Cofman, Judita:

Einblicke in die Geschichte der Mathematik

Aufgaben und Materialien für die Sekundarstufe I

Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag, 1999. – 326 S.
ISBN 3-82740391-X

Stefan Deschauer, Dresden

1. Zielsetzung und Konzeption

In ihrem Vorwort (S. IX) schreibt die Autorin:

> "Ein wichtiges Bestreben des modernen Mathematikunterrichts ist, Einblicke in die Geschichte der Mathematik zu gewähren. Diese sollen das Verständnis für das Fach Mathematik stärken und zur Allgemeinbildung beitragen. In der Unterrichtspraxis stößt man hierbei jedoch auf diverse Hindernisse. Eine der größten Schwierigkeiten ist der Mangel an Literatur, die Einzelheiten aus der Geschichte der Mathematik darstellt, angepaßt an Alter, Vorkenntnisse und Interessen der Schüler. Ein weiteres Problem besteht darin, Betrachtungen aus der Geschichte der Mathematik so in den Unterricht einzufügen, daß dabei wichtige Lehrziele, wie zum Beispiel die Förderung der Kreativität beim entdeckenden Lernen, nicht beeinträchtigt werden."

Den genannten Schwierigkeiten will sie mit der hier vorgelegten umfangreichen Aufgabensammlung aus der Mathematikgeschichte begegnen. Mithilfe solcher Probleme könne man auch darauf abzielen, die Kompetenz der Schüler beim Aufgabenlösen zu steigern. Dazu verweist Frau Cofman auf ihre langjährige Arbeit mit 10–19-jährigen Gymnasiasten im Unterricht, in Schülerzirkeln (mathematischen Arbeitsgemeinschaften) und in Ferienlagern. Ihrer Erfahrung nach empfiehlt es sich dabei, die Schüler in behutsam differenzierter Form in die Mathematikgeschichte einzuführen: von der Schilderung einzelner Ergebnisse und Beweismethoden der Antike bei 10–12-jährigen über die Bearbeitung vielfältiger historischer Probleme der Elementarmathematik bei 13–16-jährigen bis hin zur Begegnung mit Themen aus der Ideengeschichte bei 16–19-jährigen Schülern.

Das Buch gliedert sich in 3 Teile.

Teil I: Aufgaben mit Bemerkungen zur Geschichte der Mathematik (95 S.) beinhaltet sieben, zum Teil noch in Unterparagraphen gegliederte Kapitel mit insgesamt 118 historisch kommentierten Aufgaben. Im einzelnen handelt es sich um folgende Kapitel:

– Aufgaben über natürliche Zahlen
– Aufgaben über Brüche
– Aufgaben über irrationale Zahlen
– Lineare und quadratische Gleichungen
– Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken
– Aufgaben über regelmäßige Vielecke und Polyeder
– Aufgaben im Zusammenhang mit berühmten Problemen aus der Geschichte der Mathematik.

Bei den mathematikhistorischen Bemerkungen zu den für junge Schüler vorgesehenen Aufgaben der ersten beiden Kapitel hat sich die Autorin bewusst kurz gefasst. Es ging ihr darum, "beim Aufgabenlösen mit ein paar Sätzen darauf hinzudeuten, daß Mathematik ein bedeutender Teil unseres Kulturerbes ist" (S. X). Bei der Mehrzahl der übrigen Aufgaben sind die historischen Hinweise ausführlicher. Für die Lösung werden mittelstufenübliche Kenntnisse aus der elementaren Algebra, der Geometrie und der Trigonometrie erwartet.

Teil II: Lösungen ist mit 182 Seiten besonders umfangreich. Es werden alle Aufgaben behandelt und an manchen Stellen (weiterführende) mathematikhistorische Bemerkungen angefügt.

Teil III: Zusätzliche Bemerkungen aus der Geschichte der Mathematik (46 S.) ist zum Aufbau eines nützlichen mathematikhistorischen Hintergrundwissens für den Lehrer gedacht, der bei seiner unterrichtlichen Arbeit entsprechende Aufgaben behandelt. Wie Teil II auch orientiert sich dieser Teil an der Kapitel- und Paragraphengliederung von Teil I, jedoch fehlen Bemerkungen zu §§ 7.5, 7.6.

Ein Personen- und Sachverzeichnis fehlt, ein kurzes Literaturverzeichnis (19 Titel) ist beigegeben.

2. Diskussion ausgewählter Aspekte

2.1 Zielsetzung

Dass die Behandlung von Aufgaben mit mathematikhistorischer Verankerung im Unterricht *eine* vielversprechende Möglichkeit darstellt, historische Fakten zu vermitteln sowie ein besseres Verständnis für die kulturwissenschaftlichen Aspekte der Mathematik anzubahnen, erscheint mir nicht zweifelhaft. (Vgl. Kronfellner 1998, S. 49 f.) Die derzeitigen unterrichtlichen Rahmenbedingungen (Lehrplan, Stundentafel) sind hierfür aber oft noch nicht flexibel genug. Andererseits bedarf es zur Kompetenzsteigerung beim Aufgabenlösen nicht unbedingt historischer Probleme.

2.2 Aufgabenteil

Die Autorin präsentiert hier eine wirklich beeindruckende Fülle von Aufgaben aus der Geschichte der Mathematik. In jedem Kapitel bzw. Paragraphen ist sie – zumindest tendenziell – darauf bedacht, eine Reihung vom Leichteren zum Schwierigeren anzustreben. Die Lösung schwierigerer Probleme (z. B. Nr. 53, Satz von Menelaos) wird häufig geschickt durch gestufte Teilaufgaben oder, wie z. B. bei Nr. 107, dem Satz von Bólyai-Gerwien (Zwei beliebige flächengleiche Polygone sind zerlegungsgleich), durch eine ganze Aufgabenserie (Nr. 104–106) vorbereitet.

Wie sich aus den beiden Beispielen schon vermuten lässt, ist die Aufgabensammlung in der Tat recht anspruchsvoll. Ich habe nur 22 (von 118) Aufgaben gezählt, die dem normalen oder leicht erweiterten Unterrichtsstoff der Sekundarstufe I entstammen. Darüber hinaus gibt es nur etwa 11 historische "Denksportaufgaben" und nur 1 echte Anwendungsaufgabe (Nr. 25, Eulers Berechnung des julianischen und des gregorianischen Kalenders mithilfe von Kettenbrüchen). Aufgaben aus dem früheren täglichen Leben fehlen fast völlig. Auch wenn eine solch grobe Einteilung, die sicher auch keine Klassifikation ist, angreifbar erscheint, zeigt sie doch zumindest eine Tendenz auf: Schüler, die die Cofmanschen Aufgaben bewältigen wollen, müssen schon von Haus aus eine hohe Motivation für Mathematik und eine eher sehr gute als gute Begabung mitbringen. Der Normalschüler der Sekundarstufe I dürfte mit diesen Aufgaben eher nicht erreicht werden; er ist auf andere Wege angewiesen, die ihm Einblick in die historisch gewachsene Kulturwissenschaft Mathematik vermitteln.

Zur Illustration möchte ich aus vielen Beispielen nur eins auswählen, das auf Euler zurückgeht (Nr. 46): "Man suche eine Zahl N, die durch 39 dividiert 16 und durch 56 dividiert 27 übrigläßt." Ja, wozu soll man eine solche Zahl suchen? (Motivationsproblem) Wenn sich aber der "normale" Schüler wirklich für eine solche Frage interessiert, wird er mit der Lösung zu kämpfen haben (vgl. den Lösungsteil).

Ich denke hingegen, dass Aufgaben aus dieser Sammlung in mathematischen Schülerzirkeln und Ferienlagern, die die Autorin ja im Vorwort schon erwähnt hat, sehr gewinnbringend eingesetzt werden können.

2.3 Lösungsteil

Der Lösungsteil, das ungeliebte und vernachlässigte Kind manch anderen Autors von Problemsammlungen ("wie man leicht sieht, ..."; "Der Rest sei dem Leser überlassen") ist zweifellos ein Glanzstück dieses Buches. Zu jeder Aufgabe wird die Lösung ausführlich, verständlich und fast überall vollständig dargestellt. Deshalb kann nicht verwundern, dass der Lösungsteil fast doppelt so umfangreich wie der Aufgabenteil ist.

Auf S. 139 wird behauptet, dass Thales "seinen" Satz bewiesen habe, der deshalb nach ihm benannt sei. Dagegen ist einzuwenden, dass der Beweis des Satzes in der Antike Thales (nur) zugeschrieben wurde und die Bezeichnung "Satz des Thales" erst im 19. Jahrhundert auftrat.

S. 143: Zumindest der doppelte falsche Ansatz findet sich noch im 17. Jahrhundert in manchen kaufmännischen Rechenbüchern. In iterierter Form dient er in der Analysis bekanntlich zur Nullstellenbestimmung von Funktionen.

2.4 Kommentarteil

Auf nur 46 Seiten versucht die Autorin, wichtige Entwicklungslinien zu fast allen die Aufgabensammlung betreffenden mathematikhistorischen Aspekten nachzuzeichnen. Diese "Handreichung" für ein angemessenes Hintergrundwissen des Lehrers ist ihr trotz der Kürze des Textes überraschend gut gelungen. Eine solche Einschätzung schmälern die folgenden inhaltlichen Bemerkungen nur unwesentlich.

S. 279 f.: Die Bedeutung des (trivial wirkenden) Ferrers-Diagramms wird nicht hinreichend deutlich gemacht.

S. 281: Leibnizens *Numero deus impari gaudet* heißt wörtlich: Gott freut sich an der ungeraden Zahl. (Singular!)

S. 283: Es fehlt die Bemerkung, dass auch das Wilson-Kriterium – ebenso wie das von Leibniz (S. 284, hier ist n durch p zu ersetzen) – notwendig und hinreichend ist.

S. 286: Das chinesische Werk heißt Tschiu Tschang Suan Shu.

S. 288: Die Ägypter hatten keinen einheitlichen Algorithmus zur Zerlegung von Brüchen in Stammbrüche (vgl. Vogel 1982, 1988). In der berühmten $2{:}n$ - Tabelle des Papyrus Rhind wird das Prinzip der minimalen Stammbruchzahl nur bei einigen Brüchen angewandt, bei anderen wieder nicht. Die ägyptischen Zerlegungskriterien sind bis heute nicht restlos geklärt.

S. 291 f.: Im Zusammenhang mit Stifel wäre noch zu ergänzen, dass die deutschen Cossisten (15.–16. Jahrhundert) die irrationalen Zahlen *surdische* Zahlen nannten (von lat. *surdus* = taub, stumm – vgl. unser Fremdwort *absurd*).

S. 294: Vogel (1958, S. 55 f.) und Tropfke (1980, S. 367, S. 385) weisen darauf hin, dass die Ägypter die vorliegende Aufgabe Nr. 24 aus dem Papyrus Rhind sehr wahrscheinlich anders als mit dem einfachen falschen Ansatz gelöst haben. Die alternative Lösungsmethode lässt sich leicht rekonstruieren und gut begründen.

S. 298 f.: Es fehlt ein Hinweis auf die Leistung der deutschen Cossisten (vor allem Regiomontan, Widman, Grammateus, Rudolff, Ries, Stifel und Scheubel) bei der Symbolisierung der algebraischen Schreibweise.

S. 300 f.: λεῖψις (leîpsis) ist ein nachklassisches Wort und bedeutet Mangel (nicht: Makel!). Damit drückt Diophant die "Mangelzahlen", also die negativen Zahlen aus. Das klassische Wort für Mangel, ἔλλειψις (élleipsis), war ja bereits für die Geometrie besetzt. Die Konstanten bezeichnete Diophant mit $\overset{\circ}{M}$ (von Μονάς = Monás, Einheit). Das Symbol für die 1. Potenz der Variablen (ς) ähnelt bei Diophant dem Schluss-s des Wortes ἀριθμός (arithmós) für diese 1. Potenz. Keinesfalls hat er für die Variable die Zahlbezeichnungen ζ (=7) oder ϱ (=100) verwendet. Außerdem findet man für "x^2" und "x^3" die Verbalformen Δύναμις (Dýnamis) bzw. Κύβος

(Kýbos) sowie die daraus abgeleiteten Symbole Δ^Y bzw. K^Y. Entsprechend muss für die Bezeichnung der höheren Potenzen jeweils ein hochgestelltes großes Y (kein ν) verwendet werden. (Vgl. Diophant 1974, S. 4–7.) Der nachfolgende Text im Buch könnte zu dem Missverständnis führen, dass Diophants Werk die Grundlage für die weitere Entwicklung der symbolischen Algebra (bis hin zum relativen Abschluss durch Viète) geliefert hätte. Dem war aber nicht so: Das Genie war seiner Zeit weit voraus; die Gelehrten der nachfolgenden Generationen waren nicht in der Lage, die Ideen des Alexandriners weiterzuführen, so dass die symbolische Algebra "buchstäblich" neu erfunden werden musste. Hier hätte man noch einmal – vor Viète – auf die deutschen Cossisten hinweisen sollen.

S. 303 – ein Schreibversehen: Die Mittelsenkrechten der Seiten eines beliebigen Dreiecks sind kopunktal (nicht: kongruent).

S. 307: Bis zur großen Entdeckung von Gauß glaubte man, dass die bereits in der Antike bekannten Konstruktionen von regelmäßigen Vielecken mit Zirkel und Lineal nicht mehr erweitert werden könnten. Die Autorin gibt zu diesen Konstruktionen ein Kriterium an, das den Fall "Eckenzahl = Zweierpotenz (≥ 4)" vernachlässigt.

S. 313–315: Die Ausführungen zur algebraischen Lösung der Frage, welche Konstruktionen mit Zirkel und Lineal möglich sind, scheinen mir in dieser Kürze nur für den verständlich zu sein, der mit dieser Theorie schon einigermaßen vertraut ist.

S. 318: Der Papyrus Rhind wird üblicherweise nicht um 1650 v. Chr., sondern vorsichtiger ins 16. Jh. v. Chr. datiert. Die archimedische Methode zur Bestimmung von π ist vor allem unter der Bezeichnung Exhaustionsmethode bekannt.

S. 319: Der indische Mathematiker Brahmagupta, der im 7. Jh. wirkte, ist um 598 geboren. Die bloße Klammer (um 598) nach dem Namen kann den Leser irritieren.

S. 321: Im vorletzten Absatz ist bei der Quadratur des Kreises von der Konstruktion der gesuchten Würfelkante (statt der gesuchten Quadratseite) die Rede.

S. 322: Die Suche nach neuen Rekorden bezüglich der Stellenzahl von π hat auch eine besondere Bedeutung für Leistungsfähigkeitstests von Rechnern und Programmen.

Noch ein Wort zu den Namen griechischer Autoren im Deutschen: Im Buch werden neben den nicht-latinisierten Formen Eudoxos (S. 291), Eutokios (S. 315), Heron (S. 302), Leon (S. 312), Menaichmos (S. 315), Menelaos (S. 42), Pappos (S. 309), Platon (S. 311), Proklos (S. 305), Ptolemaios (S. 291) und Theodoros (S. 290) auch die latinisierten Formen Apollonius (S. 309), Dinostratus (S. 321), Menaechmus (S. 321) und Plato (S. 218) verwendet. Außer den beiden letztgenannten tritt auch der Name von Theaitetos/Theaetet(us) in beiden Versionen auf, leider aber jedesmal verdruckt (S. 309, S. 218). Hier sollte unbedingt vereinheitlicht werden, wobei die Historiographen heute wieder überwiegend der nicht-latinisierten Form den Vorzug geben. Sehr häufig kommen im Buch auch die "Pythagoräer" vor: Die Schreibweise wäre richtig, wenn sie sich von Pythagóraios herleiten würde. Das griechische Wort lautet aber Pythagóreios, so dass sich "Pythagoreer" eingebürgert hat. (Ganz korrekt wären die "Pythagorier".)

2.5 Literatur

Das Literaturverzeichnis ist mit 19 Titeln ziemlich knapp ausgefallen. Zudem wird es von einigen unnötigen Druckfehlern verunziert, und bei den Titeln 13, 15 und 16 fehlen Verlagsangabe, Erscheinungsjahr oder beides. Man vermisst eine Reihe von einschlägigen Standardwerken, die für das Thema von Bedeutung sind, so das Lexikon von Gottwald u. a. (1990), Juschkewitsch (1964) und die wichtigen Aufgabensammlungen von Pieper (1988) und Konforowitsch (1996). Aus der "didaktischen Ecke" – das Werk von Kronfellner (1998) ist wohl erst nach Abschluss des Buchmanuskripts erschienen – wäre vor allem das Buch von Winter (1991) zu nennen, der hier entdeckendes Lernen sehr überzeugend in fruchtbare historische Bezüge einbettet.

Es sei noch angemerkt, dass man dem Leser mit der Erstellung eines Namens- und Sachregisters eine wertvolle Hilfe zur Benutzung des Buches hätte anbieten können.

2.6 Formales

Die Kursivsetzung von Variablen, Termen und Formeln (nach den üblichen Vorschriften) verbessert m. E. die Lesbarkeit und kann gegebenenfalls im laufenden Text auch Missverständnisse vermeiden helfen. (Vgl. S. 281 unten: "Wenn ... p die Zahl ab teilt ...") Bei einer Neuauflage könnten aber auch Satzfehler korrigiert werden, wie etwa die nicht seltenen Leerräume vor Trennungsstrichen oder beiderseits von Bindestrichen.

3. Fazit

Frau Cofman hat zweifellos ein wichtiges und für die Förderung der mathematisch interessierten und begabten Jugend wertvolles Buch vorgelegt, das weit über eine reine Aufgabensammlung hinausgeht. Der Aufgaben- und der Lösungsteil sind als vorbildlich zu bezeichnen, der Kommentarteil könnte in der oben aufgezeigten Weise noch optimiert werden. Auch Lehrer werden großen Gewinn aus diesem Werk ziehen und sollten es zumindest für ihre Schulbücherei bestellen. Allerdings bin ich skeptisch, was die Einsatzmöglichkeit dieser Aufgaben im Normalalltag der Sekundarstufe I angeht. Eine Sammlung von mathematischen Aufgaben aus dem "früheren täglichen Leben" wäre jedenfalls eine geradezu ideale Ergänzung zu diesem schönen Buch.

4. Literatur

Diophant (1974): Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis, Vol I. Ed. P. Tannery. – Stuttgart: B. G. Teubner

Gericke, H. (1984): Mathematik in Antike und Orient. – Berlin/Heidelberg: Springer

Gottwald, S.; Ilgauds, H.-J.; Schlote, K.-H. (Hg., 1990): Lexikon bedeutender Mathematiker. – Leipzig: Bibliographisches Institut

Juschkewitsch, A. P. (1964): Geschichte der Mathematik im Mittelalter. – Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Konforowitsch, A. G. (1996): Guten Tag, Herr Archimedes. 227 unterhaltsame Mathematikaufgaben vom Altertum bis zur Gegenwart. – Frankfurt a. M.: Harri Deutsch

Kronfellner, M. (1998): Historische Aspekte im Mathematikunterricht – eine didaktische Analyse mit unterrichtsspezifischen Beispielen. – Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

Pieper, H. (1988): Heureka – Ich hab´s gefunden. 55 historische Aufgaben der Elementarmathematik mit Lösungen. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Tropfke, J. (1980): Geschichte der Elementarmathematik Band 1 – Arithmetik und Algebra (neu bearbeitet v. K. Vogel, K. Reich, H. Gericke). – Berlin/New York: Walter de Gruyter
Vogel, K. (1958): Vorgriechische Mathematik, Teil 1 – Vorgeschichte und Ägypten. – Hannover/Paderborn: Schroedel/Schöningh
Vogel, K. (1982): Zur Geschichte der Stammbrüche und der aufsteigenden Kettenbrüche. – In: Sudhoffs Archiv 66, S. 1–19 und in: Vogel, K. (1988): Kleinere Schriften zur Geschichte der Mathematik (hg. v. M. Folkerts). – Wiesbaden/Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2. Halbband, S. 760–778
Winter, H. (1991): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht – Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. – Braunschweig: Vieweg
Wußing, H. (1979): Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Autor
Deschauer, Stefan, Prof. Dr., Technische Universität Dresden, Fachrichtung Mathematik, Professur für Didaktik der Mathematik, D-01062 Dresden.
E-mail: desch@math.tu-dresden.de

Rezensionen

Im Rezensionsteil des ZDM werden Publikationen von Bedeutung für die Didaktik oder Methodik der Mathematik/Informatik oder Publikationen mit allgemein interessierenden Inhalten von Fachleuten ausführlich rezensiert.

Hinweise auf relevante Werke oder Angebote von Rezensionen an die Redaktion des ZDM sind willkommen!

Book Reviews

New books on mathematics/computer science education as well as books of general interest are reviewed in detail in the review section of ZDM.

Readers are encouraged to participate in ZDM by offering book reviews and/or proposing books for a review to the editorial office of ZDM.