x, \quad f(x, t) = 2 \cos(x + t).$$

При этом $\max_{i,j} |y - u| = 0.4001$.

Литература

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—702 с.
2. Нерпин С. В., Юзефович Г. И., Янгарбер В. А. Математические методы прогнозирования водного режима // Материалы объединенной сессии ВАСХНИЛ и АН УзССР.—Ташкент: ФАН, 1967.—С. 279–293.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—616 с.
5. Соколенко Э. А., Делов В. М., Зелинченко Е. Н., Кавокин А. А. Моделирование и управление водно-солевым режимом почв.—Алма-Ата: Наука КазССР, 1976.—180 с.

6. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики.—М.: Наука, 1983.—432 с.
7. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.—М: Физматгиз, 1960.—656 с.
8. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.—353 с.
9. Шхануков М. Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Нальчик, 1995.—225 с.

Статья поступила 2 июня 2016 г.

ЛАФИШЕВА МАДИНА МУХАМЕДОВНА
Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х. М. Бербекова, доцент кафедры ИМОАС
РОССИЯ, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: taisauti@yandex.ru

КЕРЕФОВ МАРАТ АСЛАНБИЕВИЧ
Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х. М. Бербекова, доцент кафедры ИМОАС
РОССИЯ, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: kerefov@mail.ru

ДЫШЕКОВА РАМЕТА ВЛАДИМИРОВНА
Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х. М. Бербекова, магистр 2-го года обучения кафедры ИМОАС
РОССИЯ, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: rometa.dikinova@mail.ru

DIFFERENCE SCHEMES FOR THE ALLER-LYKOV MOISTURE TRANSFER EQUATIONS WITH A NONLOCAL CONDITION

Lafisheva M. M., Kerefov M. A., Dyshekova R. V.

Questions of warm-moisture transfer in the soil are fundamental in solving of various problems of hydrology, agrophysics, ecology and others. Aller-Lykov equation obtained by introducing additional terms in the moisture transfer equation, which take into account the rapid fluctuations of humidity on the boundaries of the test sample of the soil and the final velocity of the perturbation. The paper deals with a boundary value problem for the Aller-Lykov moisture transfer equation with the first type Steklov conditions. A priori estimate for the solution of the differential problem is obtained by the method of energy inequalities, which implies the stability of its solution. Three-level scheme is built. A priori estimate for the solution of the difference problem is obtained. The fact of the convergence of a difference scheme with a rate of $O(h + \tau)$ is set. The features of the application of the bordering method to the numerical solution of the difference problem are considered. Numerical experiments are conducted, the results of which are attached.

Key words: moisture transfer equation, nonlocal conditions, difference scheme, a priori estimate, convergence, bordering method.

УДК 532.59

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛЯМЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРА
С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ
В ГЕМОДИНАМИКЕ АРТЕРИАЛЬНЫХ СОСУДОВ

Е. Н. Портнов, Ю. А. Устинов

Для построения математической модели распространения пульсовой «волны давления» в артериальных сосудах, стенки которых обладают винтовой анизотропией, дается описание метода расчета радиальной жесткости сосуда и фазовой скорости данной волны.

Ключевые слова: волна давления, винтовая анизотропия, радиальная жесткость, фазовая скорость.

Введение

В работе [1] для описания пульсового движения крови в толстостенных артериальных сосудах с винтовой анизотропией их стенок приведены следующие уравнения:

$$\begin{aligned}d_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + d_{12} \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} &= \rho_0 S \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + 2\pi r_2 q_z, \\d_{12} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + d_{22} \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} &= \rho_0 I_p \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} + 2\pi r_2 q_\theta,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\rho \partial_t v - \partial_z p = 0, \quad c^2 \partial_z^2 p - \partial_t^2 p = 0,\tag{2}$$

где $u_z = u_z(z, t)$ — осевые смещения точек сосуда, $\phi_z = \phi_z(z, t)$ — угол поворота поперечного сечения сосуда, ρ_0 — плотность материала стенки сосуда, $S = \pi(r_1^2 - r_2^2)$ — площадь поперечного сечения стенки сосуда, $I_p = \frac{1}{4}\pi(r_1^4 - r_2^4)$ — полярный момент инерции поперечного сечения, q_z, q_θ — касательные напряжения, возникающие между стенкой сосуда и кровью, r_1, r_2 — наружный и внутренний радиусы стенки сосуда соответственно, d_{ij} — элементы матрицы жесткостей растяжения-сжатия (метод их определения описан в [2]), $c^2 = \frac{G}{\rho}$, v — среднее по сечению значение скорости крови, p — гидродинамическое давление, c — фазовая скорость, G — радиальная жесткость стенки сосуда, ρ — плотность крови.

Эти уравнения описывают динамические процессы в стенке сосуда, возникающие во время систолы, последнее уравнение описывает распространение «волны давления». Для тонкостенной изотропной стенки сосуда

$$G = G_0 = \frac{Eh}{2b} = \frac{E(x-1)}{(1+x)}, \quad x = \frac{r_2}{r_1},\tag{3}$$

где E — модуль Юнга материала стенки, h, b — толщина и радиус срединной поверхности соответственно.

Формула (2) для тонкостенного сосуда впервые была получена Резалем [3], немногим позже этот же результат получен Мёнсом [4], Кортвегом [5] и Громеко [6].

В случае толстой изотропной стенки жесткость определяется на основе решения задачи Ляме [7] следующей формулой:

$$G = \frac{E(x^2 - 1)}{2(1 + x^2 + \nu(x^2 - 1))}, \quad (4)$$

где ν — коэффициент Пуассона. В силу несжимаемости материала стенки сосуда $\nu = 0.5$.

Сравнительный анализ величин радиальной жесткости, определяемых по формулам (3), (4), показал, что $\frac{\Delta G}{G_0}$, где $\Delta G = G_0 - G$ не превышает 5%, если $0 < y < 0.2$, где $y = x - 1$.

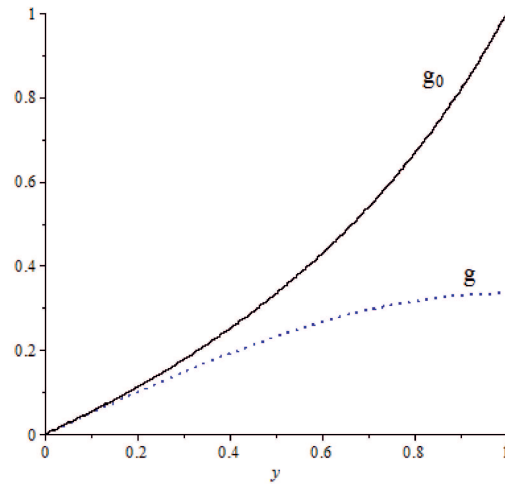


Рис. 1. $g = \frac{G}{E}$, $g_0 = \frac{G_0}{E}$.

В работе [8] на основе математической модели, в которой стенка сосуда рассматривается как тонкая цилиндрическая оболочка с винтовой анизотропией, были выделены три типа волн, две из которых продольно-крутильная и крутильно-продольная (в предлагаемой модели аналогичные волны описываются уравнениями (1)) энергетически незначительно влияют на волновые процессы в сосуде.

1. Основные соотношения теории упругости в винтовой системе координат и постановка задачи

Обозначим через r_1, r_2 внешний и внутренний радиусы цилиндра соответственно. С геометрическим центром одного из сечений цилиндра свяжем начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 . Эту систему координат будем называть «основной». Для описания винтовой анизотропии введем «сопутствующую» систему координат r, θ, z , связанную с основной соотношениями

$$x_1 = r \cos(\theta + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\theta + \tau z), \quad x_3 = z. \quad (5)$$

Здесь и ниже предполагается, что параметр $\tau = \text{const}$, а соотношения (5) при $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ являются параметрическими уравнениями винтовой линии.

Радиус-вектор точек винтовой линии представим в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= r\mathbf{e}'_1 + z\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2 \sin(\theta + \tau z), \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1 \sin(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2 \cos(\theta + \tau z), \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_z,\end{aligned}\tag{6}$$

где \mathbf{i}_n — орты основной системы координат.

С винтовой линией свяжем естественный репер

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{t},\tag{7}$$

где \mathbf{n} , \mathbf{b} , \mathbf{t} — орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно.

Используем формулы

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{R}}{ds} &= \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad ds = g dz, \\ k &= \frac{\tau^2 r}{g^2}, \quad g^2 = 1 + x^2, \quad x = \tau r,\end{aligned}\tag{8}$$

где k — кривизна винтовой линии.

После преобразований получаем ортогональную матрицу перехода от базиса \mathbf{e}_j к базису \mathbf{e}'_i :

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g} & \frac{x}{g} \\ 0 & \frac{x}{g} & \frac{1}{g} \end{vmatrix}.$$

Будем считать материал цилиндра локально трансверсально изотропным, у которого направления главных осей тензора модулей упругости c_{ij} совпадают с направлениями ортов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , где орт \mathbf{e}_3 определяет направление оси упругой симметрии. В этом базисе соотношения обобщенного закона Гука имеют вид [9]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33}, \\ \sigma_{22} &= c_{12}e_{11} + c_{11}e_{22} + c_{13}e_{23}, \\ \sigma_{33} &= c_{13}(e_{11} + e_{22}) + c_{33}e_{33}, \\ \sigma_{23} &= c_{44}e_{23}, \quad \sigma_{13} = c_{44}e_{13}, \quad \sigma_{12} = c_{66}e_{12}.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь e_{ij} , σ_{ij} — компоненты тензоров малых деформаций и напряжений соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Технические постоянные E , E' , G' , ν , ν' связаны с модулями c_{ij} следующими выражениями:

$$\begin{aligned}c_{11} &= \frac{E(E' + E\nu^2)}{E'(1 + \nu^2) - 2E\nu'(\nu + \nu')}, \\ c_{12} &= \frac{E(E'\nu + E\nu^2)}{E'(1 + \nu^2) - 2E\nu'(\nu + \nu')}, \\ c_{13} &= \frac{EE'\nu}{E'(1 - \nu) - 2E'\nu'^2}, \\ c_{33} &= \frac{E'^2(1 - \nu)}{E'(1 - \nu) - 2E'\nu'^2}, \\ c_{44} &= G'; \quad 2c_{66} = c_{11} - c_{12}.\end{aligned}\tag{10}$$

При переходе от базиса Френе к базису винтовой системы координат для закона Гука получаем следующие выражения [2]:

$$\begin{aligned}
\sigma &= C' \mathbf{e}', \\
C' &= (c_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, 6, \\
\sigma &= (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})^T, \\
\mathbf{e}' &= (\mathbf{e}_{rr}, \mathbf{e}_{\theta\theta}, \mathbf{e}_{zz}, \mathbf{e}_{\theta z}, \mathbf{e}_{rz}, \mathbf{e}_{r\theta})^T.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
c'_{11} &= c_{11}, \quad c'_{12} = c_{12}l_c^2 + c_{13}l_s^2, \quad c'_{13} = c_{13}l_c^2 + c_{12}l_s^2, \\
c'_{14} &= l_c l_s (c_{13} - c_{12}), \\
c'_{23} &= c_{13}l_c^2 + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44})l_c^2 l_s^2 + c_{13}l_s^4, \\
c'_{24} &= -c_{11}l_c^3 l_s - c_{13}(l_c l_s^3 - l_c^3 l_s) + c_{33}l_c l_s^3 - 2c_{44}(l_c l_s^3 - l_c^3 l_s), \\
c'_{33} &= c_{11}l_s^4 + 2c_{13}l_c^2 l_s^2 + c_{33}l_c^4 + 4c_{44}l_c^2 l_s^2, \\
c'_{34} &= -l_c l_s (c_{11}l_s^2 - c_{13} + 2c_{13}l_c^2 + 2c_{44}l_c^2 - 2c_{44}l_s^2), \\
c'_{44} &= c_{11}l_c^2 l_s^2 - 2c_{13}l_c^2 l_s^2 + c_{33}l_c^2 l_s^2 + c_{44}(1 - 4l_c^2 l_s^2), \\
c'_{55} &= c_{44}l_c^2 + c_{66}l_s^2, \\
c'_{56} &= l_c l_s (c_{44} - c_{66}), \\
c'_{66} &= c_{66}l_c^2 + c_{44}l_s^2, \\
l_c &= \cos \alpha, \quad l_s = \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{12}$$

Остальные элементы матрицы C' равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку $\tau = \text{const}$, то α (угол между касательной к винтовой спирали $r = \text{const}$ и осью Oz) является функцией r , в силу чего все c'_{ij} , кроме c'_{11} зависят от r .

В базисе винтовой системы координат $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ компоненты тензора деформаций выражаются через координаты вектора смещений

$$\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^T$$

следующими формулами:

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= \partial_r u_r, & e_{\theta\theta} &= u_r + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r}, \\
e_{zz} &= D u_z, & 2e_{r\theta} &= \partial_r u_\theta + \frac{\partial_\theta u_r - u_\theta}{r}, \\
2e_{\theta z} &= \frac{\partial_\theta u_z}{r} + D u_\theta, & 2e_{rz} &= \partial_r u_z + D u_r.
\end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения равновесия в напряжениях в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
\partial_r (r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \partial_\theta \sigma_{r\theta} + rD\sigma_{rz} &= 0, \\
\partial_r (r\sigma_{r\theta}) + \sigma_{r\theta} + \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + rD\sigma_{rz} &= 0, \\
\partial_r (r\sigma_{rz}) + \partial_\theta \sigma_{\theta z} + rD\sigma_{zz} &= 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\partial_r, \partial_\theta$ — частные производные по r, θ соответственно, $D = \partial_z - \tau \partial_\theta$.

2. Решение задачи Ляме

Рассмотрим полый цилиндр с винтовой анизотропией с внутренним радиусом r_2 и внешним радиусом r_1 . Будем считать, что на внутреннюю поверхность цилиндра задано давление $p = \text{const}$, а внешняя поверхность свободна от напряжений.

Полагая

$$u_r = a(r), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0, \quad (15)$$

для компонент тензора деформаций получаем

$$e_{rr} = \frac{da}{dr}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{a(r)}{r}, \quad e_{zz} = 0, \quad e_{r\theta} = 0, \quad e_{z\theta} = 0, \quad e_{rz} = 0. \quad (16)$$

Соотношения обобщенного закона Гука, в рассматриваемом случае, принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c'_{11}e_{rr} + c'_{12}e_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c'_{12}e_{rr} + c'_{22}e_{\theta\theta}, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{\theta z} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

а из системы уравнений равновесия (14) нетривиальным будет только одно:

$$\frac{d(r\sigma_{rr})}{dr} - \sigma_{\theta\theta} = 0. \quad (18)$$

Поставленная задача в общем случае не имеет аналитического решения, для численного интегрирования сведем ее к эквивалентной системе 2-х обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого, полагая

$$y_1 = a(r), \quad y_2 = r\sigma_{rr},$$

на основании (18) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dr} &= \frac{-c'_{12}}{c'_{11}r}y_1 + \frac{1}{c'_{11}r}y_2, \\ \frac{dy_2}{dr} &= \frac{c'_{22}c'_{11} - c'^2_{12}}{c'_{11}r}y_1 + \frac{c'_{12}}{c'_{11}r}y_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку цилиндр подвержен только внутреннему давлению, получаем следующие граничные условия:

- 1) при $r = r_1$, $\sigma_{rr} = -p$, $\sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{rz} = 0$;
- 2) при $r = r_2$, $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{rz} = 0$.

Для численного интегрирования этой системы дифференциальных уравнений использовалась стандартная программа, основанная на методе «пристрелки».

При проведении расчетов основное внимание было уделено исследованию зависимости радиальной жесткости $G_\tau = \frac{p}{u_r(r_2)}$ от безразмерных параметров r_1 и α , где $tg(\alpha) = \tau r_1$.

Расчеты проводились для стенки плечевой артерии со значениями постоянных:

$$E' = 4.905 \cdot (10)^8 (\text{Па}), \quad E = 4.086 \cdot (10)^8 (\text{Па}),$$

$$\nu' = 0.5, \quad \nu = 0.5, \quad \rho = 1020 \text{ кг/м}^3, \quad G' = 8.175 \cdot (10)^7 (\text{Па}).$$

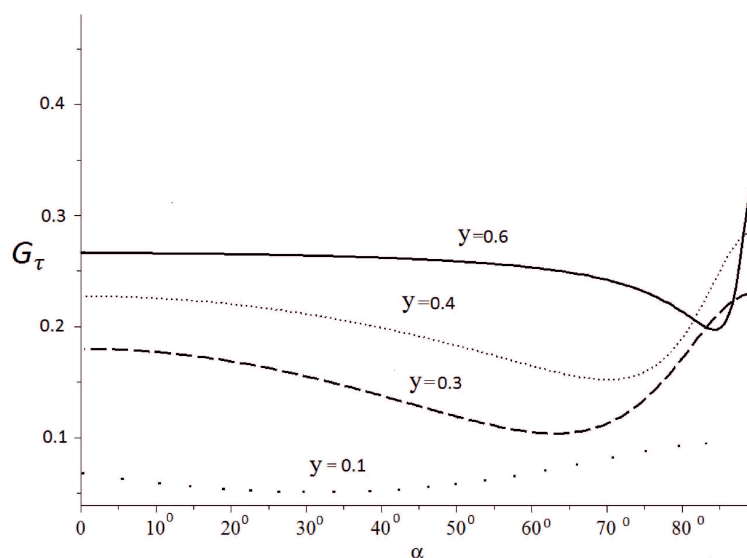


Рис. 2.

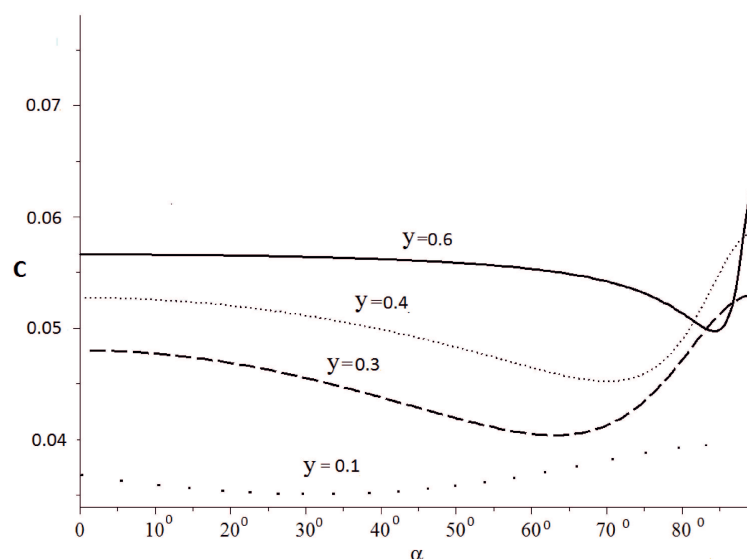


Рис. 3.

На рис. 2–3 изображены изменения радиальной жесткости G_r и фазовой скорости c для «мягкого» материала (стенка плечевой артерии) в зависимости от α при фиксированных значениях внутреннего радиуса. На них видно что наибольшие изменения произошли при $\alpha > 60^\circ$.

Так же было проведено сравнение радиальной жесткости по формуле (4) и результатами расчетов, полученных по описанной модели при фиксированных значениях $\alpha = 30^\circ - 50^\circ$ и переменном внутреннем радиусе r_2 . Рис. 4 иллюстрирует влияние угла намотки на радиальную жесткость. Кривая $\alpha = 0^\circ$ отвечает формуле (4).

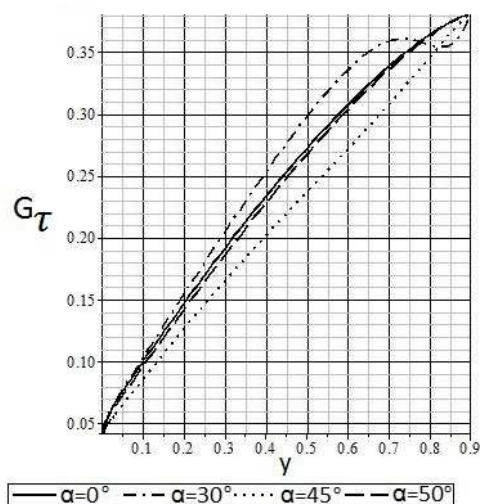


Рис. 4.

Литература

1. Батищев В. А., Поддубный А. А., Устинов Ю. А. Математические модели движения крови в артериальных сосудах // Исследования по диф. уравнениям, мат. моделированию и проблемам мат. образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 15–31.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 8, ч. 2).
2. Панфилов И., Устинов Ю. А. Колебания и волны в цилиндре свинтовой анизотропией // Акуст. журн.—2010.—Т. 56, № 6.—С. 759–766.
3. Resal H. Sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuysu élastique // J. de Math. Pures et Appliquées.—Amsterdam, 1876.—166 p.—[in French].
4. Moens J. Pulscurve.—Leiden, 1878.—S. 80.
5. Kortveg D. J. Over Vooriplantigs snelheid van golven in elastische buisen. PhD Thesis.—Amsterdam: Univ. of Amsterdam, 1878.—166 p.—[in Dutch].
6. Громеко И. С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках // Собр. соч.—М.: Изд-во АН СССР, 1952.—С. 172–183.
7. Лурье А. И. Теория упругости.—М.: Наука, 1970.—940 с.
8. Устинов Ю. А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики.—2003.—Т. 2, № 4.—С. 37–62.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.—М.: Наука: 1977.—415 с.

Статья поступила 13 декабря 2015 г.

Портнов Евгений Николаевич
Южный федеральный университет,
аспирант кафедры теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: djonatan-91@mail.ru

Устинов Юрий Анатольевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: ustinov_rsu@mail.ru

BUILDING THE SOLUTION OF THE LAME PROBLEM FOR
A CYLINDER WITH A SPIRAL ANISOTROPY AND ITS APPLICATIONS
IN HEMODYNAMICS OF ARTERIAL VESSELS

Portnov E. N., Ustinov U. A.

A cylinder with spiral anisotropy may be presented, in particular, as a result of spiral wrapping of a cylindrical surface by layers of thin threads of rigid material with simultaneous covering by a polymer material. Thus, there will be locally transversely isotropic composite material with a symmetry axis directed tangentially to helical spirals; in order to determine its elastic characteristics, one can use homogenization methods. To construct a mathematical model of propagation of sphygmocardiographic “pressure waves” in arterial vessels whose walls possess spiral anisotropy, we give a description of the method to calculate a radial stiffness and phase velocity of a certain wave. In the same way, we present a comparative analysis of radial stiffness values, various theories and calculation results illustrating the dependency of rigidity and phase velocity on geometric parameters.

Key words: wave pressure, helical anisotropy, radial stiffness, the phase velocity.

УДК 517.55

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ БИБЕРБАХА ДЛЯ ОБОБЩЕННО
ЗВЕЗДНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ \mathbb{C}^n , $n \geq 2$

М. Д. Султыгов

В статье рассматривается одно из дополнений к фундаментальным результатам геометрической теории многомерного комплексного анализа по проблемам классов голоморфных функций. По радиусам параметризации границ областей Рейнхарта строятся эффективные достаточные условия обобщенно-звездных функций в виде многомерного аналога гипотезы Бибербаха.

Ключевые слова: однолиственная функция, многомерный аналог гипотезы Бибербаха, эффективность коэффициентов Тейлора, радиус параметризации.

В 1916 г. Л. Бибербахом [1] была высказана знаменитая гипотеза: $|c_n| \leq n$, $n = 2, 3, \dots$, имеет место для всех регулярных и однолистных в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$.

Гипотеза привлекала внимание многих математиков, и при попытке доказать ее были развиты многие методы геометрической теории функций комплексного переменного [2], однако доказательство гипотезы было получено лишь в 1985 г. французским математиком Л. де Бранжем [3].

Цель статьи — построить эффективные достаточные условия для обобщенно-звездных функций в виде многомерного аналога гипотезы Бибербаха для областей Рейнхарта. Результаты статьи дополняют многочисленные точные оценки тейлоровых коэффициентов в различных подклассах изучаемого класса. Исследуемый класс содержит ранее известные классы звездных функций M_D [4], класс $M_D(a, b)$ [5] и др.

История вопроса. В работе И. И. Баврина (см., например, [4]) введены и изучаются класс обобщенно однолистных функций Q_D , и различные его подклассы M_D , N_D и другие с точки зрения оценок тейлоровых коэффициентов разложения функций этих классов в двойные степенные ряды. Используя решение Л. де Бранжем проблемы Бибербаха для функций S одной комплексной переменной, И. И. Баврин решил в положительном смысле для функций класса Q_D [4] многомерный аналог проблемы Л. Бибербаха.

В оценки коэффициентов Тейлора класса Q_D входит величина $d_{mn}(D) = \sup(|w|^m |z|^n)$ для всех $(w, z) \in D \subset \mathbb{C}^2$. Для конкретного вида области D важно уметь вычислить $d_{mn}(D)$. С целью получения эффективных оценок коэффициентов Тейлора возникает вопрос о выделении специальных классов областей D , для которых можно эффективно вычислить $d_{mn}(D)$. Пусть D_1 — та область D , граница которой дважды непрерывно дифференцируема и аналитически выпукла извне. Как доказал А. А. Темляков [7], границу этой области можно представить в следующем параметрическом виде:

$$|w| = r_1(\tau), \quad |z| = r_2(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

где $r_1(0) = 0$, $r_1(1) < \infty$, $r_1'(\tau) > 0$, $0 < \tau \leq 1$, и $r_2(\tau) = R_2 \exp \left[- \int_0^\tau \frac{\tau}{1-\tau} d \ln r_1(\tau) \right]$, R_2 — положительная постоянная, $r_2(1) = 0$. Такое параметрическое представление области D_1 позволяет эффективно вычислить $d_{mn}(D_1)$ [6]:

$$d_{mn}(D_1) = r_1^m \left(\frac{m}{m+n} \right) r_2^n \left(\frac{m}{m+n} \right), \quad m+n > 0,$$

считая $0^0 = 1$.

Заметим также, что если область D — бицилиндр $\{|w| < R_1, |z| < R_2\}$, то, очевидно, что $d_{mn}(D) = R_1^m \cdot R_2^n$. Итак, в случае тех областей D_1 и бицилиндра оценки коэффициентов Тейлора являются эффективными.

Остановимся более подробно на самом аналоге проблемы Бибербаха в случае двух комплексных переменных для класса Q_D [4]. Случай многих комплексных переменных рассматривается аналогично.

Приведем определение класса Q_D . Пусть D — ограниченная полная двоякокруговая область с центром в начале координат. Пусть в области D функция $f(w, z)$, $f(0, 0) = 1$ голоморфна. Возьмем множество $D \cap \{z = k_0 w\}$, где k_0 — фиксированное конечное число из всего множества комплексных чисел, т. е. множество, представляющее собой сечение области D аналитической плоскостью $z = k_0 w$.

Скажем, что в сечении $D \cap \{z = k_0 w\}$ функция $wf(w, z)$ однолистка, если функция $wf(w, k_0 w)$ как функция одного комплексного переменного w однолистка в соответствующем круге. Здесь под соответствующим кругом понимается проекция сечения $D \cap \{z = k_0 w\}$ на плоскость $z = 0$; если $k_0 = 0$, то это будет круг, который вырезает область D из плоскости $z = 0$.

Обозначим через Q_D [4] класс голоморфных в области D функций $f(w, z)$, $f(0, 0) = 1$, обладающих следующими свойствами:

1) в сечении области D каждой плоскостью из всевозможных аналитических плоскостей $z = kw$ функция $wf(w, z)$ однолистка;

2) в сечении $D \cap \{w = 0\}$ функция $zf(0, z)$ однолистка.

Теорема 1 (аналог гипотезы Бибербаха) [4, теорема 14.1]. Для функций $f(w, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^k a_{k-l,l} w^{k-l} z^l) \in Q_D$ имеют место следующие оценки:

$$A_k(D) = \sup_{(w,z) \in D} \sum_{l=0}^k |a_{k-l,l}|^2 |w|^{2(k-l)} |z|^{2l} \leq (k+1)^2, \quad k > 0, \quad (1)$$

$$B_k(D) = \sup_{(w,z) \in D} \left| \sum_{l=0}^k a_{k-l,l} w^{k-l} z^l \right| \leq k+1, \quad k > 0. \quad (2)$$

Следствие 1 [4, теорема 14.1]. Для функций $f(w, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} w^m z^n \in Q_D$ имеют место оценки

$$|a_{mn}| \leq \frac{m+n+1}{d_{mn}(D)}, \quad m+n > 0. \quad (3)$$

Заметим, что при переходе к однолистным функциям одного комплексного переменного оценка (3) с учетом веса [8, 9] переходит в оценку, фигурирующую в гипотезе Бибербаха.

Представим результаты автора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным классом звездных функций $M_D(A, B)$, $-1 \leq B \leq A \leq 1$, назовем множество всех голоморфных в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функций $f(z_1, \dots, z_n) = f(z)$,

представимых рядом $f(z) = 1 + \sum_{|k|=1}^{\infty} a_k z^k$, где $|k| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n k_i$, $k! \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n k_i!$, и удовлетворяющих условию [4, 11]

$$\frac{\mathcal{R}_1 f(z)}{f(z)} = \frac{1 + A\Theta(z)}{1 + B\Theta(z)}, \quad \Theta(z) \in S_D(0),$$

где $S_D(0)$ — класс голоморфных в области D функций Шура $f(z_1, z_2)$, $f(0, 0) = 0$, для которых $|f(z_1, z_2)| < 1$ в D [4]. Здесь $\mathcal{R}_\gamma[f(z)] = \gamma f(z) + \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}$ [11]. Обратным к оператору $\mathcal{R}_\gamma[f(z)]$ является оператор $\mathcal{R}_\gamma^{-1} f(z) = \int_0^1 \varepsilon^{\gamma-1} f(\varepsilon z_1, \dots, \varepsilon z_n) d\varepsilon$.

Интересным является класс голоморфных функций $M_D\left(\frac{b^2 - a^2 + a}{b}, \frac{1-a}{b}\right)$, $a + b \geq 1$, $b \leq a \leq b + 1$, для которого приведен и доказан критерий принадлежности:

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k \in M_D\left(\frac{b^2 - a^2 + a}{b}, \frac{1-a}{b}\right).$$

Теорема 2 [12]. Функция $f(z) \in M_D\left(\frac{b^2 - a^2 + a}{b}, \frac{1-a}{b}\right)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z_1, z_2) = \exp \int_0^1 \frac{ch(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2)}{b + (1-a)h(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2)} \cdot \frac{d\varepsilon}{\varepsilon},$$

где $c = b^2 - (a - 1)^2$ и $h(z_1, z_2) \in S_D(0)$, для которых $|h(z_1, z_2)| \leq 1$ в D .

Приведем достаточное условие принадлежности $f(z_1, z_2) \in M_D(A, B)$, $-1 \leq B \leq A \leq 1$ в виде многомерного аналога гипотезы Бибербаха [1] и укажем эффективность.

Как было ранее установлено [13], в классе функций $f(z_1, z_2) \in M_D(A, B)$ оценки коэффициентов Тейлора $|a_{k_1, k_2}(f : D)|$ имеют вид

$$|a_{k_1, k_2}(f : D)| \leq \begin{cases} \frac{A-B}{d_{k_1, k_2}(f : D)}, & |k| > 0, -1 \leq B \leq A \leq 1; \\ \frac{\prod_{j=2}^{|k|+1} [A-(j-1)B]}{|k|! d_{k_1, k_2}(f : D)}, & A - |k|B \geq |k| - 1, |k| \geq 2; \\ \frac{A-B}{|k|! d_{k_1, k_2}(f : D)}, & A - 2B \leq 1, |k| \leq 2; \\ \frac{\prod_{j=2}^{|k|+1} [A-(j-1)B]}{|k|(|k|-2)! d_{k_1, k_2}(f : D)}, & A - |k|B < |k| - 1, |k| \leq 3. \end{cases}$$

Теорема 3. Для функций $f(z_1, z_2) \in M_{U_{R_1, R_2}^2}(A, B)$ в бицилиндре эффективные оценки коэффициентов Тейлора имеют вид

$$|a_{k_1, k_2}(f : U_{R_1, R_2}^2)| \leq \begin{cases} \frac{A-B}{R_1^{k_1} R_2^{k_2}}, & |k| > 0, -1 \leq B \leq A \leq 1; \\ \frac{\prod_{j=2}^{|k|+1} [A-(j-1)B]}{|k|! R_1^{k_1} R_2^{k_2}}, & A - |k|B \geq |k| - 1, |k| \geq 2; \\ \frac{A-B}{|k|! R_1^{k_1} R_2^{k_2}}, & A - 2B \leq 1, |k| \leq 2; \\ \frac{\prod_{j=2}^{|k|+1} [A-(j-1)B]}{|k|(|k|-2)! R_1^{k_1} R_2^{k_2}}, & A - |k|B < |k| - 1, |k| \leq 3. \end{cases}$$

Теорема 4. Для функций $f(z_1, z_2) \in M_{K_1}(A, B)$ в гиперконусе $K_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| + |z_2| < 1\}$, где граница этой области представима в параметрическом виде

$$d_{K_1} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = \tau, |z_2| = 1 - \tau, 0 \leq \tau \leq 1\},$$

$$d_{k_1, k_2}(f : K_1) = \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} \right)^{k_1} \left(\frac{k_2}{k_1 + k_2} \right)^{k_2},$$

эффеkтивные оценки коэффициентов Тейлора имеют вид

$$|a_{k_1, k_2}(f : K_1)| \leq \begin{cases} \frac{|k|^{|k|}(A-B)}{k_1^{k_1} k_2^{k_2}}, & |k| > 0, -1 \leq B \leq A \leq 1; \\ \frac{|k|^{|k|} \left\{ \prod_{j=2}^{|k|+1} [A-(j-1)B] \right\}}{|k|! k_1^{k_1} k_2^{k_2}}, & A - |k|B \geq |k| - 1, |k| \geq 2; \\ \frac{|k|^{|k|}(A-B)}{|k|! k_1^{k_1} k_2^{k_2}}, & A - 2B \leq 1, |k| \leq 2; \\ \frac{|k|^{|k|} \left\{ \prod_{j=2}^{|k|+1} [A-(j-1)B] \right\}}{|k|(|k|-2)! k_1^{k_1} k_2^{k_2}}, & A - |k|B < |k| - 1, |k| \leq 3. \end{cases}$$

В качестве последнего примера приведем аналог гипотезы Бибераха в логарифмически выпуклой ограниченной полной двоякокруговой области

$$D_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^p + |z_2|^q < 1; p = \frac{m}{n}, m, n, q \in \mathbb{N}\}.$$

Отметим, что $D_{p,q} \in (T)$ тогда и только тогда, когда $p \geq 1$.

Теорема 5. Для функций $f(z_1, z_2) \in M_{D_{p,q}}(A, B)$ в логарифмически выпуклой ограниченной полной двоякокруговой области $D_{p,q}$ эффеkтивные оценки коэффициентов Тейлора имеют вид

$$|a_{k_1, k_2}(f : D_{p,q})| \leq \begin{cases} \frac{(k_1 q + k_2 p)^{\frac{k_1 q + k_2 p}{pq}} (A-B)}{(k_1 q)^{\frac{k_1}{p}} (k_2 p)^{\frac{k_2}{q}}}, & -1 \leq B \leq A \leq 1; \\ \frac{(k_1 q + k_2 p)^{\frac{k_1 q + k_2 p}{pq}} \left\{ \prod_{j=2}^{|k|+1} [A-(j-1)B] \right\}}{|k|! (k_1 q)^{\frac{k_1}{p}} (k_2 p)^{\frac{k_2}{q}}}, & A - |k|B \geq |k| - 1, |k| \geq 2; \\ \frac{(k_1 q + k_2 p)^{\frac{k_1 q + k_2 p}{pq}} (A-B)}{|k|! (k_1 q)^{\frac{k_1}{p}} (k_2 p)^{\frac{k_2}{q}}}, & A - 2B \leq 1, |k| \leq 2; \\ \frac{(k_1 q + k_2 p)^{\frac{k_1 q + k_2 p}{pq}} \left\{ \prod_{j=2}^{|k|+1} [A-(j-1)B] \right\}}{|k|(|k|-2)! (k_1 q)^{\frac{k_1}{p}} (k_2 p)^{\frac{k_2}{q}}}, & A - |k|B < |k| - 1, |k| \leq 3. \end{cases}$$

Доказательство теорем 3–5 проводится по схеме теоремы 1 из [4] с использованием соответствующих оценок работы [14].

Литература

1. Bieberbach L. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln // S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.—1916.—P. 940–955.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1966.—628 с.
3. De Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math.—1985.—№ 154.—P. 137–152.
4. Баврин И. И. Операторный метод в комплексном анализе.—М.: Прометей, 1991.—200 с.

5. Султыгов М. Д. Об одном подклассе класса M_D функций двух комплексных переменных // МОПИ им. Н. К. Крупской.—М., 1982.—14 с. Деп. В ВИНТИ, № 828-82.
6. Баврин И. И. Оценки коэффициентов Тейлора функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 131, № 6.—С. 1231–1233.
7. Темляков А. А. Интегральные представления функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР.—1958.—Т. 120, № 5.—С. 976–979.
8. Баврин И. И. Функции, однолистные с весом // Докл. АН.—1996.—Т. 349, № 6.—С. 727–728.
9. Баврин И. И. Классы функций, однолистных с весом // Докл. АН.—2000.—Т. 371, № 6.—С. 727–729.
10. Султыгов М. Д. Звездно-выпуклые функции многих комплексных переменных в пространстве Рейнхарта // Сб. науч. тр. ИнгГУ.—Нальчик, 2004.—№ 2.—С. 333–362.
11. Баврин И. И. Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов функций.—М.: Изд-во МОПИ, 1976.—99 с.
12. Султыгов М. Д. Интегральные представления некоторых классов голоморфных функций в пространстве многих комплексных переменных. Сер. 1. // Изв. Чеченского гос. пед. ин-та.—2015.—№ 2 (10).—С. 19–23.
13. Султыгов М. Д. Коэффициенты Тейлора для некоторых классов голоморфных функций многих комплексных переменных // Сб. науч. тр. ИнгГУ.—Магас, 2008.—№ 6.—С. 165–173.
14. Goel R. M., Mehrok B. S. On the coefficients of a subclass of starlike functions // Indian J. Pure Appl. Math.—1981.—Vol. 12 (5).—P. 634–647.

Статья поступила 12 мая 2016 г.

Султыгов Магомед Джабраилович
Ингушский государственный университет,
профессор кафедры математики
РОССИЯ, 386132, Магас, проспект Зязикова, 7
E-mail: magomet.sultygov@mail.ru

THE MULTIDIMENSIONAL ANALOG OF THE BIBERBACH HYPOTHESIS FOR GENERALIZED STAR FUNCTIONS IN THE SPACE \mathbb{C}^n , $n \geq 2$

Sultygov M. G.

The article is an addition to the fundamental results of the geometric theory of multidimensional complex analysis problems for classes of holomorphic functions. The radii parameterization of the Reinhardt region boundaries enables one to built effective sufficient conditions for the generalized star functions as a multivariate analogue of the Biberbach hypothesis.

Key words: univalent functions, multidimensional analogue of the Biberbach hypothesis, efficiency coefficients, Taylor series, radius parameterization.

УДК 517.98

СЖИМАЮЩИЕ ПРОЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Б. Б. Тасоев

В работе приведено описание структуры положительных сжимающих проекторов в пространствах Лебега $L_{p(\cdot)}$ с σ -конечной мерой и с существенно ограниченным переменным показателем $p(\cdot)$. Показано, что всякий положительный сжимающий проектор $P : L_{p(\cdot)} \rightarrow L_{p(\cdot)}$ допускает матричное представление, а ограничение P на полосу, порожденную слабой порядковой единицей своего образа, представляет собой взвешенный оператор условного ожидания. Попутно получено описание образа $\mathcal{R}(P)$ положительного сжимающего проектора P . Отметим, что в случае конечной меры при постоянном показателе существование слабой порядковой единицы в $\mathcal{R}(P)$ очевидно. В нашем же случае наличие слабой порядковой единицы в $\mathcal{R}(P)$ требует доказательства и мы строим ее конструктивно. Слабая порядковая единица в образе положительного сжимающего проектора играет ключевую роль в его представлении.

Ключевые слова: оператор условного ожидания, сжимающий проектор, пространство Лебега с переменным показателем, пространство Накано, σ -конечная мера.

1. Введение

Р. Г. Дуглас в своей работе [8] показал, что всякий сжимающий проектор в пространстве $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ с конечной мерой, который оставляет константы неподвижными, представляет собой оператор условного ожидания. Т. Андо в работе [4] обобщил этот результат на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ с конечной мерой. Посредством оператора условного ожидания П. Г. Доддс, Ч. Б. Хьюманс и Б. де Пахте в работе [7] привели полное описание положительных порядково непрерывных проекторов, действующих в идеальных подпространствах в $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ с конечной мерой. Пользуясь техникой банаховых решеток, Ю. А. Абрамович, К. Д. Алипрантис и О. Буркиншо в [2], для $p = 1$, и Ю. А. Абрамович и К. Д. Алипрантис в [3, § 5.3, 5.4], для $1 \leq p < \infty$, привели другое элегантное доказательство результатов Р. Г. Дугласа и Т. Андо. Д. Е. Уолберт в работе [9] показал, что всякий положительный сжимающий проектор в $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ с произвольной мерой есть оператор условного ожидания при условии, что сужение этого оператора на L_∞ также является сжимающим. С. Бернау и Е. Лейси в работе [5] показали, что если положительные сжимающие проекторы в L_p -пространствах с произвольной мерой ограничить на полосы, порожденными элементами из его образа, то эти ограничения описываются с помощью оператора условного ожидания.

В настоящей работе приводится описание структуры положительных сжимающих проекторов в $L_{p(\cdot)}$ -пространствах с σ -конечной мерой с переменным показателем $p(\cdot)$.

© 2017 Тасоев Б. Б.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339 ННИО_а.

Попутно мы получили описание образа этого проектора. Следует отметить, что во всех вышеперечисленных работах в случае конечной меры при постоянном показателе существование слабой порядковой единицы в образе положительного сжимающего проектора очевидно. В нашем же случае наличие единицы требует доказательства, и мы строим ее конструктивно. Слабая порядковая единица в образе положительного сжимающего проектора играет ключевую роль в его представлении.

2. Вспомогательные леммы и определения

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой, т. е. Ω — непустое множество, Σ — σ -алгебра подмножеств множества Ω , μ — полная мера на Σ , и существует возрастающая по включению последовательность $\{\Omega_n\} \subset \Sigma$ такая, что $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\mu(\Omega_n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для произвольного множества $A \in \Sigma$ символом $\mathbf{1}_A$ будем обозначать его характеристическую функцию.

Как обычно, символом $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ будем обозначать множество классов эквивалентности измеримых почти всюду конечных функций. Всюду далее функция $p(\cdot) \in L_{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$ такая, что $\mathbf{1}_{\Omega} \leq p(\cdot)$ почти всюду на Ω . Обозначим символом $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ множество всех функций $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, для которых $\int_{\Omega} |f(t)|^{p(t)} d\mu(t) < \infty$. В пространстве $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ введем норму $\|\cdot\|$ по формуле

$$\|f\| := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{f(t)}{\lambda} \right|^{p(t)} d\mu(t) \leq 1 \right\} \quad (f \in L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)).$$

Тогда $(L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu), \|\cdot\|)$ является банаховым пространством ввиду [6, Theorem 2.71]. Кроме того, из определения $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ видно, что оно идеальное подпространство в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Алгебраические и решеточные операции в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ осуществляются поточечно почти всюду.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Норма произвольной нормированной решетки $(E, \|\cdot\|)$ называется *строго монотонной*, если из соотношения $|x| < |y|$ следует $\|x\| < \|y\|$ для всех $x, y \in E$.

Лемма 1. *Норма в пространстве $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ строго монотонна и порядково непрерывна.*

◁ Доказательство порядковой непрерывности нормы в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ можно найти в [6, Theorem 2.62]. Покажем строгую монотонность нормы. Возьмем произвольные $f, g \in L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ такие, что $0 < |f| < |g|$. Предположим от противного, что $\|f\| \geq \|g\|$. Так как функция $p(\cdot)$ существенно ограничена, то в силу [6, Proposition 2.21] выполняются соотношения

$$1 = \int_{\Omega} \left(\frac{|f|}{\|f\|} \right)^{p(\cdot)} d\mu < \int_{\Omega} \left(\frac{|g|}{\|f\|} \right)^{p(\cdot)} d\mu \leq \int_{\Omega} \left(\frac{|g|}{\|g\|} \right)^{p(\cdot)} d\mu = 1.$$

Из полученного противоречия следует $\|f\| < \|g\|$. ▷

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $T : X \rightarrow Y$ между нормированными пространствами X, Y называется *сжимающим*, если его норма меньше единицы.

Всюду далее E — замкнутый по норме порядковый идеал в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $P : E \rightarrow E$ — положительный сжимающий проектор, т. е. $P^2 = P$, $Pf \geq 0$ для всех $f \geq 0$ и $\|P\| \leq 1$. Символом $\mathcal{R}(P) := \{P(f) : f \in E\}$ будем обозначать его образ. Напомним, что $f \in E$

называется *слабой порядковой единицей* пространства M , если $\text{supp } f = \text{supp } M$, где $\text{supp } M$ — носитель M (см. [1, глава 4, § 3]). Положим по определению

$$\Sigma_0 := \{A \in \Sigma : A = \text{supp } f, f \in \mathcal{R}(P), f \geq 0\},$$

т. е. система множеств Σ_0 состоит из носителей положительных функций, классы эквивалентности которых содержатся в $\mathcal{R}(P)$.

Лемма 2. *Пространство $\mathcal{R}(P)$ является порядково замкнутой банаховой подрешеткой в E со слабой порядковой единицей $e \in \mathcal{R}(P)$.*

◁ Ввиду того, что $P^2 = P$ и P — непрерывный оператор, пространство $\mathcal{R}(P)$ замкнуто по норме в E . Так как норма порядково непрерывна, $\mathcal{R}(P)$ — порядково замкнутое банахово пространство. Покажем, что $\mathcal{R}(P)$ — векторная решетка. Возьмем произвольный элемент $f \in \mathcal{R}(P)$. В силу положительности P верно неравенство $P(|f|) \geq |P(f)| = |f|$. Предположим, что $P(|f|) > |f|$. Тогда в силу строгой монотонности нормы (лемма 1) следует $\|P(|f|)\| > \|f\|$, что противоречит условию $\|P\| \leq 1$. Таким образом, $P(|f|) = |f|$ и $|f| \in \mathcal{R}(P)$. Тем самым, $\mathcal{R}(P)$ — порядково замкнутая банахова подрешетка. Чтобы показать существование слабой порядковой единицы положим по определению $M := \{\mathbf{1}_A : A \in \Sigma_0\} \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда существует $\text{sup } M \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и в силу [1, глава 1, § 6, теорема 17] найдется последовательность $(A_n) \subset \Sigma_0$ такая, что $\text{sup } M = \text{sup}\{\mathbf{1}_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Пусть $e := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\|f_n\|^{2^n}}$, где $f_n \in \mathcal{R}(P)$, $f_n \geq 0$, $A_n = \text{supp } f_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Так как $\mathcal{R}(P)$ замкнута по норме в E , то $e \in \mathcal{R}(P)$. Ясно, что $\text{supp } e = \text{supp } \mathcal{R}(P)$. Следовательно, e — слабая порядковая единица в $\mathcal{R}(P)$. ▷

Лемма 3. *Пусть e из леммы 2. Система множеств Σ_0 является σ -подкольцом в Σ с единицей $\Omega_0 := \text{supp } e$.*

◁ В силу леммы 2 $\mathcal{R}(P)$ содержит слабую порядковую единицу e . Следовательно, $\Omega_0 = \text{supp } e$ будет единицей системы Σ_0 .

Возьмем произвольную последовательность $(A_n) \subset \Sigma_0$. Тогда $A_n = \text{supp } f_n$, где $f_n \in \mathcal{R}(P)$, $f_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Положим по определению $f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\|f_n\|^{2^n}}$. В силу леммы 2 $f \in \mathcal{R}(P)$. Ясно, что $\text{supp } f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_0$.

Возьмем произвольные $A, B \in \Sigma_0$ и покажем что их разность $A \setminus B \in \Sigma_0$. Пусть $0 \leq f, g \in \mathcal{R}(P)$ такие, что $A = \text{supp } f$ и $B = \text{supp } g$. Положим по определению $f_n := (f - ng) \vee 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу леммы 2 последовательность (f_n) содержится в $\mathcal{R}(P)$. Так как (f_n) порядково сходится к функции $\mathbf{1}_{A \setminus B} f \in E$, то по той же лемме 2 $\mathbf{1}_{A \setminus B} f \in \mathcal{R}(P)$. Ясно, что $\text{supp } \mathbf{1}_{A \setminus B} f = A \setminus B$. Следовательно, $A \setminus B \in \Sigma_0$. ▷

Символом $\{e\}^{\perp\perp}$ мы будем обозначать полосу в E , порожденную элементом $e \in E$.

Лемма 4. *Пусть e из леммы 2. Справедливо равенство $P(\mathbf{1}_A f) = \mathbf{1}_A P(f)$ для всех $A \in \Sigma_0$ и $f \in \{e\}^{\perp\perp}$.*

◁ Пусть $0 \leq f \in \{e\}^{\perp\perp}$ и $A \in \Sigma_0$. Тогда $f \wedge ne \uparrow_n f$. Следовательно, в силу линейности и порядковой непрерывности оператора P достаточно доказать лемму для всех $0 \leq f \leq e$. Итак, пусть $0 \leq f \leq e$. Возьмем $h \in \mathcal{R}(P)$ такой, что $A = \text{supp } h$. Тогда $e \wedge nh \uparrow_n \mathbf{1}_A e$ и ввиду того, что $\mathcal{R}(P)$ — порядково замкнутая подрешетка (лемма 2), следует $\mathbf{1}_A e \in \mathcal{R}(P)$.

В силу положительности оператора P выполняются неравенства $0 \leq P(\mathbf{1}_A f) \leq P(f)$ и $0 \leq P(\mathbf{1}_A f) \leq P(\mathbf{1}_A e) = \mathbf{1}_A e$. Следовательно, ввиду соотношения $A \subset \text{supp } e$ получим $\text{supp } P(\mathbf{1}_A f) \subset A$ и $P(\mathbf{1}_A f) \leq \mathbf{1}_A P(f)$.

В рассуждениях выше вместо f подставим $e - f$. Тогда справедливы соотношения $\mathbf{1}_A e - P(\mathbf{1}_A f) = P(\mathbf{1}_A (e - f)) \leq \mathbf{1}_A P(e - f) = \mathbf{1}_A P(e) - \mathbf{1}_A P(f)$. Следовательно, $P(\mathbf{1}_A f) \geq \mathbf{1}_A P(f)$. Таким образом, $P(\mathbf{1}_A f) = \mathbf{1}_A P(f)$. ▷

Возьмем порядковую единицу $e \in \mathcal{R}(P)$ (лемма 2) и положим по определению

$$F := e^{-1}\mathcal{R}(P) := \{e^{-1}f : f \in \mathcal{R}(P)\},$$

где функция $e^{-1}f$ определяется формулой

$$e^{-1}f(t) := \begin{cases} \frac{f(t)}{e(t)}, & t \in \operatorname{supp} e, \\ 0, & t \in \Omega \setminus \operatorname{supp} e. \end{cases}$$

Ясно, что F — векторная подрешетка в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ с носителем $\Omega_0 := \operatorname{supp} e$. Обозначим ограничение всех функций из F на Ω_0 через $F|_{\Omega_0}$. Тогда отображение $f \mapsto e^{-1}f$ является решеточным изоморфизмом из $\mathcal{R}(P)$ на $F|_{\Omega_0}$.

Лемма 5. Все функции из $F|_{\Omega_0}$ Σ_0 -измеримы, символически, $F|_{\Omega_0} \subset L_0(\Omega_0, \Sigma_0, \mu)$.

◁ Возьмем произвольную положительную функцию $f \in F$. Тогда существует положительная функция $g \in \mathcal{R}(P)$ такая, что $f = e^{-1}g$. Возьмем произвольное число $\alpha \geq 0$. В силу того, что $\mathcal{R}(P)$ — векторная решетка, $e, g \in \mathcal{R}(P)$ и $\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} e$, выполняются равенства $\{t \in \Omega : f(t) > \alpha\} = \{t \in \Omega : e^{-1}(t)g(t) > \alpha\} = \{t \in \Omega : g(t) > \alpha e(t)\} = \{t \in \Omega : g(t) \vee \alpha e(t) - \alpha e(t) > 0\} = \operatorname{supp}(g \vee \alpha e - \alpha e) \in \Sigma_0$. ▷

3. Основной результат

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой и Σ_0 — некоторое σ -подкольцо в Σ с единицей Ω_0 . Функция $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ называется Σ_0 -измеримой, если $\operatorname{supp} f \subset \Omega_0$ и ее ограничение $f|_{\Omega_0}$ на Ω_0 Σ_0 -измеримо.

Все Σ_0 -измеримые функции из $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ будем обозначать символом $L_0(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. В частности, $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma_0, \mu) := L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L_0(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. Ясно, что $L_0(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ подалгебра в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Пусть $0 < e \in L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ и Σ_0 — некоторое σ -подкольцо в Σ с единицей $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$. Так как $1 \leq p(\cdot) \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, то в силу [6, Proposition 2.12] $e^{p(\cdot)} \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Введем конечную меру $e^{p(\cdot)}\mu$ по формуле $e^{p(\cdot)}\mu(A) := \int_A e^{p(\cdot)} d\mu$ для всех $A \in \Sigma$. Возьмем произвольную функцию $h \in L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ и положим по определению $\lambda(A) := \int_A h e^{p(\cdot)} d\mu$ для всех $A \in \Sigma_0$. Тогда $\lambda : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — конечная мера, и по теореме Радона — Никодима существует единственная функция $\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0) \in L_1(\Omega_0, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$ такая, что

$$\int_A h e^{p(\cdot)} d\mu = \int_A \mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0) e^{p(\cdot)} d\mu \quad (1)$$

для всех $A \in \Sigma_0$. Продолжим функцию $\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$ на Ω , полагая $\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)(t) = 0$ для всех $t \in \Omega \setminus \Omega_0$, и обозначим это продолжение снова через $\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$. Тогда в силу определения 2 $\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$ — единственный элемент из $L_1(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$, удовлетворяющий соотношению (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Отображение $\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(\cdot|\Sigma_0) : h \mapsto \mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$ из $L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ в $L_1(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$, определяемое соотношением (1), называется *оператором условного ожидания* для меры $e^{p(\cdot)}\mu$ относительно σ -кольца Σ_0 с единицей Ω_0 .

Лемма 6. Оператор условного ожидания $\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(\cdot|\Sigma_0) : L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu) \rightarrow L_1(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$ является линейным положительным порядково непрерывным проектором с нормой меньше единицы.

◁ Доказательство леммы легко следует из теоремы Радона — Никодима и определения оператора $\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(\cdot|\Sigma_0)$. ▷

Теорема 1. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой, E — замкнутый по норме порядковый идеал в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $P : E \rightarrow E$ — положительный сжимающий проектор. Тогда существуют $0 < e \in \mathcal{R}(P)$, σ -подкольцо Σ_0 в Σ с единицей $\Omega_0 := \text{supp } e$ и единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такие, что $\text{supp } \mathcal{R}(P) = \Omega_0$, $\text{supp } w \subset \text{supp } \Omega_0$ и справедливо представление $P(f) = e\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0)$ для всех $f \in \{e\}^{\perp\perp} \subset E$.

◁ Пусть e , $\Omega_0 = \text{supp } e$ и Σ_0 из лемм 2 и 3. В силу леммы 5 функция $e^{-1}P(f) \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ Σ_0 -измерима для всех $f \in E$, в частности, для $f \in \{e\}^{\perp\perp}$. Осталось доказать представление

$$\int_A e^{-1}P(f)e^{p(\cdot)}d\mu = \int_A e^{-1}wfe^{p(\cdot)}d\mu$$

для всех $f \in \{e\}^{\perp\perp}$ и $A \in \Sigma_0$.

Положим по определению $M := \{e^{-1}f : f \in \{e\}^{\perp\perp}\}$. Тогда M — порядковый идеал в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Более того, так как мера $e^{p(\cdot)}\mu$ конечна, то ввиду [6, Corollary 2.48] справедливы включения $M \subset L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu) \subset L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$. Введем оператор $T : M \rightarrow M$ по формуле $T(g) := e^{-1}P(eg)$ для всех $g \in M$. Тогда T — положительный порядково непрерывный оператор в M . С помощью оператора T определим порядково непрерывный функционал $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $\Phi(g) := \int_\Omega T(g)e^{p(\cdot)}d\mu$ для всех $g \in M$. В силу [3, Theorem 5.26] существует единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такая, что $\text{supp } w \subset \text{supp } e = \text{supp } \Omega_0$ и $\int_\Omega T(g)e^{p(\cdot)}d\mu = \Phi(g) = \int_\Omega wge^{p(\cdot)}d\mu$ для всех $g \in M$. Следовательно, полагая $g := e^{-1}f$, в силу леммы 4 справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int_A e^{-1}P(f)e^{p(\cdot)}d\mu &= \int_\Omega \mathbf{1}_A e^{-1}P(f)e^{p(\cdot)}d\mu = \int_\Omega e^{-1}P(\mathbf{1}_A f)e^{p(\cdot)}d\mu \\ &= \int_\Omega T(\mathbf{1}_A g)e^{p(\cdot)}d\mu = \int_\Omega w\mathbf{1}_A ge^{p(\cdot)}d\mu = \int_A e^{-1}wfe^{p(\cdot)}d\mu \end{aligned}$$

для всех $f \in \{e\}^{\perp\perp}$ и $A \in \Sigma_0$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в теореме 1 мера μ конечна, показатель $1 \leq p(\cdot) < \infty$ есть константа и $P(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — тождественная единица на Ω , то полагая $e = \mathbf{1}$, мы получим результат типа Дугласа — Андо [3, Corollary 5.52, 5.53], [7, Proposition 3.3]. В случае, когда μ σ -конечна, то из упомянутой теоремы следует результат Бернау и Лейси [5, Theorem 3.4].

Следствие 1. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой, E — замкнутый по норме порядковый идеал в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $P : E \rightarrow E$ — положительный сжимающий проектор. Тогда существуют замкнутые идеальные подпространства E_1, E_2 в E и положительные сжимающие операторы $P_{11} : E_1 \rightarrow E_1$ и $P_{12} : E_2 \rightarrow E_1$ такие, что $E = E_1 \oplus E_2$, $P_{11}P_{12} = P_{12}$, $P_{11}^2 = P_{11}$, и оператор P имеет матричное представление

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, существуют $0 < e \in \mathcal{R}(P)$, σ -подкольцо Σ_0 в Σ с единицей $\Omega_0 = \text{supp } e$ и единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такие, что $\text{supp } \mathcal{R}(P) = \Omega_0$, $\text{supp } w = \Omega_0$, и имеет место представление $P_{11}(f) = e\mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0)$ для всех $f \in E_1$.

◁ В силу теоремы 1 существуют $0 < e \in \mathcal{R}(P)$, σ -подкольцо Σ_0 в Σ с единицей $\Omega_0 = \text{supp } e$ и единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такие, что $\text{supp } \mathcal{R}(P) = \Omega_0$, $\text{supp } \mathcal{R}(P) = \Omega_0$, и справедливо представление

$$P(f) = e \mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0) \quad (2)$$

для всех $f \in \{e\}^{\perp\perp}$. Положим в качестве $E_1 := \mathbf{1}_{\Omega_0}E = \{e\}^{\perp\perp}$ и $E_2 := \mathbf{1}_{\Omega \setminus \Omega_0}E = \{e\}^\perp$. Введем операторы $P_{11} : E_1 \rightarrow E_1$ и $P_{12} : E_2 \rightarrow E_1$ по формулам $P_{11}(f) := P(f)$ для всех $f \in E_1$ и $P_{12}(g) := P(g)$ для всех $g \in E_2$. Ясно, что $P_{11}^2 = P_{11}$. Так как $\mathcal{R}(P_{12}) \subset \mathcal{R}(P) \subset \{e\}^{\perp\perp} = E_1$, то $P_{11}P_{12} = P_{12}$. Очевидно, что $E = E_1 \oplus E_2$, и P_1, P_2 — положительные операторы с нормами меньше единицы. Ограничение оператора P на E_1 есть P_{11} . Следовательно, в силу (2) выполняются равенства $P_{11}(f) = P(f) = e \mathcal{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0)$ для всех $f \in E_1$. ▷

В заключение рассмотрим вопрос об описании образа положительного сжимающего проектора P , действующего в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Предложение 1. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой, P — положительный сжимающий проектор, действующий в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда существуют функция $0 < e \in \mathcal{R}(P)$ и σ -подкольцо Σ_0 с единицей $\Omega_0 = \text{supp } e$ такие, что выполняется равенство $\mathcal{R}(P) = e \cdot L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$.

◁ Ввиду лемм 2 и 3 возьмем порядковую единицу $0 < e \in \mathcal{R}(P)$ и σ -подкольцо Σ_0 с единицей $\Omega_0 = \text{supp } e$. Рассмотрим пространство $L_{p(\cdot)}(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$, где мера μ_0 есть сужение меры $e^{p(\cdot)}\mu$ на Σ_0 , а под функцией $p(\cdot)$ мы подразумеваем ее сужение на Ω_0 . Ввиду леммы 5 для доказательства нашего утверждения достаточно установить, что $(e^{-1}\mathcal{R}(P))|_{\Omega_0} = L_{p(\cdot)}(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$, где $(e^{-1}\mathcal{R}(P))|_{\Omega_0}$ обозначает сужение всех функций из $e^{-1}\mathcal{R}(P)$ на Ω_0 . В силу леммы 4 множество $(e^{-1}\mathcal{R}(P))|_{\Omega_0}$ содержит все характеристические функции множеств из Σ_0 . Так как $(e^{-1}\mathcal{R}(P))|_{\Omega_0}$ является порядково замкнутой подрешеткой в $L_{p(\cdot)}(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$, то в силу спектральной теоремы Фрейденталя следует справедливость утверждения. ▷

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004.—812 с.
2. Abramovich Y. A., Aliprantis C. D., O. Burkinshaw O. An elementary proof of Douglas theorem on contractive projections on L_1 spaces // J. Math. Anal. Appl.—1993.—Vol. 177.—P. 641–644.
3. Abramovich Y. A., Aliprantis C. D. An Invitation to Operator Theory.—Providence., R.I.: Amer. Math. Soc., 2002.—(Graduate Stud. in Math., 50).
4. Ando T. Contractive projections in L_p spaces // Pacific J. Math.—1966.—Vol. 17.—P. 391–405.
5. Bernau S. J., Lacey E. H. The range of contractive projection on an L_p space // Pacific J. Math.—1974.—Vol. 53, № 1.—P. 21–41.
6. Cruz-Uribe D. V., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces.—Springer, 2013.
7. Dodds P. G., Huijsmans C. B., de Pagter B. Characterizations of conditional expectation-type operators // Pacific J. Math.—1990.—Vol. 141, № 1.—P. 55–77.
8. Douglas R. G. Contractive projections on an L_1 space // Pacific J. Math.—1965.—Vol. 15, № 2.—P. 443–462.
9. Wulbert D. E. A note on the characterization of conditional expectation operators // Pacific J. Math.—1970.—Vol. 34, № 1.—P. 285–288.

Статья поступила 25 августа 2016 г.

ТАСОЕВ БАТРАДЗ БОТАЗОВИЧ
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: tasoebatradz@yandex.ru

CONTRACTIVE PROJECTIONS IN VARIABLE LEBESGUE SPACES

Tasoev B. B.

In this article we describe the structure of positive contractive projections in variable Lebesgue spaces $L_{p(\cdot)}$ with σ -finite measure and essentially bounded exponent function $p(\cdot)$. It is shown that every positive contractive projection $P : L_{p(\cdot)} \rightarrow L_{p(\cdot)}$ admits a matrix representation, and the restriction of P on the band, generated by a weak order unite of its image, is weighted conditional expectation operator. Simultaneously we get a description of the image $\mathcal{R}(P)$ of the positive contractive projection P . Note that if measure is finite and exponent function $p(\cdot)$ is constant, then the existence of a weak order unit in $\mathcal{R}(P)$ is obvious. In our case, the existence of the weak order unit in $\mathcal{R}(P)$ is not evident and we build it in a constructive manner. The weak order unit in the image of positive contractive projection plays a key role in its representation.

Key words: conditional expectation operator, contractive projection, variable Lebesgue space, Nakano space, σ -finite measure.

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов (≈ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взимается.

Авторские права на журнал в целом принадлежат Южному математическому институту — филиалу ВНЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на журнал.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

Телефон: (8672) 53-84-62;

E-MAIL: rio@smath.ru

Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 19

Выпуск 1

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 16.03.2017. Дата выхода в свет 27.03.2017.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/8}$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 9,30. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт — филиал
Федерального государственного бюджетного
учреждения науки Федерального научного центра
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.