

## EL PRINCIPIO DE CALDERÓN-ZYGMUND

CARLOS PÉREZ Y RODRIGO TRUJILLO-GONZÁLEZ

*Este artículo está dedicado a la memoria de J. J. (Chicho) Guadalupe*

ABSTRACT. In this note we show some estimates for multilinear commutators with vector symbol  $b = (b_1, \dots, b_m)$  defined by the expression

$$T_{\vec{b}}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \prod_{j=1}^m (b_j(x) - b_j(y)) \right] K(x, y) f(y) dy,$$

where  $K$  is the kernel of any Calderón-Zygmund operator. We generalize and sharpen both classical results from Coifman, and Coifman, Rochberg and Weiss; and also more recent results from the first author. We show that these operators are intimately related to certain appropriate Orlicz type maximal function of the form  $M_{L(\log L)^\alpha}$  where the number  $\alpha$  is related to the symbol  $\vec{b}$ .

Existe un principio no muy bien establecido en la teoría clásica de Calderón-Zygmund que de forma general afirma que todo operador integral singular está controlado, en algún sentido, por un operador maximal apropiado. El ejemplo clásico lo proporcionan los operadores de Calderón-Zygmund, los cuales, como es bien sabido, están controlados por el operador maximal de Hardy-Littlewood  $M$ . Quizás la mejor forma de expresar este principio es por medio de la siguiente desigualdad debida a Coifman [2]. Sea  $T$  un operador de Calderón-Zygmund (ver [1], [4], [6]). Sea  $0 < p < \infty$  y  $w \in A_\infty$ ; entonces existe una constante  $C$  que depende de la constante  $A_\infty$  de  $w$  de tal manera que

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x) dx.$$

También existe una versión débil de esta desigualdad, estableciendo que, bajo las mismas condiciones, se tiene que

$$(2) \quad \sup_{t>0} t^p w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}) \leq C \sup_{t>0} t^p w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}).$$

Este tipo de desigualdades engloba una gran cantidad de información sobre el comportamiento de estos operadores. Por ejemplo, para  $p > 1$  y  $w \in A_p$  podemos aplicar el teorema de Muckenhoupt para concluir que  $T$  es un operador acotado en  $L^p(w)$ . De la misma forma, si  $w \in A_1$  se tiene que  $T$  es un operador acotado de  $L^1(w)$  en  $L^{1,\infty}(w)$ .

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42B20, 42B25.

*Key words and phrases.* Singular integral operators, maximal functions, commutators, vector valued singular integral operators,  $A_p$  weights.

Por otro lado, la desigualdad (1), combinada con algunas desigualdades precisas con dos pesos del operador maximal de Hardy-Littlewood ([8]), es la clave para establecer la siguiente desigualdad óptima en el rango  $p > 1$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M^{[p]+1} w(x) dx.$$

Observamos que aquí *no* estamos imponiendo condición alguna sobre el peso  $w$ . Este resultado fue establecido en [7] generalizando algunos resultados parciales de M. Wilson en [15]. Se puede ver aquí reflejado la relevancia de (1) pues el método de M. Wilson, que no usa (1), sólo se puede aplicar a operadores integrales singulares de convolución y con núcleos  $C^\infty$ .

Existen en la literatura otros ejemplos donde el principio de Calderón-Zygmund subyace. Quizás el más parecido a (1) es el siguiente resultado de Muckenhoupt-Wheeden que establece el control de los operadores integrales fraccionarios por sus correspondientes maximales fraccionarios:

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha f(x))^p w(x) dx.$$

donde  $0 < \alpha < n$  y donde, como antes,  $w \in A_\infty$  y la constante  $C$  depende de la constante  $A_\infty$  de  $w$ .

En este artículo mostramos otros ejemplos de este principio para otros operadores que son más singulares que los arriba mencionado.

Para  $m = 0, 1, \dots$ , consideramos el *conmutador*  $m$ -ésimo de

$$T_b^m f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K(x, y) f(y) dy, \quad m = 0, 1, \dots$$

Motivados por el conmutador de Calderón, estos operadores fueron definidos por Coifman, Rochberg y Weiss en [3] donde se prueba que están acotados en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  cuando  $b$  pertenece al espacio BMO de John-Nirenberg de funciones de oscilación media acotada.

En [10] se prueba que el operador maximal que controla a  $T_b^m$  es  $M_{L(\log L)^m}$ . Se puede probar que este operador, que es un caso especial de la definición (8), es comparable puntualmente al operador maximal de Hardy-Littlewood iterado  $m + 1$  veces, esto es,

$$M_{L(\log L)^m} \approx M^{m+1} = \overbrace{M \circ \dots \circ M}^{(m+1 \text{ veces})}.$$

De forma precisa se tiene que existe una constante  $C$  que depende de la constante  $A_\infty$  de  $w$  tal que

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m f(x)|^p w(x) dx \leq C \|b\|_{\text{BMO}}^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} (M^{m+1} f(x))^p w(x) dx.$$

De forma similar, el mismo principio de Calderón-Zygmund se obtuvo en [10] para el conmutador *no lineal*  $N$  definido por R. Rochberg y G. Weiss en [13] dado por

$$f \rightarrow Nf = T(f \log |f|) - (Tf) \log |Tf|.$$

En este caso, el operador maximal que lo controla es  $M^2$ : existe una constante  $C$  que depende de la constante  $A_\infty$  de  $w$  tal que

$$(5) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |Nf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M^2 f(x))^p w(x) dx.$$

En esta nota presentamos estimaciones similares para operadores multilineales de la forma

$$(6) \quad T_{\vec{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \prod_{j=1}^m (b_j(x) - b_j(y)) \right] K(x, y) f(y) dy,$$

donde  $K$  es el núcleo de cualquier operador integral singular de Calderón-Zygmund  $T$  y el vector  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$  está definido con funciones localmente integrables.

En [11] obtenemos una versión de la desigualdad de Coifman (1) para estos operadores multilineales  $T_{\vec{b}}$ . Consideramos en nuestro estudio la siguiente clase de funciones con mayor control exponencial de sus oscilaciones. Para  $p \geq 1$  definimos el espacio  $\text{Osc}_{\text{exp } L^p}$  por

$$\text{Osc}_{\text{exp } L^p} = \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\text{osc}_{\text{exp } L^p}} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{\text{osc}_{\text{exp } L^p}} = \sup_Q \|f - f_Q\|_{\text{exp } L^p, Q}$$

toman el supremo sobre todos los cubos  $Q$  de lados paralelos a los ejes. Como es costumbre,  $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f$  denota el promedio de  $f$  sobre  $Q$ .

Denotamos por  $\|g\|_{\text{exp } L^p, Q}$  el promedio de  $g$  en el cubo  $Q$  con respecto a la función de Young  $\Phi(t) = e^{t^p} - 1$ . En general, para una función de Young arbitraria  $\Phi$ , el  $\Phi$ -promedio de una función  $f$  sobre un cubo  $Q$  viene definido por

$$(7) \quad \|f\|_{\Phi, Q} = \|f\|_{\Phi(L), Q} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\},$$

al cual le asociamos el operador maximal  $M_\Phi = M_{\Phi(L)}$

$$(8) \quad M_\Phi f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\Phi, Q},$$

donde el supremo lo tomamos sobre todos los cubos que contienen a  $x$  (ver [8] para estudiar propiedades y aplicaciones de estos operadores).

Observemos que del teorema de John-Nirenberg se deduce que  $\text{Osc}_{\text{exp } L^1} = \text{BMO}$ . También se verifica que  $\text{Osc}_{\text{exp } L^p} \subsetneq \text{BMO}$  para todo  $p > 1$ .

En adelante supondremos que el vector símbolo  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$  pertenece a la clase

$$\text{Osc}_{\text{exp } L^{r_1}} \times \dots \times \text{Osc}_{\text{exp } L^{r_m}}$$

donde  $r_j \geq 1$  para cada  $j = 1, \dots, m$ . Para simplificar la notación, escribiremos

$$\|\vec{b}\| = \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{\text{osc}_{\text{exp } L^{r_j}}}$$

y

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_m}.$$

Nuestra versión de la desigualdad de Coifman (1) es la siguiente.

**Teorema 1.** *Sea  $0 < p < \infty$  y sea  $w \in A_\infty$ . Sea  $T_{\vec{b}}$  el conmutador (6) con  $\vec{b}$  como hemos fijado antes. Entonces existe una constante  $C$ , que depende de la constante  $A_\infty$  de  $w$ , tal que*

$$(9) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}}f(x)|^p w(x) dx \leq C \|\vec{b}\|^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} (M_{L(\log L)^{1/r}} f(x))^p w(x) dx.$$

Resaltamos que no se sabía siquiera que estos operadores estuvieran acotados en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . La desigualdad (9) muestra que el operador maximal  $M_{L(\log L)^{1/r}}$  es el que controla al conmutador multilinear  $T_{\vec{b}}$ . Observamos que obviamente se tiene que  $M_{L(\log L)^{1/r}} \leq M_{L(\log L)^m}$ , el cual, ya comentamos antes, es comparable a  $M^{m+1}$ .

Como ya hemos dicho, la desigualdad (9) es una versión generalizada del conocido resultado de Coifman de [2]. Sin embargo, el método que usamos en [11] es diferente y está basado en una estimación puntual que podemos expresar de forma general como

$$(10) \quad M_\delta^\#(T_{\vec{b}}f)(x) \leq C \|\vec{b}\| [M_{L(\log L)^{1/r}}(f)(x) + R(f)(x)]$$

donde  $\delta$  es un número positivo suficientemente pequeño.  $R$  denota cierto operador «residuo» menos singular que  $M_{L(\log L)^{1/r}}$ . Para poder entender mejor esta desigualdad, comentaremos que (10) es una versión más general de la siguiente desigualdad puntual probada en [9]:

$$M_\delta^\#([b, T]f)(x) \leq C \|b\|_{\text{BMO}} [M^2 f(x) + M_\epsilon(Tf)(x)],$$

donde  $0 < \delta < \epsilon$ . En este caso el operador «residuo» es  $R(f) = M_\epsilon(Tf)$  de tal forma que si tomamos  $\epsilon < 1$ , este operador es menos singular que  $M^2$  ya que  $M_\epsilon(Tf)$  es de tipo débil (1, 1) mientras que  $M^2$  verifica una estimación más fuerte de tipo débil  $L \log L$ . Estas desigualdades puntuales son variaciones de la bien conocida de Strömberg ([14, p. 417]). No obstante, este resultado de Strömberg no es suficientemente preciso para deducir los resultados presentados en este trabajo, incluso en los casos más sencillos.

Razonando como en [10, Theorem 2], del Teorema 1 se sigue la siguiente desigualdad para pesos generales.

**Teorema 2.** *Sea  $1 < p < \infty$  y  $T_{\vec{b}}$  como en el Teorema 1. Entonces, existe una constante  $C$  tal que, para cualquier peso  $w$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}}f(x)|^p w(x) dx \leq C \|\vec{b}\|^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M^{(1/r+1)p+1} w(x) dx.$$

Destacamos que el número de iteraciones de la función maximal necesarias en el último teorema es óptimo como puede comprobarse en [10, Section 5]. De hecho, de la demostración del Teorema 2 se sigue una estimación más precisa:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}}f(x)|^p w(x) dx \leq C \|\vec{b}\|^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M_{L(\log L)^{(1/r+1)p-1+\epsilon}}(w)(x) dx$$

donde  $\epsilon > 0$ , siendo el resultado falso para  $\epsilon = 0$ .

La estimación puntual (10) se usa también para probar el siguiente resultado de tipo débil en el espíritu de (2).

**Teorema 3.** *Sea  $T_{\vec{b}}$  como en el Teorema 1,  $w \in A_{\infty}$  y  $\Phi(t) = t \log^{1/r}(e + t)$ . Entonces, existe una constante positiva  $C$ , que depende de la constante  $A_{\infty}$  de  $w$ , tal que*

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} w(\{y \in \mathbb{R}^n : |T_{\vec{b}}f(y)| > t\}) \\ \leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} w(\{y \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi}(\|\vec{b}\| f)(y) > t\}). \end{aligned}$$

Este resultado está íntimamente ligado al hecho probado en [9] que afirma que los conmutadores con símbolos en BMO no son operadores de tipo débil (1, 1).

Para finalizar mostraremos otra variante del principio de Calderón-Zygmund. En efecto, en [12] se obtiene una versión *vectorial* de la desigualdad de Coifman (1). Para ser precisos sea  $T$  un operador de Calderón-Zygmund como antes. Para  $q > 0$  definimos su extensión vectorial

$$T_q f(x) = |Tf(x)|_q = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x)|^q \right)^{1/q}.$$

El resultado principal es el siguiente.

**Teorema 4.** *Sea  $1 < q < \infty$ ,  $0 < p < \infty$ , y sea  $w \in A_{\infty}$ . Entonces, existe una constante  $C$ , que depende de la constante  $A_{\infty}$  de  $w$ , tal que*

$$(11) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (T_q f(x))^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M(|f|_q)(x))^p w(x) dx.$$

De forma similar se tiene que existe una constante  $C$ , que depende de la constante  $A_{\infty}$  de  $w$ , de tal manera que

$$(12) \quad \|T_q f\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C \|M(|f|_q)\|_{L^{p,\infty}(w)}.$$

Destacamos que no está nada claro como probar este resultado usando las técnicas clásicas de [2]. Nuestro método consiste en usar una desigualdad puntual de la forma

$$(13) \quad M_{\delta}^{\#}(T_q f)(x) \leq CM(|f|_q)(x)$$

donde  $0 < \delta < 1$ . Cuando  $\delta = 1$  la desigualdad (13) es falsa y el término de la derecha se reemplaza por  $M(|f|_q^r)(x)^{1/r}$ ,  $r > 1$ . Es probable que en este caso se supiera la desigualdad, pero no es suficientemente precisa para deducir nuestros resultados.

REFERENCIAS

[1] M. Christ, *Lectures on singular integral operators*, Reg. Conferences Series in Math. **77**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.  
 [2] R. Coifman, Distribution function inequalities for singular integrals, *Proc. Acad. Sci. U.S.A.* **69** (1972), 2838–2839.

- [3] R. Coifman, R. Rochberg y G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math. (2)* **103** (1976), 611–635.
- [4] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [5] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland Math. Studies **116**, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [6] J. L. Journé, *Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators, and the Cauchy integral of Calderón*, Lecture Notes in Math. **994**, Springer-Verlag, Nueva York, 1983.
- [7] C. Pérez, Weighted norm inequalities for singular integral operators, *J. London Math. Soc.* **49** (1994), 296–308.
- [8] C. Pérez, On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted  $L^p$ -spaces with different weights, *Proc. London Math. Soc. (3)* **71** (1995), 135–157.
- [9] C. Pérez, Endpoint estimates for commutators of singular integral operators, *J. Funct. Anal.* **128** (1995), 163–185.
- [10] C. Pérez, Sharp estimates for commutators of singular integrals via iterations of the Hardy-Littlewood maximal function, *J. Fourier Anal. Appl.* **3** (1997), 743–756.
- [11] C. Pérez y R. Trujillo-González, Sharp weighted estimates for multilinear commutators, aparecerá en *J. London Math. Soc.*
- [12] C. Pérez y R. Trujillo-González, Sharp weighted estimates for vector-valued singular integral operators, prepublicación.
- [13] R. Rochberg y G. Weiss, Derivatives of analytic families of Banach spaces, *Ann. of Math. (2)* **118** (1983), 315–347.
- [14] A. Torchinsky, *Real variable methods in harmonic analysis*, Academic Press, Nueva York, 1988.
- [15] J. M. Wilson, Weighted norm inequalities for the continuous square functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **314** (1989), 661–692.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, 28049 MADRID, SPAIN  
Correo electrónico: carlos.perez@uam.es

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 38271 LA LAGUNA,  
TENERIFE, SPAIN  
Correo electrónico: rotrujil@ull.es